ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 3–18.

УДК 517.95

© *Р. В. Бризицкий, Н. Н. Максимова*

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДРЕЙФА–ДИФФУЗИИ ЭЛЕКТРОНОВ

Исследуется задача мультипликативного управления для стационарной диффузионно-дрейфовой модели зарядки полярного диэлектрика. Роль управления играет старший коэффициент в уравнении модели, имеющий смысл коэффициента диффузии электронов. Глобальная разрешимость краевой задачи и локальная единственность ее решения, а также разрешимость экстремальной задачи доказана в предыдущих работах авторов. В настоящей работе для задачи управления выводится система оптимальности и устанавливаются условия локальной регулярности множителя Лагранжа. На основе анализа данной системы доказывается локальная единственность решения задачи мультипликативного управления для конкретных функционалов качества.

Ключевые слова: модель дрейфа–диффузии электронов, модель зарядки полярного диэлектрика, задача мультипликативного управления, система оптимальности, локальная единственность.

DOI: 10.35634/vm240101

Введение. Постановка краевой задачи

Диффузионно-дрейфовое приближение часто используется при моделировании процессов зарядки диэлектриков в неравновесных внешних условиях (см. [1–14]). Практическая ценность данных исследований обусловлена необходимостью прогнозирования состояния функциональных диэлектрических материалов при диагностике и модификации их свойств методами растровой электронной микроскопии.

Математическая модель процесса зарядки полярного диэлектрика состоит из стационарного уравнения дрейфа–диффузии электронов и статических уравнений Максвелла и может быть представлена следующей краевой задачей, рассматриваемой в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ:

$$-\operatorname{div}(d\,\nabla\rho) + \mu_n \mathbf{E}\cdot\nabla\rho + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}|\rho|\rho = f \text{ в } \Omega, \tag{0.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \text{ в } \Omega, \tag{0.2}$$

$$\rho = 0, \quad \mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma. \tag{0.3}$$

Здесь ρ — объемная плотность заряда, $\mathbf{E}$ — вектор-функция напряженности электрического поля, $d > 0$ — коэффициент диффузии электронов, μ_n — дрейфовая подвижность электронов, ε — диэлектрическая проницаемость материала, ε_0 — электрическая постоянная, f — генерационное слагаемое, отвечающее за действие объемного источника зарядов в объекте. На задачу (0.1)–(0.3) будем ссылаться как на задачу 1.

Несмотря на практический интерес, математическая корректность модели (0.1)–(0.3) впервые была обоснована в 2022 г. в статье [15]. В цитируемой работе доказана глобальная разрешимость и локальная единственность слабого решения задачи 1. В [15] также установлен и проверен вычислительным экспериментом принцип максимума и минимума для плотности заряда ρ. В свою очередь, данный результат существенно упрощает контроль за вычислительными экспериментами по решению краевых и экстремальных задач для рассматриваемой модели.

Далее в [16] для задачи 1 доказана разрешимость задачи мультипликативного управления, роль управления в которой играет функция d.

В статье [17] обоснована корректность модели дрейфа–диффузии электронов, учитывающей неоднородность потери заряда в пространстве. Для рассматриваемой краевой задачи доказана разрешимость задачи управления с двумя мультипликативными и одним распределенным управлениями. Для задачи управления получены системы оптимальности и на основе их анализа доказана единственность решения задачи распределенного управления.

Отметим, что математический аппарат для исследования рассматриваемых в [15–17] краевых и экстремальных задач разрабатывался под влиянием работ [18–20] и [21–23] по исследованию близких полулинейных моделей реакции–диффузии и моделей сложного теплообмена. Также отметим сходство модели (0.1)–(0.3) и нелинейных моделей массопереноса, обобщающих приближение Буссинеска (см., например, [24, 25]). Как и в [25], в работе [15] разрешимость краевой задачи доказана с использованием теоремы Шаудера, а полученная в [17] система оптимальности также имеет локальную регулярность.

В настоящей работе доказывается локальная единственность решения задачи мультипликативного управления для модели (0.1)–(0.3). Роль управления в рассматриваемой задаче играет старший коэффицент d в уравнении (0.1). Как и в работах [18, 19, 25], метод доказательства локальной единственности оптимального решения основан на применении системы оптимальности. С помощью данного метода в [17] доказана локальная единственность решения задачи распределенного управления, роль управления в которой играет функция f. Однако задача мультипликативного управления обладает большей нелинейностью, и доказать локальную единственность ее решения, как минимум, технически сложнее. В свою очередь, интерес к задачам мультипликативного управления связан с тем, что в рамках оптимизационного подхода к ним сводятся задачи восстановления (неизвестных) коэффициентов модели по дополнительной информации о решении соответствующих краевых задач (о корректности такого подхода см., например, [18]).

§ 1. Разрешимость краевой задачи

При анализе краевой задачи будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает область Ω, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо границу Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}, |\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$ обозначим норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Нормы и скалярные произведения в $L^2(Q)$ и $L^2(\Omega)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)_\Omega$.

Введем функциональные пространства $H^1(\Delta,\Omega) = \{h \in H^1(\Omega)\colon \Delta h \in L^2(\Omega)\}$,

$$H^1_N(\Omega) = \{\mathbf{h} \in H^1(\Omega)^3\colon \mathbf{h}\times\mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{0}\}, \quad \tilde{H}^1_N(\Omega) = H^1_N(\Omega) \cap \ker(\mathrm{rot}),$$

функциональное множество

$$H^s_{d_0}(\Omega) = \{h \in H^s(\Omega)\colon h \geqslant d_0 > 0 \text{ п.в. в } \Omega\}, \quad s > 3/2,$$

где d_0 — положительная константа, и произведение пространств $X = H^1_0(\Omega)\times\tilde{H}^1_N(\Omega)$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(i) Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$;

(ii) $f \in L^2(\Omega)$, $d \in H^s_{d_0}(\Omega)$, $s > 3/2$.

Напомним, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leqslant 6$, компактно при $s < 6$ и с некоторой константой

C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка

$$\|h\|_{L^s(\Omega)} \leqslant C_s\|h\|_{1,\Omega} \quad \forall h \in H^1(\Omega).$$

При $s = 2$ мы полагаем $C_2 = 1$.

Ниже будем использовать следующие формулы Грина (см. [26, 27]):

$$-(\Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v) - (\partial u/\partial n, v)_\Gamma \; \forall u \in H^1(\Delta, \Omega), \quad v \in H^1(\Omega),$$

$$(\mathbf{u}, \nabla v) + (\operatorname{div} \mathbf{u}, v) = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, v\rangle_\Gamma \quad \forall \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \quad \text{с } \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^{3/2}(\Omega),\; v \in H^1(\Omega), \tag{1.1}$$

Справедливы следующие леммы (см. [15, 26]).

