ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 64–91.

УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов, Д. М. Хачай*

ОПЕРАТОР ПРОГРАММНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ И РЕЛАКСАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ СБЛИЖЕНИЯ–УКЛОНЕНИЯ

В настоящей работе рассматривается естественная релаксация игровой задачи наведения. А именно, для двух замкнутых множеств — параметров задачи — решается аналогичная задача о наведении для ε-окрестностей данных множеств. Нас интересует наименьший размер таких окрестностей, для которых игрок I может решить задачу наведения в классе обобщенных квазистратегий. Для построения решения используется модификация метода программных итераций. Вышеупомянутый размер окрестностей находится как функция позиции и в дальнейшем определяется путем применения специальной итерационной процедуры. Также в работе показано, что искомая функция является неподвижной точкой оператора, определяющего данную процедуру.

Ключевые слова: дифференциальная игра сближения–уклонения, метод программных итераций, гарантированный результат.

DOI: 10.35634/vm200106

Введение

За последние пару десятилетий теория дифференциальных игр остается одним из наиболее активно развивающихся направлений в области исследования операций и теории управления. Первое упоминание дифференциальной игры восходит к работам Айзекса. В своей известной монографии [1] он исследует различные приложения, которые могут быть сформулированы в форме дифференциальной игры. Данные приложения представляют огромный практический интерес и на сегодняшний день.

Теория дифференциальных игр интенсивно развивалась, прежде всего благодаря исследованиям Л. С. Понтрягина [2], Н. Н. Красовского [3], Б. Н. Пшеничного [4], А. Б. Куржанского, Ю. С. Осипова и А. И. Субботина.

В настоящей работе рассматривается нелинейная дифференциальная игра сближения–уклонения, определяемая двумя замкнутыми множествами в пространстве позиций: одно из них является целевым, а второе определяет фазовые ограничения. Данная постановка соответствует классической задаче наведения, приведенной в работах [5, 6]. В работе [5] Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным была доказана фундаментальная теорема об альтернативе. Важное обобщение было получено А. В. Кряжимским [10]. Согласно теореме об альтернативе, множество, определяющее фазовые ограничения, может быть разбито на два непересекающихся подмножества, определяющих множества успешной разрешимости для каждого игрока. Если дифференциальная игра удовлетворяет условию Айзекса, тогда альтернатива реализуется в классе чистых позиционных стратегий и, разумеется, в классе неупреждающих стратегий [7, 8], известных также как квазистратегии [9, 14]. Случай многозначных квазистратегий был рассмотрен, в частности, в [14]. Задача построения альтернативного разбиения может быть сведена к задаче нахождения множества успешной разрешимости игрока I, который заинтересован в гарантированном наведении.

Для нахождения решения для нелинейной дифференциальной игры применяются различные программные конструкции [6]. Для упомянутого общего случая дифференциальной игры был предложен метод программных итераций [9, 11–13, 15]. Для рассматриваемой в настоящей работе задачи применяется модификация метода программных итераций, а именно итерации стабильности [17, 18]. Используя подобную модификацию, стало возможным находить решения для дифференциальных игр сближения–уклонения с ограничением на число переключений [18]. А именно, на каждом этапе итерационной процедуры строится свое множество успешной разрешимости.

В данной работе рассмотрена релаксация исходной дифференциальной игры сближения уклонения. Исследуется возможность наведения на замкнутые окрестности целевого множества в рамках соответствующих окрестностей множества, определяющего фазовые ограничения. Более того, для каждой фиксированной позиции определяется «размер» данных окрестностей, в рамках которых первый игрок успешно решает свою задачу. Упомянутый «размер» также оценивает возможности игрока II, заинтересованного в уклонении, следующим образом: для меньшего размера окрестности он может решить свою собственную задачу за конечное число переключений. Исходя из этого подхода, сформулирована функция минимакса, значения которой могут быть рассмотрены как гарантированный результат специальной функции платы. Для построения данного результата была сконструирована специальная итерационная процедура в пространстве позиций. Также показано, что сама функция оптимального результата есть неподвижная точка особого программного оператора задачи.

§ 1. Общие определения и обозначения

В дальнейшем используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.). Через $\triangleq$ обозначаем равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество, def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Произвольному объекту z сопоставляем синглетон $\{z\}$, содержащий z (одноэлементное множество со свойством $z \in \{z\}$). Каждому множеству X сопоставляется (непустое) семейство $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств (п/м) X; $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X)\setminus\{\varnothing\}$ есть семейство всех непустых п/м X. Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство, а B — множество, то

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)) \tag{1.1}$$

есть след $\mathcal{A}$ на множество B. Для всяких множества $\mathbb{M}$ и непустого семейства $\mathcal{M} \in \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M\colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})). \tag{1.2}$$

В (1.1) и (1.2) в качестве семейства может использоваться топология на соответствующем множестве. Применяемые ниже топологии будут, как правило, метризуемыми, то есть порождаемыми метриками.

