ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 80–90.

УДК 517.925.51

© *И. Н. Сергеев*

ЗАВИСИМОСТЬ ОТ НАЧАЛЬНОГО МОМЕНТА МЕР УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Изучаются недавно введенные понятия меры устойчивости и меры неустойчивости разного типа: ляпуновского, перроновского или верхнепредельного. Эти понятия допускают естественную вероятностную интерпретацию, которая показывает зависимость конкретных свойств решений дифференциальной системы, начинающихся близко к ее нулевому решению, от сколь угодно малых возмущений начальных значений задачи Коши с фиксированным начальным моментом. В работе исследуется как раз зависимость самих этих мер от начального момента. Доказано, что эта зависимость полностью отсутствует для одномерных и автономных систем, а также для многих типов устойчивости или неустойчивости линейных систем. Кроме того, доказано, что крайние значения самих мер устойчивости или неустойчивости всегда инвариантны относительно выбора начального момента. Наконец, приведен пример системы, для которой эта зависимость, напротив, проявляется в максимально возможной степени.

Ключевые слова: дифференциальная система, ляпуновская устойчивость, перроновская устойчивость, верхнепредельная устойчивость, мера устойчивости, начальный момент.

DOI: 10.35634/vm240106

Введение

В настоящей работе изучается понятие, содержательно развивающее понятие устойчивости нулевого решения дифференциальной системы в смысле его естественной вероятностной интерпретации. Стохастические свойства дифференциального уравнения, как правило, связаны со случайными величинами или процессами в его коэффициентах или в запаздываниях [1–3]. В нашем же случае уравнение полностью детерминировано.

Изучаемое ниже понятие [4–6], именуемое *мерой устойчивости*, позволяет оценить снизу возможность выбора сколь угодно близкого к нулю начального значения возмущенного решения данной системы так, чтобы его график оказывался в заданной трубке нулевого решения в каком-либо из следующих смыслов [7]:

а) на всей полуоси времени (*устойчивость по Ляпунову* [8–10]);

б) хотя бы эпизодически, но в сколь угодно поздние моменты времени (*устойчивость по Перрону* [11], восходящая к *показателям Перрона* [12, 13]);

в) с какого-то момента, но уже навсегда (*верхнепредельная устойчивость* [14]).

Аналогичную, но прямо противоположную роль играет *мера неустойчивости*, оценивающая возможность выбора сколь угодно близкого к нулю начального значения возмущенного решения, которое, наоборот, удаляется от нулевого решения с ростом времени. Кстати, предвестниками изучаемых в работе мер служат недавние понятия *почти устойчивости* и *почти полной неустойчивости* [15], обеспечивающие соответствующим свойствам возмущенных решений полную меру.

Настоящая работа посвящена первичному исследованию возможной зависимости упомянутых мер от выбора начального момента.

§ 1. Основные обозначения и определения

При произвольном $n \in \mathbb{N}$ для заданной *фазовой* области $G \ni 0$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ рассмотрим *дифференциальную систему*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times G, \tag{1}$$

с правой частью, удовлетворяющей условиям

$$f(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G) \tag{2}$$

(обеспечивающим наличие *нулевого* решения и корректность задачи Коши), и с *замкнутым временны́м* лучом $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$. Будем считать, при необходимости, допустимым также и вариант *открытого* временно́го луча $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ для системы (1), а кроме того, выделим следующие ее частные случаи:

1) *одномерная* система — при $n = 1$;

2) *автономная* система — с не зависящей от времени правой частью

$$f(t, x) \equiv F(x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in G, \quad F \in C^1(G);$$

3) *линейная* (однородная, из-за наличия нулевого решения) система — с правой частью вида

$$f(t, x) \equiv A(t)x, \quad G \equiv \mathbb{R}^n, \quad A\colon \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n, \quad A \in C(\mathbb{R}_+).$$