Лемма 1.1. *При выполнении условий* (i), $\mathbf{E} \in H^1(\Omega)^3$, $d \in H^s_{d_0}(\Omega)$, $s > 3/2$, *существуют положительные константы* C_0, δ_1, γ_1' *и* γ_1, *зависящие, соответственно, от* Ω *такие, что*

$$|(d\,\nabla h, \nabla \eta)| \leqslant C_0\|d\|_{s,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},$$

$$|(\mathbf{E} \cdot \nabla h, \eta)| \leqslant \gamma_1'\|\mathbf{E}\|_{L^4(\Omega)^3}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_1\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \quad \forall h, \eta \in H^1(\Omega), \tag{1.2}$$
$$(\nabla h, \nabla h) \geqslant \delta_1\|h\|^2_{1,\Omega} \quad \forall h \in H^1_0(\Omega).$$

Если функции $\mathbf{E} \in H^1(\Omega)^3$ *и* $\rho \in H^1_0(\Omega)$ *связаны вторым соотношением в* (0.2), *то справедливо равенство*

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, h) = -(\nabla h \cdot \mathbf{E}, \rho) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(h, \rho^2) \; \forall h \in H^1_0(\Omega),$$

принимающее при $h = \rho$ *следующий вид:*

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, \rho) = -\frac{\mu_n}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \rho^2).$$

Лемма 1.2. *При выполнении условия* (i) *для любой функции* $\sigma \in L^2(\Omega)$ *существует единственное решение* $\mathbf{E} \in \tilde{H}^1_N(\Omega)$ *задачи*

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \sigma \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma,$$

для которого справедлива оценка

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leqslant C_N\|\sigma\|_\Omega,$$

где C_N — *положительная константа, зависящая от* Ω.

Пусть $(\rho, \mathbf{E}) \in (C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})) \times (C^1(\Omega)^3 \cap \tilde{H}^1_N(\Omega))$ — классическое решение задачи 1. Умножим уравнение в (0.1) на функцию $h \in H^1_0(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω, применяя формулу Грина (1.1). Приходим к слабой формулировке задачи 1

$$(d\nabla\rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\rho|\rho, h) = (f, h) \quad \forall h \in H^1_0(\Omega), \tag{1.3}$$
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \text{ в } \Omega. \tag{1.4}$$

Справедлива следующая теорема (см. [15]).

Теорема 1.1. *При выполнении условий* (i), (ii) *существует слабое решение* $(\rho, \mathbf{E}) \in X$ *задачи* 1 *и справедливы оценки*

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leqslant C_*\|f\|_\Omega, \quad C_* = (d_0\delta_1)^{-1}, \tag{1.5}$$

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}C_N C_*\|f\|_\Omega.$$

Если к тому же выполняется условие $(\gamma_1 C_N + C_4^3)\dfrac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\|f\|_\Omega < \lambda_*^2$, *то слабое решение задачи* 1 *единственно.*

Пусть в дополнение к (i), (ii) выполняется условие

(iii) $0 \leqslant f \leqslant f_{\max}$ п.в. в Ω.

Здесь $f_{\max}$ — положительная константа.

В [15] также установлен следующий принцип максимума для плотности заряда ρ.

Лемма 1.3. *При выполнении условий* (i)–(iii) *для слабого решения* $\rho \in H_0^1(\Omega)$ *задачи* 1 *справедлив следующий принцип минимума и максимума:*

$$0 \leq \rho \leq M \text{ п.в. в } \Omega, \quad M = \left(\frac{f_{max}\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_n}\right)^{1/2}.$$

§ 2. Постановка и разрешимость задачи управления

В данном разделе мы исследуем задачу мультипликативного управления для задачи 1, роль управления в которой играет функция d. Будем считать, что функция d может изменяться во множестве K, удовлетворяющем условию:

(j) $K \subset H_{d_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$, — непустое выпуклое замкнутое множество.

Введем функциональные пространства

$$X = H_0^1(\Omega) \times \tilde{H}_N^1(\Omega), \quad Y = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

и положим $\mathbf{x} = (\rho, \mathbf{E}) \in X$.

Далее введем оператор

$$F = (F_1, F_2)\colon X \times K \to Y,$$

действующий по формулам

$$\langle F_1(\mathbf{x}, d), h\rangle = (d\,\nabla\rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\rho|\rho, h) - (f, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega),$$

$$F_2(\mathbf{x}) = \operatorname{div}\mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \text{ в } \Omega$$

и перепишем слабую формулировку задачи 1 в виде операторного уравнения $F(\mathbf{x}, d) = 0$.

Пусть $I\colon X \to \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал. Рассмотрим следующую задачу управления:

$$J(\mathbf{x}, d) \equiv \frac{\mu_0}{2}I(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2}\|d\|_{s,\Omega}^2 \to \inf, \quad F(\mathbf{x}, d) = 0, \quad (\mathbf{x}, d) \in X \times K, \quad s > 3/2. \tag{2.1}$$

Через $Z_{ad} = \{(\mathbf{x}, d) \in X \times K\colon F(\mathbf{x}, d) = 0,\ J(\mathbf{x}, d) < \infty\}$ обозначим множество допустимых пар для задачи (2.1).

Пусть, в дополнение к (j), выполняются следующие условия:

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, множество K ограничено или $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$ и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\rho) = \|\rho - \rho^d\|_Q^2, \quad I_2(\rho) = \|\rho - \rho^d\|_{1,Q}^2, \quad I_3(\mathbf{E}) = \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|_Q^2. \tag{2.2}$$

Здесь $\rho^d \in L^2(Q)$ (или $\rho^d \in H^1(Q)$) обозначает заданное поле концентрации в подобласти $Q \subset \Omega$. Функция $\mathbf{E}^d$ имеет аналогичный смысл для электрического поля.

Справедлива следующая теорема (см. [16]).

Теорема 2.1. *При выполнении условий* (i), (ii) *и* (j), (jj) *функционал* $I\colon X \to \mathbb{R}$ *слабо полунепрерывен снизу и* $Z_{ad} \neq \emptyset$. *Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\mathbf{x}, d) \in X \times K$ *задачи управления* (2.1).

Замечание 2.1. Функционалы качества из (2.2) удовлетворяют условиям теоремы 2.1.

§ 3. Вывод системы оптимальности

Введем пространства

$$X^* = H^{-1}(\Omega) \times \tilde{H}_N^1(\Omega)^*, \quad Y^* = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

двойственные к пространствам X и Y из раздела 2.

Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F\colon X \times K \to Y$ по состоянию $\mathbf{x}$ в любой точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d}) = (\hat{\rho}, \hat{\mathbf{E}}, \hat{d})$ является линейным непрерывным оператором $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d})\colon X \to Y$, который каждому элементу $(\tau, \mathbf{e}) \in X$ ставит в соответствие элемент

$$F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d})(\tau, \mathbf{e}) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in Y.$$

Здесь $\hat{y}_1 \in H^{-1}(\Omega)$ и $\hat{y}_2 \in L_0^2(\Omega)$ определяются по паре $(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{E}})$ и $(\tau, \mathbf{e})$ с помощью следующих соотношений:

$$\begin{gathered}\langle \hat{y}_1, (\tau, \mathbf{e}) \rangle = (\hat{d}\, \nabla\tau, \nabla h) + \mu_n(\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla\tau, h) + \mu_n(\mathbf{e} \cdot \nabla\hat{\rho}, h) + \frac{2}{\varepsilon\varepsilon_0}\mu_n(|\hat{\rho}|\tau, h), \\ \hat{y}_2 = \operatorname{div} \mathbf{e} - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\tau \quad \forall (\tau, \mathbf{e}) \in X.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Через $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d})^*\colon Y^* \to X^*$ обозначим сопряженный к $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d})$ оператор.

Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач (см. [28]), введем элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \sigma) \in Y^* = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, на который будем ссылаться, как на сопряженное состояние, и введем Лагранжиан $\mathcal{L}\colon X \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, d, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, d) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, d) \rangle_{Y^* \times Y} \equiv \lambda_0 J(\mathbf{x}, d) + \langle F_1(\mathbf{x}, d), \theta \rangle + (F_2(\mathbf{x}), \sigma).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия* (i), (ii) *и* (j), (jj) *и элемент* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d}) \in X \times K$ *является точкой локального минимума для задачи* (2.1). *Предположим, что функционал качества* $I\colon X \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируем по Фреше по состоянию* $\mathbf{x}$ *в точке* $\hat{\mathbf{x}}$. *Тогда:*

1) *существует ненулевой множитель Лагранжа* $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, \theta, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$, *с которым выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа* $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d})^* \mathbf{y}^* = -\lambda_0 J'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d})$ *в* X^*, *эквивалентное соотношениям*

$$(\hat{d}\,\nabla\tau, \nabla\theta) + \mu_n(\hat{\mathbf{E}}\cdot\nabla\tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\hat{\rho}|\tau, \theta) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\tau, \sigma) = \\ = -\lambda_0\frac{\mu_0}{2}\,\langle I'_\rho(\hat{\mathbf{x}}), \tau\rangle \quad \forall\,\tau \in H^1_0(\Omega), \tag{3.2}$$

$$\mu_n(\mathbf{e}\cdot\nabla\hat{\rho}, \theta) + (\operatorname{div}\mathbf{e}, \sigma) = -\lambda_0\frac{\mu_0}{2}\,\langle I'_{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{e}\rangle \quad \forall\,\mathbf{e} \in \tilde{H}^1_N(\Omega), \tag{3.3}$$

и справедлив принцип минимума $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leqslant \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, d, \lambda_0, \mathbf{y}^*)$ *для всех* $d \in K$, *эквивалентный неравенству*

$$\lambda_0\mu_1(\hat{d}, d-\hat{d})_{s,\Omega} + \big((d-\hat{d})\nabla\hat{\rho}, \nabla\theta\big) \geqslant 0 \quad \forall d \in K, \quad s > 3/2. \tag{3.4}$$

2) *если, к тому же, выполняется условие*

$$\frac{\gamma_1\mu_n C_N}{\varepsilon\varepsilon_0}\|f\|_\Omega \leqslant \lambda_*^2, \tag{3.5}$$

где $\lambda_* = d_0\delta_1$, *то любой нетривиальный множитель Лагранжа* $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$, *удовлетворяющий* (3.2)–(3.4), *является регулярным, т. е. имеет вид* $(1, \mathbf{y}^*)$, *и определяется единственным образом по заданной паре* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [28, гл. 2] для доказательства существования множителя Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$ достаточно показать, что $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d})\colon X \to Y$ — фредгольмов оператор. В силу (3.1) оператор $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d})\colon X \to Y$ можно представить в следующем виде:

$$F'_{\mathbf{x}} = \Phi + \hat{\Phi} \equiv (\Phi_1, \Phi_2) + (\hat{\Phi}_1, 0).$$

Здесь $\Phi_2(\mathbf{x}) = \operatorname{div}\mathbf{e} - \dfrac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\tau$ для всех $\mathbf{x} = (\tau, \mathbf{e}) \in X$ и операторы Φ_1 и $\hat{\Phi}_1\colon X \to Y$ определяются формулами

$$\langle\Phi_1(\tau), h\rangle = (\hat{d}\,\nabla\tau, \nabla h) + \mu_n(\hat{\mathbf{E}}\cdot\nabla\tau, h) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\hat{\rho}|\tau, h), \\ \langle\hat{\Phi}_1(\mathbf{e}), h\rangle = \mu_n(\mathbf{e}\cdot\nabla\hat{\rho}, h). \tag{3.6}$$

Покажем, что оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)\colon X \to Y$ является изоморфизмом. Для этого достаточно показать, что для любой пары $(f, s) \in Y$ существует единственное решение $(\tau, \mathbf{e}) \in X$ линейной задачи

$$a_1(\tau, h) = (\hat{d}\,\nabla\tau, \nabla h) + \mu_n(\hat{\mathbf{E}}\cdot\nabla\tau, h) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\hat{\rho}|\tau, h) = \langle f, h\rangle \;\forall h \in H^1_0(\Omega), \tag{3.7}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{e} - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\tau = s \text{ в } \Omega. \tag{3.8}$$

Из леммы 1.1 вытекает непрерывность и коэрцитивность билинейной формы a_1 с константой $\lambda_* = d_0\delta_1$. Тогда по теореме Лакса–Мильграма существует единственное решение $\tau \in H^1_0(\Omega)$ задачи (3.7), для которого справедлива оценка

$$\|\tau\|_{1,\Omega} \leqslant C_*\|f\|_{-1,\Omega}, \quad C_* = \lambda_*^{-1}.$$

Тогда в силу леммы 1.2 для любой функции $s \in L^2(\Omega)$ существует единственное решение $\mathbf{e} \in \tilde{H}^1_N(\Omega)$ задачи (3.8) и справедлива оценка

$$\|\mathbf{e}\|_{1,\Omega} \leqslant C_N \left(\frac{C_*}{\varepsilon\varepsilon_0} \|f\|_{-1,\Omega} + \|s\|_\Omega \right).$$

Докажем, что оператор $\hat{\Phi} = (\hat{\Phi}_1, 0)\colon X \to Y$, определенный формулой (3.6), является непрерывным и компактным. Поскольку пространство $H^1(\Omega)^3$ непрерывно и компактно вложено в $L^4(\Omega)^3$, то данное утверждение вытекает из оценки

$$\big|(\mathbf{e} \cdot \hat{\rho}, h)\big| \leqslant \gamma_2' \|\mathbf{e}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\hat{\rho}\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega}.$$

Таким образом, получаем, что оператор $F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, u)\colon X \to Y$ является фредгольмовым, как сумма изоморфизма $\Phi\colon X \to Y$ и компактного оператора $\hat{\Phi}\colon X \to Y$.