Совсем кратко отметим нужные понятия, связанные с применением мер. Каждому множеству E сопоставляем множество $(\sigma - \mathrm{alg})[E]$ всех σ-алгебр п/м E; при $\mathcal{E} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ в виде $(E, \mathcal{E})$ имеем стандартное измеримое пространство (ИП). Если $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\sigma_E^0(\mathfrak{E}) \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ есть def σ-алгебра п/м E, порожденная семейством $\mathfrak{E}$. При $H \in \mathcal{P}(E)$ и $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ с учетом (1.1) определяем $\mathfrak{E}|_H \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H))$ и σ-алгебру $\sigma_H^0(\mathfrak{E}|_H) \in (\sigma - \mathrm{alg})[H]$; при этом $\sigma_H^0(\mathfrak{E}|_H) = \sigma_E^0(\mathfrak{E})|_H$; если $H \in \sigma_E^0(\mathfrak{E})$, то $\sigma_E^0(\mathfrak{E})|_H = \{\Sigma \in \sigma_E^0(\mathfrak{E}) \mid \Sigma \subset H\}$ (подчеркнем, что случай $H = \varnothing$ допускается). При $\mathcal{E} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ через $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех вещественнозначных (в/з) неотрицательных счетно-аддитивных мер на $\mathcal{E}$. Если τ — топология на множестве E, то $\sigma_E^0(\tau) \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ есть σ-алгебра борелевских п/м E; меры $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\sigma_E^0(\tau)]$ называем борелевскими.

Совсем кратко напомним некоторые общие понятия. Если A и B — непустые множества, то B^A есть def множество всех отображений из A в B. Если при этом $\tilde{f} \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(\tilde{f} \mid C) \triangleq (\tilde{f}(x))_{x \in C} \in B^C$ (сужение f на множество C); в качестве A и C могут использоваться семейства.

Как обычно $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ (натуральный ряд), $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0;1;2;\ldots\}$; $\overline{m,s} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (m \leqslant k) \& (k \leqslant s)\}$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$ $\forall s \in \mathbb{N}_0$, полагаем, что $\overrightarrow{m,\infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid m \leqslant k\}$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$. Кроме того, полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ не являются множествами и, с учетом этого, для всяких непустого множества H и числа $m \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,m}}$ используем более традиционное обозначение H^m. В то же время $H^{\mathbb{N}}$ есть множество всех последовательностей в H; в качестве H может использоваться семейство. Если $\mathcal{H}$ — непустое семейство, $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ и H — множество, то, как обычно,

$$((H_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow H) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((H = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H_i) \,\&\, (H_{k+1} \subset H_k \ \ \forall k \in \mathbb{N})).$$

§ 2. Обобщенные управления и траектории

Мы рассматриваем $\mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, в качестве фазового пространства системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \qquad u \in P, \quad v \in Q, \tag{2.1}$$

функционирующий на конечном промежутке $T \triangleq [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$. В (2.1) P и Q — непустые компакты в конечномерных арифметических пространствах,

$$f\colon T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

есть непрерывная по совокупности переменных функция (далее: n-вектор-функция). Полагаем, что в (1.1), u и v — векторные управляющие воздействия игроков I и II соответственно. Полагаем сейчас для простоты, что при $t_* \in T$ игроки могут использовать только кусочно-постоянные (к.-п.), непрерывные справа (н. спр.) и непрерывные слева (н. сл) в точке ϑ_0 вектор-функции $u(\cdot) = u_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_0}$ и $v(\cdot) = v_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_0}$, определенные на $[t_*, \vartheta_0]$ (более общие конструкции будут введены позднее, где будут предполагаться выполненными условия обобщенной единственности и равномерной ограниченности программных движений, подобные [10] и реализующие траектории на $[t_*, \vartheta_0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$).

В дальнейшем фиксируются множества $\mathbf{M} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\mathbf{N} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$. Мы рассматриваем игровую задачу $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$-наведения: при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ стремимся найти процедуру управления U игрока I (из наперед заданного множества, которое может зависеть от (t_*, x_*)), для которой всякая траектория $x_U(\cdot) = (x_U(t), t_* \leqslant t \leqslant \vartheta_0)$ системы (2.1), порожденная процедурой U обладает свойством

$$\exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : ((\vartheta, x_U(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \,\&\, ((t, x_U(t)) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta]). \tag{2.2}$$

Возможны варианты постановки, в которых реализация (2.2) допускается приближенной, когда множества $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ заменяются «малыми» окрестностями, но мы сейчас не будем на этом останавливаться. В то же время применение в конструкциях на основе (2.2) достаточно «больших» окрестностей упомянутых множеств представляет для нас интерес. Имеется в виду следующее обстоятельство: если гарантированное осуществление (2.2) невозможно, то насколько точным можно гарантировать приближенное соблюдение упомянутых условий. Иными словами, каким является наименьший размер окрестностей, для которых еще осуществим (с гарантией) аналог (2.2), в котором $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ заменены упомянутыми окрестностями. Этот вопрос, рассматриваемый также в [13], будет основным предметом исследования.

Введем в рассмотрение метрику ρ на множестве $T \times \mathbb{R}^n$ (множество позиций), имеющую вид

$$((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \mapsto \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\})\colon (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \tag{2.3}$$

где $\|\cdot\|$ есть евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, а $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\} = [0, \infty[$. Тогда ρ (2.3) порождает на $T \times \mathbb{R}^n$ топологию покоординатной сходимости, обозначаемую через $\mathbf{t}$; полагаем $\mathcal{F} \triangleq \mathbf{C}_{T\times\mathbb{R}^n}[\mathbf{t}]$, получая семейство всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в метризуемом пространстве $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$; $\mathcal{F} \setminus \{\varnothing\} \subset \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$.