Пусть $B_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x_0| \leqslant \delta\}$ (причем для всех достаточно малых $\delta > 0$ имеет место включение $B_\delta \subset G$), а mes — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Для заданной системы (1) и конкретного начального момента $t_0 \in \mathbb{R}_+$ введем обозначения:

а) $\mathcal{S}(f)$ — множество *непродолжаемых* решений системы (1), а $x(\cdot, t_0, x_0) \in \mathcal{S}(f)$ — то из них, которое удовлетворяет начальному условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$;

б) $M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0)$ или $N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0)$ — множества значений $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющих или, соответственно, не удовлетворяющих (в частности, в том случае, когда решение $x(\cdot, t_0, x_0)$ определено не на всем временном луче) одному из следующих требований

$$\sup_{t \geqslant t_0} |x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon, \qquad \varliminf_{t_0 \leqslant \to +\infty} |x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon, \qquad \varlimsup_{t_0 \leqslant \to +\infty} |x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon, \tag{3}$$

которые ниже будем ассоциировать с соответствующими значениями $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$.

Определение 1. *Ляпуновскую, перроновскую* и *верхнепредельную меры устойчивости* или *неустойчивости* системы (1) (точнее, ее нулевого решения, о чем в дальнейшем более не будем упоминать) с *начальным моментом* $t_0 \in \mathbb{R}_+$ зададим соответственно при ассоциированном значении $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ формулами

$$\mu_\varkappa(f, t_0) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varliminf_{\delta \to +0} \frac{\operatorname{mes} M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0)}{\operatorname{mes} B_\delta}, \quad \nu_\varkappa(f, t_0) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varlimsup_{\delta \to +0} \frac{\operatorname{mes} N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0)}{\operatorname{mes} B_\delta}.$$

Иными словами, для системы (1) с начальным моментом $t_0 \in \mathbb{R}_+$ мера устойчивости $\mu_\varkappa(f, t_0)$ — это такое наибольшее число, что для любых $\mu < \mu_\varkappa(f, t_0)$ и $\varepsilon > 0$ при некотором $\delta(\mu, \varepsilon) > 0$ верны оценки

$$\operatorname{mes} M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0) \geqslant \mu \cdot \operatorname{mes} B_\delta, \quad \delta \in (0, \delta(\mu, \varepsilon)),$$

а мера неустойчивости $\nu_\varkappa(f, t_0)$ — такое наибольшее число, что для любого $\nu < \nu_\varkappa(f, t_0)$ при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta(\nu, \varepsilon) > 0$ верны оценки

$$\operatorname{mes} N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0) \geqslant \nu \cdot \operatorname{mes} B_\delta, \quad \delta \in (0, \delta(\nu, \varepsilon)).$$

Понятиям мер из определения 2 предшествовали [7, 14, 15] понятия устойчивости и полной неустойчивости того же типа, а также почти устойчивости и почти полной неустойчивости, которые также привязываются к конкретному начальному моменту и к тому же довольно естественно определяются в приведенной здесь терминологии.

Определение 2. Скажем, что система (1) с *начальным моментом* $t_0 \in \mathbb{R}_+$ обладает *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной устойчивостью* (*почти устойчивостью*) или *полной неустойчивостью* (*почти полной неустойчивостью*), если для каждого $\varepsilon > 0$ при некотором $\delta > 0$ и ассоциированном $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ выполнены равенства

$$M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0) = B_\delta \quad (\operatorname{mes} M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0) = \operatorname{mes} B_\delta)$$

или, соответственно, равенства

$$N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0) = B_\delta \quad (\operatorname{mes} N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0) = \operatorname{mes} B_\delta).$$

§ 2. Элементарные сдвиги по временно́й оси

Введенные ранее [4–6] меры устойчивости и неустойчивости по умолчанию предполагали фиксацию конкретно *нулевого* начального момента $t_0 = 0 \in \mathbb{R}_+$ (причем исключительно для *замкнутого* временно́го луча) и потому в своих обозначениях символа $t_0 = 0$ не содержали. По определению, это были соответственно числа

$$\mu_\varkappa(f) \equiv \mu_\varkappa(f, 0), \quad \nu_\varkappa(f) \equiv \nu_\varkappa(f, 0), \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma, \tag{4}$$

оказавшиеся к тому же корректно заданными (в смысле измеримости используемых множеств) и удовлетворяющими естественным оценкам

$$0 \leqslant \mu_\varkappa(f), \nu_\varkappa(f) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \mu_\varkappa(f) + \nu_\varkappa(f) \leqslant 1,$$

которые вполне согласуются с их вероятностной интерпретацией.