Для доказательства второго утверждения теоремы 3.1 достаточно доказать, что однородная система (3.2), (3.3) (при $\lambda_0 = 0$) имеет только тривиальное решение $\mathbf{y}^* = (\theta, \sigma) \equiv \mathbf{0}$.

Предположим противное, то есть, что существует по крайней мере одно нетривиальное решение $\mathbf{y}^* = (\theta, \sigma) \in Y^*$ системы (3.2), (3.3) при $\lambda_0 = 0$, в которой элементы $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\rho}, \hat{\mathbf{E}})$ и $\hat{d}$ связаны соотношением $F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{d}) = 0$.

Подставим $\tau = \theta$ и $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}}$ такое, что $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{e}} = \sigma$ в Ω, в (3.2), (3.3). Существование указанной функции $\tilde{\mathbf{e}}$ вытекает из леммы 1.2, причем справедлива оценка $\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{1,\Omega} \leqslant C_N \|\sigma\|_\Omega$. В результате приходим к соотношениям

$$(\hat{d}\, \nabla\theta, \nabla\theta) + \mu_n(\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla\theta, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\hat{\rho}|\theta, \theta) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\theta, \sigma) = 0 \tag{3.9}$$

$$\mu_n(\tilde{\mathbf{e}} \cdot \nabla\hat{\rho}, \theta) + (\sigma, \sigma) = 0. \tag{3.10}$$

Из (3.10) с учетом (1.2) и (1.5) выводим оценку

$$\|\sigma\|_\Omega \leqslant \gamma_1 \mu_n C_* C_N \|f\|_\Omega \|\theta\|_{1,\Omega}. \tag{3.11}$$

Используя (3.11) и коэрцитивность формы a_1, из (3.9) приходим к неравенству

$$\lambda_* \|\theta\|^2_{1,\Omega} \leqslant \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \gamma_1 \mu_n C_* C_N \|f\|_\Omega \|\theta\|^2_{1,\Omega}. \tag{3.12}$$

Из (3.12) вытекает, что если выполняется (3.5), то $\|\theta\|_{1,\Omega} = 0$ или $\theta = 0$ в Ω. Тогда из (3.11) получаем, что $\sigma = 0$, но это противоречит предполагаемой нетривиальности множителя Лагранжа (θ, σ). Единственность и регулярность множителя Лагранжа $(1, \mathbf{y}^*)$ при условии (3.5) вытекает из фредгольмовости оператора $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})\colon X \to Y$. □

Замечание 3.1. Отметим вывод системы оптимальности в работе [17] для экстремальной задачи, рассматриваемой для модели дрейфа–диффузии электронов с неоднородной потерей заряда в пространстве. Одним из отличий является более простая техника получения условий (3.5).

§ 4. Единственность решения экстремальной задачи

Используя полученную систему оптимальности, докажем в данном разделе локальную единственность решения задачи управления (2.1) для функционала качества I_1 из (2.2).

Из теоремы 1.1 вытекают оценки

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leqslant M_\rho \equiv \sup_{d \in K} C_* \|f\|_\Omega, \quad \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leqslant M_{\mathbf{E}} \equiv \sup_{d \in K} \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} C_N C_* \|f\|_\Omega, \quad C_* = \lambda_*^{-1}. \tag{4.1}$$

Положим

$$\rho = \rho_1 - \rho_2, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \quad d = d_1 - d_2. \tag{4.2}$$

Для удобства разобьем доказательство единственности решения задачи (2.1) с функционалом качества I_1 на отдельные этапы.

1. Вывод оценок норм разностей ρ и $\mathbf{E}$ через норму разности управлений d.

Для этого вычтем уравнения (1.3), (1.4), записанные при $(\rho_2, \mathbf{E}_2, d_2)$, из уравнений (1.3), (1.4) для $(\rho_1, \mathbf{E}_1, d_1)$. Будем иметь

$$\begin{gathered}(d_1 \nabla\rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\rho_1|\rho, h) = \\ = -\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho_2, h) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big((|\rho_2| - |\rho_1|)\rho_2, h\big) - (d\nabla\rho_2, \nabla h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega),\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \ \text{ в } \ \Omega. \tag{4.4}$$

Из (4.4) в силу леммы 1.2 вытекает оценка

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} C_N \|\rho\|_{1,\Omega}. \tag{4.5}$$

С учетом (4.5), при выполнении условия

$$\big(\gamma_1 C_N + C_4^3\big)\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} M_\rho \leqslant \frac{\lambda_*}{2} \tag{4.6}$$

из неравенства

$$\lambda_* \|\rho\|_{1,\Omega}^2 \leqslant \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\gamma_1 C_N + C_4^3\big) M_\rho \|\rho\|_{1,\Omega}^2 + C_0\|d\|_{s,\Omega} M_\rho \|\rho\|_{1,\Omega}$$

приходим к следующей оценке:

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leqslant 2C_* C_0 M_\rho \|d\|_{s,\Omega}. \tag{4.7}$$

С учетом (4.7) оценка (4.5) примет вид

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{2}{\varepsilon\varepsilon_0} C_N C_* C_0 M_\rho \|d\|_{s,\Omega}. \tag{4.8}$$

2. Вывод оценок для множителей Лагранжа θ_i и σ_i, $i = 1, 2$.