Если $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$, то при $z \in T \times \mathbb{R}^n$ полагаем $\rho(z; H) \triangleq \inf(\{\rho(z; h) \colon h \in H\})$; через $\rho(\cdot; H)$ обозначаем функцию $\tilde{z} \mapsto \rho(\tilde{z}; H) \colon T\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ расстояния до множества H. Данная функция равномерно непрерывна на $T \times \mathbb{R}^n$ и при этом $\forall z_1 \in T \times \mathbb{R}^n \ \ \forall z_2 \in T \times \mathbb{R}^n$

$$|\rho(z_1; H) - \rho(z_2; H)| \leqslant \rho(z_1, z_2). \tag{2.4}$$

Полагаем при $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, что

$$S_0(H, \varepsilon) \triangleq \{z \in T \times \mathbb{R}^n | \rho(z; H) \leqslant \varepsilon\}; \tag{2.5}$$

в силу (2.4) и (2.5) получаем, что $S_0(H, \varepsilon) \in \mathcal{F}$. В частности, имеем, что

$$S_0(F, \varepsilon) \in \mathcal{F} \ \ \forall F \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\} \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+. \tag{2.6}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что

$$(\mathbf{M} \in \mathcal{F})\,\&\,(\mathbf{N} \in \mathcal{F})\,\&\,(\mathbf{M} \neq \varnothing)\,\&\,(\mathbf{M} \subset \mathbf{N}). \tag{2.7}$$

С учетом (2.5)–(2.7) имеем, конечно, что при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\})\,\&\,(S_0(\mathbf{N}, \varepsilon) \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\})\,\&\,(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \subset S_0(\mathbf{N}, \varepsilon)). \tag{2.8}$$

Возвращаясь к (2.2) и вопросу о приближенном осуществлении (2.2), можно указать некоторые «границы» возможного в части определения вышеупомянутого наименьшего размера окрестностей, для которого еще реализуется (2.2) при замене $\mathbf{M}$ на $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$ и $\mathbf{N}$ на $S_0(\mathbf{N}, \varepsilon)$.

В самом деле, располагая процедурой U и занимаясь, при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, определением наименьшего числа $\varepsilon_* \in]0, \infty[$ со свойством:

$$\exists\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \colon ((\vartheta, x_U(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*))\,\&\,((t, x_U(t)) \in S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta]) \tag{2.9}$$

для всякой траектории $x_U(\cdot)$, порожденной U, можно легко заметить, что $\varepsilon_* \geqslant \rho((t_*, x_*); \mathbf{N})$, поскольку траектория $x_U(\cdot)$ в (2.9) стартует из позиции (t_*, x_*) и, стало быть, $x_U(t_*) = x_*$. С другой стороны, из (2.9) следует, конечно, что $\varepsilon_* \leqslant \rho((t_*, x_*); \mathbf{M})$, поскольку ε_* — наименьшее из неотрицательных чисел, для которых (2.9) осуществимо с гарантией посредством процедуры U (мы полагаем, конечно, что движения $x_U(\cdot)$, порождаемые процедурой U, существуют). Учитываем также, что в силу (2.7)

$$\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \geqslant \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}).$$

С учетом этого получаем, что $[\rho((t_*, x_*); \mathbf{N}), \rho((t_*, x_*); \mathbf{M})]$ есть непустой промежуток, определяющий диапазон возможных значений ε_*. Подобные построения можно реализовать для каждой позиции из множества $T \times \mathbb{R}^n$, получая уже не одно значение ε_*, а функцию позиции, являющуюся селектором мультифункции, значения которой являются (непустыми) замкнутыми промежутками вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Напомним некоторые понятия, связанные с обобщенными управлениями (ОУ). Если $t \in T$, то рассматриваем непустые (конечномерные) компакты $[t, \vartheta_0]$, $\Omega_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P \times Q$ и $Z_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times Q$, оснащаемые соответственно σ-алгебрами $\mathcal{T}_t$, $\mathcal{C}_t$ и $\mathcal{D}_t$ борелевских п/м (при этом $[t, \vartheta_0]$, Ω_t и Z_t оснащаются топологиями покоординатной сходимости, которые порождают $\mathcal{T}_t$, $\mathcal{C}_t$ и $\mathcal{D}_t$ соответственно). При $\Gamma \in \mathcal{T}_t$ имеем, что $\Gamma \times P \times Q \in \mathcal{C}_t$ и $\Gamma \times Q \in \mathcal{D}_t$; если $D \in \mathcal{D}_t$, то $D \underline{\times} P \triangleq \{(t, u, v) \in \Omega_t \mid (t, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t$ есть цилиндр с «основанием» D. В виде $\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t] \mid \eta(\Gamma \times P \times Q) = \lambda_t(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}$, где λ_t — след меры Лебега на σ-алгебру $\mathcal{T}_t$, имеем множество всех «совокупных» ОУ на отрезке $[t, \vartheta_0]$. Меры $\eta \in \mathcal{H}_t$ являются обобщенными аналогами пар $(u(\cdot), v(\cdot))$ обычных программных управлений на $[t, \vartheta_0]$. Аналогично в виде $\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{D}_t] \mid \nu(\Gamma \times Q) = \lambda_t(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}$ имеем множество всех ОУ игрока II; меры $\nu \in \mathcal{E}_t$ являются аналогами обычных управлений $v(\cdot) = v_t(\cdot)_{\vartheta_0}$. Наконец, при $\nu \in \mathcal{E}_t$ в виде $\Pi_t(\nu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(D \underline{\times} P) = \nu(D) \ \ \forall D \in \mathcal{D}_t\}$ имеем программу [14, гл. IV], порожденную ОУ ν игрока II (имеется в виду аналог множества пар $(u(\cdot), \bar{v}(\cdot))$, $u(\cdot) = u_t(\cdot)_{\vartheta_0}$, $\bar{v}(\cdot) = \bar{v}_t(\cdot)_{\vartheta_0}$, где $\bar{v}(\cdot)$ фиксировано).