Для сравнения мер с различными начальными моментами имеет смысл определить сдвиги системы и ее решений.

Определение 3. Назовем *сдвинутой на* $T \geqslant 0$ системой (1) и ее *сдвинутым* решением $x \in \mathcal{S}(f)$ соответственно систему вида (1) со *сдвинутой* правой частью f_T и функцию x_T, где

$$f_T(t, x) \equiv f(t + T, x), \quad x_T(t) \equiv x(t + T), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in G.$$

Непосредственно из определения 3 следует, что множество $\mathcal{S}(f_T)$ всех решений сдвинутой системы совпадает с множеством всех сдвинутых на $T \geqslant 0$ решений $x \in \mathcal{S}(f)$ исходной системы

$$\mathcal{S}(f_T) = \{x_T \mid x \in \mathcal{S}(f)\}, \tag{5}$$

поскольку оба множества получаются из множества $\mathcal{S}(f)$ одним и тем же временны́м сдвигом.

Равенство (4), связывающее значения мер устойчивости и неустойчивости с нулевым начальным моментом, допускает естественное обобщение на случай произвольного начального момента, которое и предлагает следующая теорема.

Теорема 1. *Для системы* (1) *с любым начальным моментом* $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *верны равенства*

$$\mu_\varkappa(f_{t_0}) = \mu_\varkappa(f, t_0), \quad \nu_\varkappa(f_{t_0}) = \nu_\varkappa(f, t_0), \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma. \tag{6}$$

§ 3. Случаи инвариантности мер относительно начального момента

Нас будет интересовать возможная зависимость или независимость мер устойчивости и неустойчивости именно от начального момента.

Известно [16, п. 6.1], что ни устойчивость, ни полная неустойчивость ляпуновского типа не могут нарушиться при смещениях начального момента по временно́й оси, каковой факт естественным образом распространяется и на их перроновские и верхнепредельные аналоги. Для некоторых классов систем при изменении начального момента не меняются также и значения мер устойчивости и неустойчивости, о чем и говорят следующие теоремы.

Теорема 2. *Если система* (1) *одномерна или автономна, то все ее меры устойчивости и неустойчивости любого типа не зависят от начального момента.*

Теорема 3. *Если система* (1) *линейна, то ее ляпуновские и верхнепредельные меры устойчивости и неустойчивости не зависят от начального момента.*

Можно заметить, что почти устойчивость и почти полная неустойчивость также не нарушаются при изменении начального момента. Более того, следующая теорема распространяет это замечание даже на общий случай принятия мерами устойчивости или неустойчивости своих крайних значений.

Теорема 4. *Если мера устойчивости или неустойчивости системы* (1) *некоторого типа хотя бы с одним начальным моментом принимает какое-либо из крайних значений* 0 *или* 1, *то она не зависит от начального момента.*

§ 4. Примеры зависимости мер от начального момента

И все же для некоторых систем меры устойчивости и неустойчивости существенно зависят от начального момента и, даже более того, они могут всего лишь на одной системе принимать сразу все свои потенциально возможные значения (в данном контексте — любые, отличные от крайних), что и подтверждают следующие теоремы.