Предполагая, что выполняются условия теоремы 3.1, запишем (3.2), (3.3) при $I = I_1(\rho) = \|\rho - \rho^d\|_Q^2$, $\lambda_0 = 1$ для $(\rho_i, \mathbf{E}_i, \theta_i, \sigma_i)$. Будем иметь

$$\begin{gathered}(d_i\, \nabla\tau, \nabla\theta_i) + \mu_n(\mathbf{E}_i \cdot \nabla\tau, \theta_i) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\rho_i|\tau, \theta_i) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\tau, \sigma_i) = \\ = -\mu_0\,(\rho_i - \rho^d, \tau)_Q \quad \forall \tau \in H_0^1(\Omega),\end{gathered} \tag{4.9}$$

$$\mu_n(\mathbf{e}\cdot\nabla\rho_i, \theta_i) + (\operatorname{div}\mathbf{e}, \sigma_i) = 0 \quad \forall \mathbf{e} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \tag{4.10}$$

В силу леммы 1.2 существуют функции $\tilde{\mathrm{e}}_i$ такие, что $\operatorname{div}\tilde{\mathbf{e}}_i = \sigma_i$ и $\|\tilde{\mathbf{e}}_i\|_{1,\Omega} \leqslant C_N\|\sigma_i\|_\Omega$, $i = 1, 2$. Полагая $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}}_i$ в (4.10), приходим к неравенству

$$\|\sigma_i\|_\Omega \leqslant \mu_n \gamma_1 C_N M_\rho \|\theta_i\|_{1,\Omega}, \quad i = 1, 2. \tag{4.11}$$

Полагая $\tau = \theta_i$ в (4.9), с учетом лемм 1.1 и 1.2 и оценки (4.11) при выполнении условия

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\gamma_1 C_N M_\rho \leqslant \frac{\lambda_*}{2} \tag{4.12}$$

получаем следующую оценку для θ_i:

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \leqslant \mu_0 M_\theta \equiv 2\mu_0 C_*\big(M_\rho + \|\rho^d\|_Q\big), \quad i = 1, 2. \tag{4.13}$$

С учетом (4.13) из (4.11) получаем оценку для σ_i:

$$\|\sigma_i\|_\Omega \leqslant \mu_0 M_\sigma \equiv \mu_0\mu_n\gamma_1 C_N M_\rho M_\theta, \quad i = 1, 2.$$

В дополнение к (4.2) положим $\theta = \theta_1 - \theta_2,\ \sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ и перейдем к следующему этапу.

3. Вывод оценок норм разностей множителей Лагранжа $\|\theta\|_{1,\Omega}$ и $\|\sigma\|_\Omega$ через норму разности управлений $\|d\|_{s,\Omega}$, $s > 3/2$.

Вычтем равенства (4.9), (4.10), записанные при $i = 2$, из (4.9), (4.10) при $i = 1$. Будем иметь

$$\begin{gathered}(d_1\ \nabla\tau, \nabla\theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1\cdot\nabla\tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\rho_1|\tau, \theta) = -(d\ \nabla\tau, \nabla\theta_2) - \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\tau, \theta_2) - \\ - \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big((|\rho_1| - |\rho_2|)\tau, \theta_2\big) + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\tau, \sigma) - \mu_0\,(\rho, \tau)_Q \quad \forall\tau \in H_0^1(\Omega),\end{gathered} \tag{4.14}$$

$$\mu_n(\mathbf{e}\cdot\nabla\rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{e}\cdot\nabla\rho_2, \theta) + (\operatorname{div}\mathbf{e}, \sigma) = 0 \quad \forall\mathbf{e} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \tag{4.15}$$

Рассуждая, как при выводе (4.11), из (4.15) с учетом (4.7) приходим к неравенству

$$\begin{aligned}\|\sigma\|_\Omega &\leqslant \mu_0\mu_n\gamma_1 M_\theta C_N\|\rho\|_{1,\Omega} + \mu_n\gamma_1 M_\rho C_N\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant \\ &\leqslant 2\mu_0\mu_n\gamma_1 C_* C_0 M_\theta M_\rho C_N\|d\|_{s,\Omega} + \mu_n\gamma_1 M_\rho C_N\|\theta\|_{1,\Omega}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Подставим $\tau = \theta$ в (4.14). Применяя неравенство Гельдера и оценки леммы 1.1, с учетом (4.7), (4.8) будем иметь

$$\begin{gathered}\lambda_*\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant \mu_0 C_0 M_\theta\|d\|_{s,\Omega} + \mu_0\mu_n\gamma_1 M_\theta\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} + \mu_0\frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3 M_\theta\|\rho\|_{1,\Omega} + \\ + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\|\sigma\|_\Omega + \mu_0\|\rho\|_{1,\Omega} \leqslant \mu_0\omega_1\|d\|_{s,\Omega} + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\mu_n\gamma_1 C_N M_\rho\|\theta\|_{1,\Omega}, \\ \omega_1 = \frac{4}{\varepsilon\varepsilon_0}\mu_n C_* C_0 M_\rho M_\theta(\gamma_1 C_N + C_4^3) + C_0(M_\theta + 2C_* M_\rho).\end{gathered} \tag{4.17}$$

При выполнении условия (4.12) из (4.17) выводим оценку для разности θ:

$$\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant 2\mu_0 C_*\omega_1\|d\|_{s,\Omega}. \tag{4.18}$$

С учетом (4.18) из (4.16) получаем оценку для разности σ:

$$\|\sigma\|_\Omega \leqslant \mu_0\omega_2\|d\|_{s,\Omega}, \quad \omega_2 = 2\mu_n\gamma_1 C_* C_N M_\rho(C_0 M_\theta + \omega_1). \tag{4.19}$$

4. Вывод основного неравенства.

Полагая в (4.14) $\tau = \rho$, получим

$$\begin{gathered}(d_1\ \nabla\rho, \nabla\theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1\cdot\nabla\rho, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\rho_1|\rho, \theta) = -(d\ \nabla\rho, \nabla\theta_2) - \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, \theta_2) - \\ - \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big((|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2\big) + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \sigma) - \mu_0\,(\rho, \rho)_Q.\end{gathered} \tag{4.20}$$

Положим теперь $h = \theta$ в (4.3). Будем иметь

$$(d_1\nabla\rho, \nabla\theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\rho, \theta) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\rho_1|\rho, \theta) = \\ = -\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, \theta) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big((|\rho_2| - |\rho_1|)\rho_2, \theta\big) - (d\nabla\rho_2, \nabla\theta). \tag{4.21}$$

Вычитая (4.21) из (4.20), получим

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\rho_1|\rho, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big((|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2\big) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big((|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta\big) - \\ - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, \theta) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, \theta_2) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \sigma) + \mu_0\,\|\rho\|_Q^2 + \\ + (d\,\nabla\rho_2, \nabla\theta_2) - (d\,\nabla\rho_1, \nabla\theta_1) + (d\,\nabla\rho, \nabla(\theta_1 + \theta_2)) = 0. \tag{4.22}$$