При $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$ имеем следующие четыре σ-алгебры множеств:

$$\begin{gathered}
\mathcal{C}_{t_2} = \{H \in \mathcal{C}_{t_1} \mid H \subset \Omega_{t_2}\}, \qquad \mathcal{D}_{t_2} = \{D \in \mathcal{D}_{t_1} \mid D \subset Z_{t_2}\}, \\
\mathcal{C}_{t_1}^{t_2} \triangleq \mathcal{C}_{t_1}|_{[t_1, t_2[\times P \times Q} = \{H \in \mathcal{C}_{t_1} \mid H \subset [t_1, t_2[\times P \times Q\}, \\
\mathcal{D}_{t_1}^{t_2} \triangleq \mathcal{D}_{t_1}|_{[t_1, t_2[\times Q} = \{D \in \mathcal{D}_{t_1} \mid D \subset [t_1, t_2[\times Q\};
\end{gathered} \tag{2.10}$$

при этом $\mathcal{H}_{t_2} = \{(\eta|\mathcal{C}_{t_2})\colon \eta \in \mathcal{H}_{t_1}\}$ и $\mathcal{E}_{t_2} = \{(\nu \mid \mathcal{D}_{t_2})\colon \nu \in \mathcal{E}_{t_1}\}$. Введем в рассмотрение (обобщенные многозначные) квазистратегии на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$, где $t_* \in T$; итак

$$\begin{gathered}
\tilde{A}_{t_*} \triangleq \{\alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu)) |\ \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*}\ \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0] \ \ ((\nu_1 \mid \mathcal{D}_{t_*}^{\theta}) = \\
(\nu_2|\mathcal{D}_{t_*}^{\theta})) \Rightarrow (\{(\eta|\mathcal{C}_{t_*}^{\theta})\colon \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{(\eta \mid \mathcal{C}_{t_*}^{\theta})\colon \eta \in \alpha(\nu_2)\})\}
\end{gathered} \tag{2.11}$$

(в (2.11) учитываются свойства (2.10)); если $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$, то

$$\tilde{\Pi}_{t_*}(\alpha) \triangleq \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu) \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}_{t_*}) \tag{2.12}$$

есть множество ОУ, возможных при использовании квазистратегии α.

Элементы топологии. Если $t \in T$, то через $C([t, \vartheta_0])$, $C(\Omega_t)$ и $C(Z_t)$ обозначаем множества всех в/з непрерывных функций на $[t, \vartheta_0]$, Ω_t и Z_t соответственно. Данные множества оснащаем нормами равномерной сходимости, получая при этом банаховы пространства. Через $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Z_t)$ обозначаем множества всех линейных ограниченных функционалов на $C(\Omega_t)$ и $C(Z_t)$ соответственно; тем самым реализуются пространства, топологически сопряженные к $C(\Omega_t)$ и $C(Z_t)$. Множества $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{E}_t$ погружаются (теорема Рисса, [16, гл. IV]) в $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Z_t)$ соответственно и по этой причине оснащаются относительными $*$-слабыми топологиями, которые метризуемы, поскольку $C(\Omega_t)$ и $C(Z_t)$ сепарабельны; см. [16, гл. V]) (учитываем, что $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{E}_t$ — сильно ограниченные множества). Отметим здесь же подробное обсуждение в [14, гл. IV, § 2]). Сейчас заметим только, что $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{E}_t$ суть непустые $*$-слабо компактные множества (сильно ограниченные и $*$-слабо замкнутые). С учетом упомянутой метризуемости относительных $*$-слабых топологий $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{E}_t$, замкнутость п/м упомянутых множеств тождественна секвенциальной замкнутости, а компактность — секвенциальной компактности (имеется в виду $*$-слабая замкнутость и $*$-слабая компактность). Итак, нужные нам топологические свойства допускают исчерпывающее описание в терминах сходящихся последовательностей. Для обозначения $*$-слабой сходимости в $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{E}_t$ используем символ $\rightharpoonup$. В этой связи см. [14, гл. IV, § 2], а также [17].