Теорема 5. *Для каждого* $n > 1$ *существует система* (1) *с открытым временны́м лучом, у которой меры устойчивости всех трех типов совпадают друг с другом, а с ростом начального момента возрастают, пробегая весь интервал* $(0, 1)$ *и составляя* 1 *в сумме с мерой неустойчивости.*

Теорема 6. *Для каждого* $n > 1$ *существует система* (1) *с открытым временны́м лучом, у которой меры устойчивости всех трех типов совпадают друг с другом, а с ростом начального момента убывают, пробегая весь интервал* $(0, 1)$ *и составляя* 1 *в сумме с мерой неустойчивости.*

Формальное усиление двух последних теорем в направлении замыкания в них временно́го луча не реализуемо, как показывает следующая теорема.

Теорема 7. *Если непосредственно в формулировке какой-либо из теорем* 5 *или* 6 *заменить открытый временной луч замкнутым, добавив, при необходимости, к промежутку* $(0, 1)$ *хотя бы один из его концов, то полученное в результате таких изменений утверждение окажется неверным.*

§ 5. Доказательства части сформулированных теорем

Сначала докажем теоремы 1–3 и 7, не требующие каких-либо слишком сложных построений или умозаключений.

Доказательство теоремы 1 получается непосредственным применением определения 1 сначала к исходной системе (1) с начальным моментом t_0, а затем к сдвинутой на t_0 системе уже с нулевым начальным моментом: результаты, в силу равенства (5) при $T = t_0$, окажутся одинаковыми. $\square$

Доказательство теоремы 2. Как известно [4], для одномерной системы с нулевым начальным моментом меры устойчивости или неустойчивости полностью определяются наличием семейства решений этой системы, удовлетворяющих второму или третьему требованию (3) при различных значениях $\varepsilon > 0$. Однако сами эти требования, а с ними и меры с произвольным начальным моментом, в принципе не зависят от выбора начального момента $t_0 \geqslant 0$.

Далее, для автономной системы (1) с начальным моментом t_0 каждая из мер устойчивости или неустойчивости не зависит от t_0, поскольку, в силу равенств (6) теоремы 1, она совпадает с аналогичной мерой для сдвинутой на t_0 системы с нулевым начальным моментом, а ее правая часть f_{t_0} (см. определение 3) в данном случае уже не зависит от t_0, как и от t вообще. $\square$

Доказательство теоремы 3. Известно [4], что множество всех ограниченных на замкнутом луче $\mathbb{R}_+$ решений любой линейной системы (1) в линейном пространстве $\mathcal{S}(f)$ всех ее решений образует подпространство, размерность которого однозначно определяет значения всех мер ляпуновской и верхнепредельной устойчивости и неустойчивости с нулевым начальным моментом, а именно: если эта размерность равна n, то система попросту устойчива (и ляпуновски, и верхнепредельно сразу), а если меньше — то неустойчива, а ее меры в этих двух случаях удовлетворяют соответственно цепочкам неравенств

$$\mu_\varkappa(f) = 1 > 0 = \nu_\varkappa(f), \quad \mu_\varkappa(f) = 0 < 1 = \nu_\varkappa(f), \quad \varkappa = \lambda, \sigma. \tag{7}$$

Но тогда соотношения (7) инвариантны относительно сдвигов системы (1) на любое $t_0 > 0$ (поскольку от этих сдвигов не зависит ограниченность или неограниченность конкретного решения на всей полуоси: ведь на отрезке $[0, t_0]$ оно заведомо ограничено — впрочем, последний вывод справедлив и в силу теоремы 4). $\square$

Доказательство теоремы 7. Если, скажем, в формулировке какой-либо из теорем 5 или 6 замкнуть временной луч, то при убывании к нулю начального момента $t_0 > 0$ из того, что обе меры $\mu_\varkappa(f, t_0), \nu_\varkappa(f, t_0) \in [0, 1]$ монотонны по t_0, а их значения должны заполнять весь интервал $(0, 1)$, следует, что их значения при $t_0 = 0$ могут быть только крайними, а именно, совпадающими с 0 или 1, но это, по теореме 4, в данной ситуации невозможно. $\square$

§ 6. Доказательство теоремы 4

Для данной системы (1) фиксируем два произвольных различных начальных момента $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+$, служащих концами отрезка $J \subset \mathbb{R}_+$.