Положим $d = d_1$ в неравенстве (3.4) (при $\lambda_0 = 1$), записанном для (d_2, ρ_2, θ_2), и положим $d = d_2$ в (3.4) при (d_1, ρ_1, θ_1). Будем иметь

$$\mu_1(d_2, d)_{s,\Omega} + (d\nabla\rho_2, \nabla\theta_2) \geqslant 0 \quad - \mu_1(d_1, d)_{s,\Omega} - (d\nabla\rho_1, \nabla\theta_1) \geqslant 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к оценке:

$$(d\nabla\rho_2, \nabla\theta_2) - (d\nabla\rho_1, \nabla\theta_1) \geqslant \mu_1\|d\|_{s,\Omega}^2. \tag{4.23}$$

С учетом (4.23) из (4.22) получаем основное неравенство

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(|\rho_1|\rho, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big((|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2\big) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big((|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta\big) - \\ - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, \theta) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, \theta_2) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \sigma) + \mu_0\,\|\rho\|_Q^2 + \\ + \mu_1\|d\|_{s,\Omega}^2 + \big(d\,\nabla\rho, \nabla(\theta_1 + \theta_2)\big) \leqslant 0. \tag{4.24}$$

5. Оценка слагаемых в (4.24) через норму разности d.

Применяя неравенство Гельдера, оценки леммы 1.1 и используя (4.1), (4.7), (4.8), (4.13), (4.18) и (4.19), оценим слагаемые в левой части последнего неравенства:

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big|(|\rho_1|\rho, \theta)\big| \leqslant \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3 M_\rho\|\rho\|_{1,\Omega}\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant 4\mu_0\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3 M_\rho^2 C_*^2 C_0\omega_1\|d\|_{s,\Omega}^2;$$

$$\frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big|\big((|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2\big)\big| \leqslant \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3\|\rho\|_{1,\Omega}^2\|\theta_2\|_{1,\Omega} \leqslant 4\mu_0\frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3 M_\rho^2 M_\theta C_*^2 C_0^2\|d\|_{s,\Omega}^2;$$

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big|\big((|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta)\big| \leqslant \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3 M_\rho\|\rho\|_{1,\Omega}\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant 4\mu_0\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3 M_\rho^2 C_*^2 C_0\omega_1\|d\|_{s,\Omega}^2;$$

$$\mu_n\big|(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, \theta)\big| \leqslant 4\mu_0\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\gamma_1 M_\rho^2 C_N C_*^2 C_0\omega_1\|d\|_{s,\Omega}^2;$$

$$\mu_n\big|(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, \theta_2)\big| \leqslant 4\mu_0\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\gamma_1 M_\rho^2 M_\theta C_N C_*^2 C_0^2\|d\|_{s,\Omega}^2;$$

$$\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\big|(\rho, \sigma)\big| \leqslant \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\|\rho\|_{1,\Omega}\|\sigma\|_{1,\Omega} \leqslant 2\mu_0\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}M_\rho C_* C_0\omega_2\|d\|_{s,\Omega}^2 = \\ = 4\mu_0\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\gamma_1 M_\rho^2 C_N C_*^2 C_0(C_0 M_\theta + \omega_1)\|d\|_{s,\Omega}^2;$$

$$\mu_0\,\|\rho\|_Q^2 \leqslant 4\mu_0 M_\rho^2 C_*^2 C_0^2\|d\|_{s,\Omega}^2;$$

$$\big|(d\nabla\rho,\nabla\theta_i)\big| \leqslant C_0\|d\|_{s,\Omega}\|\rho\|_{1,\Omega}\|\theta_i\|_{1,\Omega} \leqslant 2\mu_0 M_\rho M_\theta C_* C_0^2\|d\|_{s,\Omega}^2,\ i=1,2.$$

Пусть выполняются условия

$$8\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}M_\rho^2 C_*^2 C_0\big(C_4^3+\gamma_1 C_N\big)\left(C_0 M_\theta+\omega_1\right)+4M_\rho C_* C_0^2(C_*+M_\theta)<\frac{\mu_1}{\mu_0}, \tag{4.25}$$

где параметры M_ρ, M_θ и ω_1 введены, соответственно, в (4.1), (4.13) и (4.17).

Тогда из (4.24), (4.7) и (4.8) вытекает, что $d=0$, $\rho=0$ и $\mathbf{E}=\mathbf{0}$ в Ω.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть в дополнение к условиям* (i), (ii) *и* (j), (jj) *выполняются условия* (4.6) *и* (4.25). *Тогда задача управления* (2.1) *имеет единственное решение* $(\rho,\mathbf{E},d)\in H_0^1(\Omega)\times \times\tilde{H}_N^1(\Omega)\times K$.

Замечание 4.1. Ясно, что доказательство теоремы 4.1 для функционала качества I_2 из (2.2) имело бы минимум отличий, а для функционала I_3 может быть проведено по аналогичной схеме.

В заключение отметим, что разработанный в данной статье метод будет применен для вывода оценок локальной устойчивости оптимальных решений задач мультипликативного управления относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданных функций соответствующих краевых задач (см. [18, 19]) для модели зарядки неоднородного кристалла из [17].

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 122082400001–8 и проект № 075–02–2023–946).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chan D. S. H., Sim K. S., Phang J. C. H., Balk L. J., Uchikawa Y., Hasselbach F., Dinnis A. R. A simulation model for electron irradiation induced specimen charging in a scanning electron microscope // Scanning Microscopy. 1993. Vol. 7. Issue 3. P. 847–859. https://scholarbank.nus.edu.sg/handle/10635/61715
2. Sessler G. M., Yang G. M. Charge dynamics in electron-irradiated polymers // Brazilian Journal of Physics. 1999. Vol. 29. Issue 2. P. 233–240. http://doi.org/10.1590/S0103-97331999000200006
3. Suga H., Tadokoro H., Kotera M. A simulation of electron beam induced charging-up of insulators // Electron Microscopy. 1998. Vol. 1. P. 177–178.
4. Cazaux J. About the mechanisms of charging in EPMA, SEM, and ESEM with their time evolution // Microscopy and Microanalysis. 2004. Vol. 10. Issue 6. P. 670–684. https://doi.org/10.1017/S1431927604040619
5. Борисов С. С., Грачёв Е. А., Негуляев Н. Н., Черёмухин Е. А., Зайцев С. И. Моделирование поляризации диэлектрика в процессе облучения электронным пучком // Прикладная физика. 2004. № 1. С. 118–124. https://applphys.orion-ir.ru/appl-04/04-1/04-1-22r.htm
6. Kotera M., Yamaguchi K., Suga H. Dynamic simulation of electron-beam-induced chargingup of insulators // Japanese Journal of Applied Physics. 1999. Vol. 38. No. 12S. P. 7176–7179. https://doi.org/10.1143/JJAP.38.7176
7. Ohya K., Inai K., Kuwada H., Hauashi T., Saito M. Dynamic simulation of secondary electron emission and charging up of an insulting material // Surface and Coating Technology. 2008. Vol. 202. Issue 22–23. P. 5310–5313. https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2008.06.008
8. Maslovskaya A. G. Physical and mathematical modeling of the electron-beam-induced charging of ferroelectrics during the process of domain-structure switching // Journal of Surface Investigation. 2013. Vol. 7. Issue 4. P. 680–684. https://doi.org/10.1134/S1027451013040125