Отметим, что при $\nu \in \mathcal{E}_t$ свойством $*$-слабой компактности обладает программа $\Pi_t(\nu)$. Через $\mathfrak{F}_t$ условимся обозначать семейство всех (секвенциально) $*$-слабо компактных п/м $\mathcal{H}_t$

$$\mathfrak{F}_t \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_t) \mid \forall (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}} \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_t \ \ ((\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \eta) \Rightarrow (\eta \in H)\}.$$

В терминах $\mathfrak{F}_t$ вводим понятие квазипрограммы на отрезке $[t, \vartheta_0]$, рассматривая последнюю как квазистратегию, обладающую ($*$-слабой) замкнутостью множества, определяемого подобно (2.12). Итак, при $t \in T$

$$\tilde{A}_t^{\Pi} \triangleq \{\alpha \in \tilde{A}_t \mid \tilde{\Pi}_t(\alpha) \in \mathfrak{F}_t\} \tag{2.13}$$

есть множество всех квазипрограмм на $[t, \vartheta_0]$. Тогда $\Pi_t(\cdot) \triangleq (\Pi_t(\nu))_{\nu\in\mathcal{E}_t} \in \tilde{A}_t^{\Pi}$, а потому $\tilde{A}_t^{\Pi} \neq \varnothing$ и $\tilde{A}_t \neq \varnothing$. Мы рассматриваем квазистратегии и, в частности, квазипрограммы в качестве допустимых процедур управления в (2.2), (2.9).

Программные движения. Следуем определениям [15, § 4], полагая при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, что

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \triangleq \{x(\cdot) \in C_n([t_*, v_0]) \mid x(t) = x_* + \int\limits_{[t_*, t[\times P\times Q} f(\xi, x(\xi), u, v)\eta(d(\xi, u, v)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_0]\},$$

где $C_n([t_*, \vartheta_0])$ — множество всех непрерывных отображений из $[t_*, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$ (то есть множество всех непрерывных n-вектор-функций на $[t_*, \vartheta_0]$). Как и в [10] полагаем выполненным условие обобщенной единственности: при $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\}, \tag{2.14}$$

где $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = (\varphi(t, t_*, x_*, \eta))_{t\in[t_*, \vartheta_0]} \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ есть (обобщенная) траектория системы (2.1), развивающаяся под действием ОУ η и стартующая из позиции (t_*, x_*). Называем $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)$ программным движением, отвечающим триплету (t_*, x_*, η). Напомним полугрупповое свойство [15, (4.10)]. Наряду с (2.14), потребуем еще (как и в [10]) выполнение условий равномерной ограниченности, полагая при $\varkappa \in \mathbb{R}_+$, что

$$\mathbb{B}_n(\varkappa) \triangleq \{x \in \mathbb{R}_n \mid \|\|x\| \leqslant \varkappa\}.$$

Полагаем в дальнейшем, что $\forall a \in \mathbb{R}_+$ $\exists b \in \mathbb{R}_+$: $\varphi(\xi, t, x, \eta) \in \mathbb{B}_n(b)$ $\forall t \in T$ $\forall x \in \mathbb{B}_n(a)$ $\forall \eta \in \mathcal{H}_t$ $\forall \xi \in [t, \vartheta_0]$. Напомним важное свойство непрерывности отображения

$$(\eta, x) \longmapsto \varphi(\cdot, t, x, \eta) \colon \mathcal{H}_t \times \mathbb{R}^n \to C_n([t, \vartheta_0]), \tag{2.15}$$

где $t \in T$, $\mathcal{H}_t$ оснащается относительной $*$-слабой топологией, а $\mathbb{R}^n$ — обычной топологией покоординатной сходимости. Итак, относительно (2.15) имеем (см. [15, раздел 4]) при $t \in T$,

$$(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to \mathcal{H}_t, \qquad (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n,$$

$\eta \in \mathcal{H}_t$ и $x \in \mathbb{R}^n$ импликацию

$$((\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \eta) \,\&\, ((\|x_i - x\|)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0)) \Rightarrow ((\varphi(\cdot, t, x_i, \eta_i))_{i\in\mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t, x, \eta)), \tag{2.16}$$

где $\rightrightarrows$ используется для обозначения равномерной сходимости. Напомним свойства [15, (4.12), (4.13)]. Упомянутые положения в сочетании с (2.16) позволяют ввести операторы программного поглощения [15, раздел 5] с «хорошими» топологическими свойствами.

§ 3. Операторы программного поглощения

В настоящей работе исследуются замкнутые ДИ сближения–уклонения, то есть ДИ, у которых и целевое множество, и множество, определяющее фазовые ограничения, замкнуты в $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$. Поэтому, следуя построениям [15, раздел 5], имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{A}[M](F) \triangleq \{(t,x) \in F \mid \forall \nu \in \mathcal{E}_t \;\; \exists \eta \in \Pi_t(\nu) \; \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] \colon ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M)\\ \& \, ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in F \;\; \forall \xi \in [t, \vartheta])\} \;\; \forall M \in \mathcal{F} \; \forall F \in \mathcal{F}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Фиксируя $M \in \mathcal{F}$, мы получаем оператор программного поглощения (ОПП), значения которого определяются в (3.1). Напомним простейшие свойства ОПП (подробнее см. в [15, раздел 5]). Ясно, что

$$M \cap F \subset \mathbb{A}[M](F) \;\; \forall M \in \mathcal{F} \;\; \forall F \in \mathcal{F}. \tag{3.2}$$

Кроме того, из [15, (6.3)] вытекает в частности, что $\forall M_1 \in \mathcal{F} \; \forall F_1 \in \mathcal{F} \; \forall M_2 \in \mathcal{F} \; \forall F_2 \in \mathcal{F}$

$$((M_1 \subset M_2) \, \& \, (F_1 \subset F_2)) \Rightarrow (\mathbb{A}[M_1](F_1) \subset \mathbb{A}[M_2](F_2)). \tag{3.3}$$