1. Пусть для некоторого $\varkappa \in \{\lambda, \pi, \sigma\}$ мера устойчивости удовлетворяет равенству $\mu_\varkappa(f, t_0) = 0$, означающему в точности, что для любых $\mu, \varepsilon > 0$ найдется такая последовательность $\delta_m \to +0$ $(m \to +\infty)$, что при всех $\delta = \delta_m$ выполнены оценки

$$\operatorname{mes} M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0) \leqslant \mu \cdot \operatorname{mes} B_\delta. \tag{8}$$

Выберем достаточно малое $\Delta > 0$, для которого выполняется включение $B_\Delta \subset G$ и при каждом $x_1 \in B_\Delta$ решение $x(\cdot, t_1, x_1) \in \mathcal{S}(f)$ определено также в точке $t = t_0$, а значит, корректно задано семейство отображений Коши

$$K_t\colon B_\Delta \to G, \quad K_t(x_1) = x(t, t_1, x_1), \quad (t, x_1) \in J \times B_\Delta.$$

Его производная по начальному значению, непрерывная на всем компакте $J \times B_\Delta$ (в силу условий (2) [16, п. 5.4]), ограничена по норме в целом, равно как и производная обратного отображения $K_{t_0}^{-1}\colon K_{t_0}(B_\Delta) \to B_\Delta$, и поэтому при некотором $k \geqslant 1$ удовлетворяет оценкам

$$\|(K_t)'_{x_1}(x_1)\|, \|(K_{t_0}^{-1})'_{x_1}(K_{t_0}(x_1))\| \leqslant k, \quad x_1 \in B_\Delta, \quad t \in J,$$

гарантирующим, что локальное растяжение под действием отображения K_t, равно как и локальное сжатие под действием отображения K_{t_0}, происходит не более, чем в k раз. Тогда при ограничениях

$$0 < \delta < \min\{\Delta, \varepsilon/k\} \tag{9}$$

для всех $t \in J$ выполнены условия

$$K_t(0) = 0, \quad K_t(B_\delta) \subset B_{k\delta} \subset B_\varepsilon, \quad K_{t_0}(M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_1)) \subset M_\varkappa(f, \varepsilon, k\delta, t_0)$$

(здесь в случае $\varkappa = \lambda$ и $t_0 < t_1$ первое из требований (3) распространяется на весь расширенный луч $[t_0, +\infty) = J \cup [t_1, +\infty)$), из которых вытекают оценки

$$\operatorname{mes} M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_1) \leqslant k^n \cdot \operatorname{mes} K_{t_0}(M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_1)) \leqslant k^n \cdot \operatorname{mes} M_\varkappa(f, \varepsilon, k\delta, t_0).$$

Отсюда при произвольных $\mu, \varepsilon > 0$ для подпоследовательности значений $\delta = \delta_m/k \to +0$ $(m \to +\infty)$ с ограничением (9), с учетом оценок (8), получаем цепочку оценок

$$\operatorname{mes} M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_1) \leqslant k^n \cdot \mu \operatorname{mes} B_{k\delta} \leqslant (\mu k^{2n}) \cdot \operatorname{mes} B_\delta.$$

Поэтому верно также и равенство $\mu_\varkappa(f, t_1) = 0$.

2. Аналогичное равенство $\nu_\varkappa(f, t_0) = 0$ для меры неустойчивости означает, что для любого $\nu > 0$ найдутся такие число $\varepsilon > 0$ и последовательность $\delta_m \to +0$ $(m \to +\infty)$, что при каждом $\delta = \delta_m$ выполнена оценка

$$\operatorname{mes} N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0) \leqslant \nu \cdot \operatorname{mes} B_\delta, \tag{10}$$

откуда аналогичными рассуждениями для всех $\delta = \delta_m/k$ с ограничением (9) выводятся оценки

$$\operatorname{mes} N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_1) \leqslant (\nu k^{2n}) \cdot \operatorname{mes} B_\delta, \tag{11}$$

а с ними и равенство $\nu_\varkappa(f, t_1) = 0$.