9. Pavelchuk A. V., Maslovskaya A. G. Approach to numerical implementation of the drift-diffusion model of field effects induced by a moving source // Russian Physics Journal. 2020. Vol. 63. Issue 1. P. 105–112. https://doi.org/10.1007/s11182-020-02008-4
10. Raftari B., Budko N. V., Vuik C. Self-consistence drift-diffusion-reaction model for the electron beam interaction with dielectric samples // Journal of Applied Physics. 2015. Vol. 118. Issue 20. Article number: 204101. https://doi.org/10.1063/1.4936201
11. Chezganov D. S., Kuznetsov D. K., Shur V. Ya. Simulation of spatial distribution of electric field after electron beam irradiation of MgO-doped $LiNbO_3$ covered by resist layer // Ferroelectrics. 2016. Vol. 496. Issue 1. P. 70–78. https://doi.org/10.1080/00150193.2016.1157436
12. Maslovskaya A., Pavelchuk A. Simulation of dynamic charging processes in ferroelectrics irradiated with SEM // Ferroelectrics. 2015. Vol. 476. Issue 1. P. 1–11. https://doi.org/10.1080/00150193.2015.998111
13. Maslovskaya A., Sivunov A. V. Simulation of electron injection and charging processes in ferroelectrics modified with the SEM-techniques // Solid State Phenomena. 2014. Vol. 213. P. 119–124. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.213.119
14. Arat K. T., Klimpel T., Hagen C. W. Model improvements to simulate charging in scanning electron microscope // Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS. 2019. Vol. 18. Issue 4. Article number: 044003. https://doi.org/10.1117/1.JMM.18.4.044003
15. Бризицкий Р. В., Максимова Н. Н., Масловская А. Г. Теоретический анализ и численная реализация стационарной диффузионно-дрейфовой модели зарядки полярных диэлектриков // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 10. С. 1696–1706. https://doi.org/10.31857/S0044466922100039
16. Maksimova N. N., Brizitskii R. V. Inverse problem of recovering the electron diffusion coefficient // Дальневосточный математический журнал. 2022. Т. 22. № 2. С. 201–206. https://doi.org/10.47910/FEMJ202226
17. Бризицкий Р. В., Максимова Н. Н., Масловская А. Г. Обратные задачи для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 9. С. 1537–1552. https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf11619
18. Brizitskii R. V., Saritskaya Zh. Y. Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2018. Vol. 26. Issue 6. P. 821–833. https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0011
19. Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю. Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 17–33. https://doi.org/10.4213/im8517
20. Maslovskaya A. G., Moroz L. I., Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E. Theoretical and numerical analysis of the Landau–Khalatnikov model of ferroelectric hysteresis // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. Vol. 93. Article number: 105524. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105524
21. Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., Hoffmann K.-H. Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. Vol. 57. P. 290–298. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.10.004
22. Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., Hoffmann K.-H. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. Vol. 460. Issue 2. P. 737–744. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.12.015
23. Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D. Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 75. P. 262–269. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.01.028

24. Baranovskii E. S. Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids // Journal of Optimization Theory and Applications. 2021. Vol 189. Issue 2. P. 623–645. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01849-4
25. Brizitskii R. V., Saritskaia Zh. Yu. Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model // Journal of Dynamical and Control Systems. 2021. Vol. 27. Issue 2. P. 379–402. https://doi.org/10.1007/s10883-020-09508-z
26. Алексеев Г. В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010.
27. Buffa A. Some numerical and theoretical problems in computational electromagnetism. University of Milano, 2000.
28. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.

Поступила в редакцию 06.07.2023

Принята к публикации 19.12.2023

Бризицкий Роман Викторович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Радио, 7;
доцент, Дальневосточный федеральный университет, 690922, Россия, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5439-2271
E-mail: mlnwizard@mail.ru

Максимова Надежда Николаевна, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой, кафедра математического анализа и моделирования, старший научный сотрудник, лаборатория математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственный университет, 675027, Россия, г. Благовещенск, Игнатьевское шоссе, 21.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8135-7399
E-mail: knnamursu@mail.ru

Цитирование: Р. В. Бризицкий, Н. Н. Максимова. О единственности решения задачи мультипликативного управления для модели дрейфа–диффузии электронов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 3–18.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 1. Pp. 3–18.

R. V. Brizitskii, N. N. Maksimova

On the uniqueness of a solution to the multiplicative control problem for the electron drift–diffusion model

Keywords: electron drift–diffusion model, polar dielectric charging model, multiplicative control problem, optimality system, local uniqueness.

MSC2020: 35A02, 35G30, 35R30, 49J20

DOI: 10.35634/vm240101

The multiplicative control problem for a stationary diffusion–drift model of charging a polar dielectric is studied. The role of control is played by a leading coefficient in the model equation, which has the meaning of the electron diffusion coefficient. The global solvability of the boundary value problem and the local uniqueness of its solution, as well as the solvability of the extremum problem under consideration, have been proved in the previous papers of the authors. In this paper, an optimality system is derived for the control problem and local regularity conditions for the Lagrange multiplier are established. Based on the analysis of this system, the local uniqueness of the multiplicative control problem's solution for specific cost functionals is proved.

Funding. The study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 122082400001–8 and project no. 075–02–2023–946).