Заметим, что из [15, предложение 7.1] следует, в частности, что

$$\mathbb{A}[M](F) \in \mathcal{F} \;\; \forall M \in \mathcal{F} \;\; \forall F \in \mathcal{F}. \tag{3.4}$$

Замечание 1. Для проверки (3.4) в [15, раздел 7] достаточно полагать $N = T \times \mathbb{R}^n$; тогда семейство $\mathcal{F}|_N$ из [15, раздел 7] совпадает с $\mathcal{F}$. Теперь свойство (3.4) непосредственно следует из [18, предложения 7.1].

□

Наконец, отметим вариант свойства [15, предложения 5.2] в рассматриваемом сейчас частном случае: если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и при этом $((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \, \& \, ((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F)$, то $M \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}$ и, самое главное,

$$(\mathbb{A}[M_i](F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}[M](F). \tag{3.5}$$

Заметим, что в [15] рассматривались более общие варианты ОПП, касающиеся, в частности, преобразования множеств с замкнутыми сочетаниями (имеются в виду множества — элементы семейства $\mathfrak{F}$ [15, предложение 5.3]). В настоящей работе данный случай не обсуждается.

§ 4. Метод итераций, 1

Используем традиционное определение степеней оператора, действующего в заданном непустом множестве X: если $\mathbf{a} \in X^X$,то

$$(\mathbf{a}^k)_{k \in \mathbb{N}_0} \colon \mathbb{N}_0 \to X^X \tag{4.1}$$

однозначно определяется следующими условиями (здесь $\circ$ — символ композиции отображений):

$$(\mathbf{a}^0(x) \triangleq x \;\; \forall x \in X) \, \& \, (\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a} \circ \mathbf{a}^k \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0). \tag{4.2}$$

Мы применяем (см. (3.4)) сейчас (4.1), (4.2) в следующих случаях: $X = \mathcal{F}$, $\mathbf{a} = \mathbb{A}[M]$, где $M \in \mathcal{F}$. Итак, полагаем, что $W_k(M,N) \triangleq \mathbb{A}[M]^k\ (N)\ \ \forall M \in \mathcal{F}\ \ \forall N \in \mathcal{F}$. Иными словами, при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$ последовательность

$$(W_k(M,N))_{k\in\mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0 \to \mathcal{F} \tag{4.3}$$

такова, что

$$(W_0(M,N) \triangleq N)\,\&\,(W_{s+1}(M,N) = \mathbb{A}[M](W_s(M,N))\ \ \forall s \in \mathbb{N}_0); \tag{4.4}$$

кроме того, получаем, что

$$W(M,N) \triangleq \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} W_k(M,N) \in \mathcal{F}. \tag{4.5}$$

Отметим простые следствия (4.3)–(4.5) и положений предыдущего раздела. Так, с учетом (3.3) получаем, что $\forall M_1 \in \mathcal{F}\ \ \forall N_1 \in \mathcal{F}\ \ \forall M_2 \in \mathcal{F}\ \ \forall N_2 \in \mathcal{F}$

$$((M_1 \subset M_2)\,\&\,(N_1 \subset N_2)) \Rightarrow (W_s(M_1,N_1) \subset W_s(M_2,N_2)\ \ \forall s \in \mathbb{N}_0). \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6) получаем следствие: $\forall M_1 \in \mathcal{F}\ \ \forall N_1 \in \mathcal{F}\ \ \forall M_2 \in \mathcal{F}\ \ \forall N_2 \in \mathcal{F}$

$$((M_1 \subset M_2)\,\&\,(N_1 \subset N_2)) \Rightarrow (W(M_1,N_1) \subset W(M_2,N_2)).$$

Отметим еще одно очевидное свойство:

$$M \cap N \subset W(M,N)\ \ \forall M \in \mathcal{F}\ \ \forall N \in \mathcal{F}. \tag{4.7}$$

Замечание 2. Для полноты изложения проверим (4.7), фиксируя $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$. В самом деле, из (4.4) имеем вложение $M \cap N \subset W_0(M,N)$. Пусть $k \in \mathbb{N}_0$ таково, что $M \cap N \subset W_k(M,N)$. При этом в силу (4.4) $W_{k+1}(M,N) = \mathbb{A}[M](W_k(M,N))$, где согласно (3.2), (4.3) $M \cap W_k(M,N) \subset \mathbb{A}[M](W_k(M,N))$. Тогда $M \cap W_k(M,N) \subset W_{k+1}(M,N)$, где $M \cap N = M \cap (M \cap N) \subset W_k(M,N) \cap M$, по выбору $k \in \mathbb{N}_0$, а потому $M \cap N \subset W_{k+1}(M,N)$. Итак, $(M \cap N \subset W_k(M,N)) \Rightarrow (M \cap N \subset W_{k+1}(M,N))$. Поскольку k выбралось произвольно, по индукции установлено, что $M \cap N \subset W_s(M,N)\ \ \forall s \in \mathbb{N}_0$. С учетом (4.5) получаем требуемое вложение $M \cap N \subset W(M,N)$. □