3. Пусть теперь мера устойчивости удовлетворяет равенству $\mu_\varkappa(f, t_0) = 1$, означающему в точности, что для любых $\mu \equiv 1 - \nu < 1$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\mu, \varepsilon) > 0$, что при всех $\delta \in (0, \delta(\mu, \varepsilon))$ выполнены оценки

$$\operatorname{mes} M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0) \geqslant (1 - \nu) \cdot \operatorname{mes} B_\delta,$$

равносильные оценкам (10), из которых, при том же ограничении (9), вытекают оценки (11), равносильные равенству $\mu_\varkappa(f, t_1) = 1$.

4. Аналогичное равенство $\nu_\varkappa(f, t_0) = 1$ для меры неустойчивости означает, что для любого $\nu \equiv 1 - \mu < 1$ найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta(\nu, \varepsilon) > 0$, что при всех $\delta \in (0, \delta(\nu, \varepsilon))$ выполнены оценки

$$\operatorname{mes} N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta, t_0) \geqslant (1 - \mu) \cdot \operatorname{mes} B_\delta,$$

то есть оценки (8), обеспечивающие, при условии (9), равенство $\nu_\varkappa(f, t_1) = 1$. □

§ 7. Доказательство теорем 5 и 6

1. Рассмотрим конкретную двумерную автономную систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = (x_1^2 - x_2^2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv F(x_1, x_2), \quad t > 0, \tag{12}$$

вида (1) с условиями (2). Множество $O \equiv \{x_1^2 = x_2^2\}$ на ее фазовой плоскости $G = \mathbb{R}^2$ составлено из двух пересекающихся в нуле прямых — биссектрис всех четырех координатных углов, сплошь заполненных точками покоя. Все остальные ее фазовые кривые представляют собой начинающиеся в нуле открытые лучи, по которым с ростом времени $t > 0$ в двух конусах (двусторонних)

$$M \equiv \{x_1^2 < x_2^2\}, \quad N \equiv \{x_1^2 > x_2^2\}$$

модули обеих сразу координат $|x_1(t)|$ и $|x_2(t)|$ либо монотонно убывают к нулю, либо, соответственно наоборот, монотонно и неограниченно возрастают.

2. Сделав в системе (12) зависящую от $t > 0$ подстановку $x_2 = tx_3$, получим в новых координатах уже неавтономную систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1^2 - t^2 x_3^2) \cdot x_1 \\ (x_1^2 - t^2 x_3^2 - 1/t) \cdot x_3 \end{pmatrix} \equiv f_1(t, x_1, x_3), \quad t > 0. \tag{13}$$

Конусы M и N в результате этого преобразования координат превращаются при каждом $t > 0$ соответственно в конусы

$$M_t = \{x_1^2 < t^2 x_3^2\}, \quad N_t = \{x_1^2 > t^2 x_3^2\},$$

а их образующие, которые порождают измененное множество $O_t \equiv \{x_1^2 = t^2 x_3^2\}$, составляют с осями ординат и абсцисс соответственно углы $\operatorname{arctg} t, \operatorname{arcctg} t \in (0, \pi/2)$. Модули новых координат $|x_1(t)|$ и $|x_3(t)| = |x_2(t)|/t$ теперь с ростом времени изменяются так: в области M_t они оба убывают к нулю (второй даже быстрее, чем прежде), а в области N_t, по меньшей мере, первый из них (заведомо отличный от нуля) по-прежнему неограниченно возрастает. Поэтому при каждых $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ и $0 < \delta < \varepsilon$ для произвольного начального момента $t_0 > 0$ отношения мер, характеризующие устойчивость и неустойчивость, принимают значения

$$\frac{\operatorname{mes} M_\varkappa(f_1, \varepsilon, \delta, t_0)}{\operatorname{mes} B_\delta} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} t_0, \quad \frac{\operatorname{mes} N_\varkappa(f_1, \varepsilon, \delta, t_0)}{\operatorname{mes} B_\delta} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcctg} t_0, \tag{14}$$