REFERENCES

1. Chan D. S. H., Sim K. S., Phang J. C. H., Balk L. J., Uchikawa Y., Hasselbach F., Dinnis A. R. A simulation model for electron irradiation induced specimen charging in a scanning electron microscope, *Scanning Microscopy*, 1993, vol. 7, no. 3, pp. 847–859. https://scholarbank.nus.edu.sg/handle/10635/61715
2. Sessler G. M., Yang G. M. Charge dynamics in electron-irradiated polymers, *Brazilian Journal of Physics*, 1999, vol. 29, issue 2, pp. 233–240. https://doi.org/10.1590/S0103-97331999000200006
3. Suga H., Tadokoro H., Kotera M. A simulation of electron beam induced charging-up of insulators, *Electron Microscopy*, 1998, vol. 1, pp. 177–178.
4. Cazaux J. About the mechanisms of charging in EPMA, SEM, and ESEM with their time evolution, *Microscopy and Microanalysis*, 2004, vol. 10, issue 6, pp. 670–684. https://doi.org/10.1017/S1431927604040619
5. Borisov S. S., Grachev E. A., Negulyaev N. N., Cheremukhin E. A., Zaitsev S. I. Modeling the dielectric polarization during an electron beam exposure, *Applied Physics*, 2004, no. 1, pp. 118–124 (in Russian). https://applphys.orion-ir.ru/appl-04/04-1/04-1-22e.htm
6. Kotera M., Yamaguchi K., Suga H. Dynamic simulation of electron-beam-induced chargingup of insulators, *Japanese Journal of Applied Physics*, 1999, vol. 38, no. 12S, pp. 7176–7179. https://doi.org/10.1143/JJAP.38.7176
7. Ohya K., Inai K., Kuwada H., Hauashi T., Saito M. Dynamic simulation of secondary electron emission and charging up of an insulting material, *Surface and Coating Technology*, 2008, vol. 202, issue 22–23, pp. 5310–5313. https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2008.06.008
8. Maslovskaya A. G. Physical and mathematical modeling of the electron-beam-induced charging of ferroelectrics during the process of domain-structure switching, *Journal of Surface Investigation*, 2013, vol. 7, issue 4, pp. 680–684. https://doi.org/10.1134/S1027451013040125
9. Pavelchuk A. V., Maslovskaya A. G. Approach to numerical implementation of the drift-diffusion model of field effects induced by a moving source, *Russian Physics Journal*, 2020, vol. 63, issue 1, pp. 105–112. https://doi.org/10.1007/s11182-020-02008-4
10. Raftari B., Budko N. V., Vuik C. Self-consistence drift-diffusion-reaction model for the electron beam interaction with dielectric samples, *Journal of Applied Physics*, 2015, vol. 118, issue 20, article number: 204101. https://doi.org/10.1063/1.4936201

11. Chezganov D. S., Kuznetsov D. K., Shur V. Ya. Simulation of spatial distribution of electric field after electron beam irradiation of MgO-doped $LiNbO_3$ covered by resist layer, *Ferroelectrics*, 2016, vol. 496, issue 1, pp. 70–78. https://doi.org/10.1080/00150193.2016.1157436
12. Maslovskaya A., Pavelchuk A. Simulation of dynamic charging processes in ferroelectrics irradiated with SEM, *Ferroelectrics*, 2015, vol. 476, issue 1, pp. 1–11. https://doi.org/10.1080/00150193.2015.998111
13. Maslovskaya A., Sivunov A. V. Simulation of electron injection and charging processes in ferroelectrics modified with the SEM-techniques, *Solid State Phenomena*, 2014, vol. 213, pp. 119–124. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.213.119
14. Arat K. T., Klimpel T., Hagen C. W. Model improvements to simulate charging in scanning electron microscope, *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS*, 2019, vol. 18, issue 4, article number: 044003. https://doi.org/10.1117/1.JMM.18.4.044003
15. Brizitskii R. V., Maksimova N. N., Maslovskaya A. G. Theoretical analysis and numerical implementation of a stationary diffusion-drift model of polar dielectric charging, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, no. 10, pp. 1680–1690. https://doi.org/10.1134/S0965542522100037
16. Maksimova N. N., Brizitskii R. V. Inverse problem of recovering the electron diffusion coefficient, *Far Eastern Mathematical Journal*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 201–206. https://doi.org/10.47910/FEMJ202226
17. Brizitskii R. V., Maksimova N. N., Maslovskaya A. G. Inverse problems for the diffusion–drift model of charging of an inhomogeneous polar dielectric, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2023, vol. 63, issue 9, pp. 1685–1699. https://doi.org/10.1134/S0965542523090051
18. Brizitskii R. V., Saritskaya Zh. Yu. Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2018, vol. 26, issue 6, pp. 821–833. https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0011
19. Brizitskii R. V., Saritskaya Zh. Yu. Inverse coefficient problems for a non-linear convection-diffusion-reaction equation, *Izvestiya: Mathematics*, 2018, vol. 82, issue 1, pp. 14–30. https://doi.org/10.1070/IM8517
20. Maslovskaya A. G., Moroz L. I., Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E. Theoretical and numerical analysis of the Landau–Khalatnikov model of ferroelectric hysteresis, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, vol. 93, article number: 105524. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105524
21. Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., Hoffmann K.-H. Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, vol. 57, pp. 290–298. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.10.004
22. Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., Hoffmann K.-H. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, vol. 460, issue 2, pp. 737–744. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.12.015
23. Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D. Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 75, pp. 262–269. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.01.028
24. Baranovskii E. S. Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2021, vol. 189, issue 2, pp. 623–645. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01849-4
25. Brizitskii R. V., Saritskaia Zh. Yu. Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2021, vol. 27, issue 2, pp. 379–402. https://doi.org/10.1007/s10883-020-09508-z
26. Alekseev G. V. *Optimizatsiya v statsionarnykh zadachakh teplomassoperenosa i magnitnoi gidrodinamiki* (Optimization in stationary problems of heat and mass transfer and magnetohydrodynamics), Moscow: Nauchnyi Mir, 2010.

27. Buffa A. *Some numerical and theoretical problems in computational electromagnetism*, University of Milano, 2000.
28. Fursikov A. V. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* (Optimal control of distributed systems. Theory and applications), Novosibirsk: Nauchnaya Kniga, 1999.

Received 06.07.2023

Accepted 19.12.2023

Roman Viktorovich Brizitskii, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Applied Mathematics, Far East Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Radio, 7, Vladivostok, 690041, Russia;
Associate Professor, Far Eastern Federal University, Campus, 10, Ajax Bay, Russky Island, Vladivostok, 690922, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5439-2271
E-mail: mlnwizard@mail.ru

Nadezhda Nikolaevna Maksimova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis and Modeling, Senior Researcher, Laboratory of Mathematical Modeling of Complex Physical and Biological Systems, Amur State University, Ignatyevskoye shosse, 21, Blagoveshchensk, 675027, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8135-7399
E-mail: knnamursu@mail.ru

Citation: R. V. Brizitskii, N. N. Maksimova. On the uniqueness of a solution to the multiplicative control problem for the electron drift–diffusion model, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 1, pp. 3–18.