В упомянутых построениях в качестве (M,N) будем использовать $(\mathbf{M},\mathbf{N})$ или $(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon))$ при $\varepsilon \in]0,\infty[$ (в силу (2.7) имеем $S_0(\mathbf{M},0) = \mathbf{M}$ и $S_0(\mathbf{N},0) = \mathbf{N}$). Из (2.7) и (4.7) следует, что

$$\mathbf{M} \subset W(\mathbf{M},\mathbf{N}). \tag{4.8}$$

Кроме того, из (2.8) и (4.7) получаем, что (см. также (4.8))

$$S_0(\mathbf{M},\varepsilon) \subset W(\mathbf{S}_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon))\ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+. \tag{4.9}$$

Здесь же отметим свойство, уже используемое фактически в замечании 2:

$$S_0(\mathbf{M},\varepsilon) = S_0(\mathbf{M},\varepsilon) \cap S_0(\mathbf{N},\varepsilon) \subset W_j(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon))\ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \ \forall j \in \mathbf{N}_0;$$

с учетом (2.7) и (4.9) получаем, что

$$\Sigma_0(t,x) \triangleq \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t,x) \in W(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)\ \ \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \tag{4.10}$$

(в самом деле, в силу (2.5) $T \times \mathbb{R}^n$ есть объединение всех множеств $S_0(\mathbf{M},\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$; теперь следует учесть (4.9)). В силу (4.10) имеем, что при $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено значение

$$\varepsilon_0(t,x) \triangleq \inf(\Sigma_0(t,x)) \in \mathbb{R}_+. \tag{4.11}$$

Используя (4.11), мы вводим функцию ε_0, действующую из $T \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}_+$ по правилу (4.11).

Предложение 1. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\varepsilon_0(t_*, x_*) \in \Sigma_0(t_*, x_*)$ *и, таким образом,* $\varepsilon_0(t_*, x_*)$ *есть наименьший элемент множества* $\Sigma_0(t_*, x_*)$.

Доказательство фактически повторяет обоснование, полученное в [13, предложение 1]. Отметим в этой связи, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$ множества $W(M, N)$ и $\mathcal{W}(M, N)$ работы [13] совпадают (см. [14, (4.3)] и [17]). Утверждение предложения извлекается также из следующего свойства: если

$$(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}, (N_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}, M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n), N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \tag{4.12}$$

и при этом

$$((M_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow M) \,\&\, ((N_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow N), \tag{4.13}$$

то $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и

$$(W(M_i, N_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow W(M, N). \tag{4.14}$$

Данное свойство (см. [15, теорема 6.1]) наследуется от (3.5); кроме того, отметим одно «промежуточное» (между (3.5) и (4.14)) положение. Итак, если $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$, M и N удовлетворяют (4.12) и (4.13), то

$$(W_k(M_i, N_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow W_k(M, N) \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

(напомним, что используемые здесь ОПП являются сужениями на $\mathcal{F}$ соответствующих ОПП работы [15]; кроме того, здесь мы ограничиваемся использованием в качестве M_i, $i \in \mathbb{N}$, и M только замкнутых множеств). Следуя на идейном уровне [15, (10.22)], введем при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$, $(t, x) \in W(M, N)$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$ множество

$$\begin{gathered}\pi^{(W)}_{t,x}\langle \nu \mid M, N\rangle \triangleq \{\eta \in \Pi_t(\nu) \mid \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] \colon ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \,\&\\ ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in W(M, N) \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta])\}\end{gathered} \tag{4.15}$$

(заметим, что при вышеупомянутых условиях на выбор M, N, (t, x) и ν множество (4.15) совпадает с [15, (10.22)]). Из (4.5), (4.15) и [15, предложение 10.3] вытекает, что

$$\pi^{(W)}_{t,x}\langle \cdot \mid M, N\rangle = (\pi^{(W)}_{t,x}\langle \nu \mid M, N\rangle)_{\nu\in\mathcal{E}_t} \in \tilde{A}^{\Pi}_t \ \ \forall M \in \mathcal{F} \ \ \forall N \in \mathcal{F} \ \ \forall (t, x) \in W(M, N). \tag{4.16}$$

В связи с проблемой разрешимости задачи (M, N)-наведения в классе квазистратегий, где $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$, напомним положение [15, теорема 10.1]. Отметим только, что при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и $(t, x) \in N$ множество

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{M,N}(t, x) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] \colon&\\ ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \,\&\, ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in N \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta])\}&\end{aligned} \tag{4.17}$$

совпадает с [15, (10.20)]. При этом (см. [15, следствие 10.2])

$$\tilde{\Pi}_t(\pi^{(W)}_{t,x}\langle \cdot \mid M, N\rangle) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t, x) \ \ \forall M \in \mathcal{F} \ \ \forall N \in \mathcal{F} \ \ \forall (t, x) \in W(M, N). \tag{4.18}$$

Кроме того, из [15, теорема 10.1] вытекает, что

$$W(M, N) = \{(t, x) \in N \mid \exists \alpha \in \tilde{A}_t \colon \tilde{\Pi}_t(\alpha) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t, x)\}. \tag{4.19}$$