из которых по определению 1 следует, что такие же значения принимают соответственно и меры устойчивости $\mu_\varkappa(f_1, t_0)$ и неустойчивости $\nu_\varkappa(f_1, t_0)$, которые к тому же удовлетворяют равенству

$$\mu_\varkappa(f_1, t_0) + \nu_\varkappa(f_1, t_0) = \frac{2}{\pi}(\operatorname{arctg} t_0 + \operatorname{arcctg} t_0) = 1.$$

Таким образом, две последние меры для построенной системы (13) зависят от начального момента $t_0 > 0$ в точности так, как описано в теореме 5.

3. Аналогично, сделав в системе (12) подстановку $x_1 = tx_4$, получим неавтономную систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t^2 x_4^2 - x_2^2 - 1/t) \cdot x_4 \\ (t^2 x_4^2 - x_2^2) \cdot x_2 \end{pmatrix} \equiv f_2(t, x_4, x_2), \quad t > 0, \tag{15}$$

с преобразованными множествами

$$M_t = \{t^2x_4^2 < x_2^2\}, \quad N_t = \{t^2x_4^2 > x_2^2\}, \quad O_t \equiv \{t^2x_4^2 = x_2^2\},$$

причем их образующие составляют с осями абсцисс и ординат соответственно углы $\operatorname{arctg} t, \operatorname{arcctg} t \in (0, \pi/2)$. Модули новых координат $|x_4(t)| = |x_1(t)|/t$ и $|x_2(t)|$ с ростом времени изменяются так: в области M_t они оба убывают к нулю, а в области N_t, по меньшей мере, второй из них (при дополнительном условии его отличия от нуля, которое не выполнено лишь на множестве меры нуль) неограниченно возрастает. Поэтому аналогично получаем, что при каждых $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ и $0 < \delta < \varepsilon$ для произвольного начального момента $t_0 > 0$ отношения мер, характеризующие устойчивость и неустойчивость, а с ними и меры устойчивости $\mu_\varkappa(f_2, t_0)$ и неустойчивости $\nu_\varkappa(f_2, t_0)$, принимают те же значения (14), но только переставленные местами. Следовательно, эти меры для системы (15) зависят от $t_0 > 0$ уже так, как описано в теореме 6. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1965.
2. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
3. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
4. Сергеев И. Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Математические заметки. 2023. Т. 113. Вып. 6. С. 895–904. https://doi.org/10.4213/mzm13744
5. Сергеев И. Н. Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 851–852. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54036478
6. Сергеев И. Н. Свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 11. С. 1577–1579. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54794423
7. Сергеев И. Н. О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2023. Т. 33. С. 353–423.
8. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
9. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
10. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
11. Сергеев И. Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646. https://doi.org/10.1134/S0374064119050054
12. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Mathematische Zeitschrift. 1930. Vol. 31. № 1. P. 748–766. https://doi.org/10.1007/BF01246445
13. Изобов Н. А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.
14. Сергеев И. Н. Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 63–78. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-06
15. Сергеев И. Н. Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578. https://doi.org/10.31857/S0374064121110157
16. Сергеев И. Н. Дифференциальные уравнения. Курс лекций. М.: Изд-во Московского ун-та, 2023.

Поступила в редакцию 25.12.2023

Принята к публикации 31.01.2024

Сергеев Игорь Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Московский государственный университет, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8976-0732
E-mail: igniserg@gmail.com

Цитирование: И. Н. Сергеев. Зависимость от начального момента мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 80–90.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 1. Pp. 80–90.

I. N. Sergeev

Measures of stability and instability of the differential system zero solution and their dependence on the initial moment

Keywords: differential system, Lyapunov stability, Perron stability, upper-limit stability, measure of stability, initial moment.

MSC2020: 93D05

DOI: 10.35634/vm240106

The recently introduced concepts of stability measures and instability measures of different types are studied: Lyapunov, Perron or upper-limit. These concepts allow a natural probabilistic interpretation, which shows the dependence of specific properties of solutions of a differential system, starting close to its zero solution, on arbitrarily small perturbations of the initial values of the Cauchy problem with a fixed initial moment. The work examines precisely the dependence of these measures on the initial moment. It has been proved that this dependence is completely absent for one-dimensional and autonomous systems, as well as for many types of stability or instability of linear systems. Moreover, it has been proved that the extreme values of the measures of stability or instability themselves are always invariant with respect to the choice of the initial moment. Finally, an example of a system is given for which this dependence, on the contrary, manifests itself to the maximum possible extent.

REFERENCES

1. Itô K., McKean H. P. *Diffusion processes and their sample paths*, Berlin: Springer, 1996. https://doi.org/10.1007/978-3-642-62025-6
2. Khas'minskii R. Z. *Ustoichivost' sistem differentsial'nych uravnenii pri sluchainykh vozmushcheniyakh ikh parametrov* (Stability of systems of differential equations under random perturbations of their parameters), Moscow: Nauka, 1969.
3. Venttsel' A. D., Freidlin M. I. *Fluktuatsii v dinamicheskikh sistemakh pod deistviem malykh sluchainykh vozmushchenii* (Fluctuations in dynamic systems under the influence of small random disturbances), Moscow: Nauka, 1979.
4. Sergeev I. N. Definition and properties of measures of stability and instability of zero solution of a differential system, *Mathematical Notes*, 2023, vol. 113, issue 6, pp. 831–839. https://doi.org/10.1134/S0001434623050243
5. Sergeev I. N. Determination of measures of stability and instability of the zero solution of a differential system, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 851–852 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54036478
6. Sergeev I. N. Properties of measures of stability and instability of the zero solution of a differential system, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2023, vol. 59, no. 11, pp. 1577–1579 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54794423
7. Sergeev I. N. On Perron, Lyapunov and upper-limit stability properties of differential systems, *Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo*, 2023, vol. 33, pp. 353–423 (in Russian).
8. Lyapunov A. M. *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* (General problem of motion stability), Moscow–Leningrad: GITTL, 1950.
9. Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytskii V. V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problem of stability), Moscow: Nauka, 1966.
10. Demidovich B. P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical theory of stability), Moscow: Nauka, 1967.
11. Sergeev I. N. Definition and some properties of Perron stability, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 5, pp. 620–630. https://doi.org/10.1134/S0012266119050045

12. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme, *Mathematische Zeitschrift*, 1930, vol. 31, no. 1, pp. 748–766. https://doi.org/10.1007/BF01246445
13. Izobov N. A. *Lyapunov exponents and stability*, Cambridge Scientific Publishers, 2012.
Original Russian text published in Izobov N. A. *Vvedenie v teoriyu pokazatelei Lyapunova*, Minsk: Belarusian State University, 2006.
14. Sergeev I. N. Lyapunov, Perron and upper-limit stability properties of autonomous differential systems. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 63–78 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-06
15. Sergeev I. N. Massive and almost massive properties of stability and instability of differential systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2021, vol. 57, no. 11, pp. 1576–1578 (in Russian). https://doi.org/10.31857/S0374064121110157
16. Sergeev I. N. *Differentsial'nye uravneniya. Kurs lektsii* (Differential equations. Lecture course), Moscow: Moscow State University, 2023.

Received 25.12.2023

Accepted 31.01.2024

Igor Nikolaevich Sergeev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Moscow State University, Leninskie gory, 1, Moscow, 119991, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8976-0732
E-mail: igniserg@gmail.com

Citation: I. N. Sergeev. Measures of stability and instability of the differential system zero solution and their dependence on the initial moment, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 1, pp. 80–90.