Функционал качества. Заметим, что при $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ отображение $t \mapsto \rho((t, x(t)); \mathbf{N})\colon [t_*, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$ непрерывно и достигает максимума. С учетом этого полагаем, что

$$\omega(t_*, x(\cdot), \vartheta) \triangleq \sup(\{\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M});\ \max_{t_* \leqslant t \leqslant \vartheta} \rho((t, x(t)); \mathbf{N})\}); \tag{4.20}$$

ясно, что $\omega(t_*, x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+$. Заметим здесь же, что при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ функция $\vartheta \mapsto \omega(t_*, x(\cdot), \vartheta)\colon [t_*, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$ непрерывна; см. [13, раздел 3]. Поэтому при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ определено значение

$$\gamma_{t_*}(x(\cdot)) \triangleq \min_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \omega(t_*, x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \tag{4.21}$$

Тем самым при $t_* \in T$ определен функционал γ_{t_*} на $C_n([t_*, \vartheta_0])$ со значениями (4.21). Всюду в дальнейшем при $t \in T$ через $\| \cdot \|_t^{(\mathbf{C})}$ обозначаем норму равномерной сходимости на $C_n([t, \vartheta_0])$:

$$\|x(\cdot)\|_t^{(\mathbf{C})} \triangleq \max_{\xi \in [t, \vartheta_0]} \|x(\xi)\| \ \ \forall x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0]);$$

Данная норма порождает метрику равномерной сходимости.

Предложение 2. Если $t_* \in T$, $x'(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $x''(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, то

$$|\gamma_{t_*}(x'(\cdot)) - \gamma_{t_*}(x''(\cdot))| \leqslant \|x'(\cdot) - x''(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})}. \tag{4.22}$$

Доказательство. Заметим, что при $(t_1, x_1) \in T \times \mathbb{R}^n$, $(t_2, x_2) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $Y \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$

$$|\rho((t_1, x_1); Y) - \rho((t_2, x_2); Y)| \leqslant \rho((t_1, x_1), (t_2, x_2)). \tag{4.23}$$

Если же $t \in [t_*, \vartheta_0]$, то в силу (2.3)

$$\rho((t, x'(t)), (t, x''(t))) = \|x'(t) - x''(t)\| \leqslant \|x'(\cdot) - x''(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})}. \tag{4.24}$$

Тогда, в частности, имеем из (4.23), (4.24), что при $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$|\rho((\vartheta, x'(\vartheta)); \mathbf{M}) - \rho((\vartheta, x''(\vartheta)); \mathbf{M})| \leqslant \|x'(\cdot) - x''(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})}. \tag{4.25}$$

$$|\rho((\vartheta, x'(\vartheta)); \mathbf{N}) - \rho((\vartheta, x''(\vartheta)); \mathbf{N})| \leqslant \|x'(\cdot) - x''(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})}. \tag{4.26}$$

Из (4.26) вытекает, что при $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$|\max_{t_* \leqslant t \leqslant \vartheta} \rho((t, x'(t)); \mathbf{N}) - \max_{t_* \leqslant t \leqslant \vartheta} \rho((t, x''(t)); \mathbf{N})| \leqslant \|x'(\cdot) - x''(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})}. \tag{4.27}$$

Из (4.20), (4.25) и (4.27) вытекает, что

$$|\omega(t_*, x'(\cdot), \vartheta) - \omega(t_*, x''(\cdot), \vartheta)| \leqslant \|x'(\cdot) - x''(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})} \ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{4.28}$$

Теперь из (4.21) и (4.28) получаем требуемое неравенство (4.22). □

Из предложения 2 следует, в частности, что при $t_* \in T$ функционал

$$x(\cdot) \mapsto \gamma_{t_*}(x(\cdot))\colon C_n([t_*, \vartheta_0]) \to \mathbb{R}_+ \tag{4.29}$$

является непрерывным в топологии равномерной сходимости. Тогда (см. (2.16)) получаем, что при $t_* \in T$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$ функционал $\eta \mapsto \gamma_{t_*}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta))\colon \mathcal{H}_{t_*} \to \mathbb{R}_+$ непрерывен в (метризуемой) $*$-слабой топологии множества $\mathcal{H}_{t_*}$, а, стало быть, и ограничен по свойствам непрерывного образа компакта. В частности, при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено (конечное) значение

$$v(t_*, x_*) \triangleq \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{\eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\alpha)} \gamma_{t_*}(\varphi(\cdot, t_*, x_* \eta)) \in \mathbb{R}_+; \tag{4.30}$$

отметим также, что согласно (4.10) и предложению 1

$$(t_*, x_*) \in W(\mathbf{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_*)), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0(t_*, x_*))), \tag{4.31}$$

а потому согласно (4.16) определена квазипрограмма

$$\pi^0_{t_*, x_*} \triangleq \pi^{(W)}_{t_*, x_*} \langle \cdot | \mathbf{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_*)), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0(t_*, x_*)) \rangle \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}. \tag{4.32}$$

Предложение 3. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$v(t_*, x_*) = \varepsilon_0(t_*, x_*) = \sup_{\eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\pi^0_{t_*, x_*})} \gamma_{t_*}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)). \tag{4.33}$$

Доказательство Фиксируем позицию (t_*, x_*), получая (4.31). Согласно (4.18), (4.32) для

$$(M_* \triangleq \mathbf{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_*))) \,\&\, (N_* \triangleq \mathbf{S}_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0(t_*, x_*))) \tag{4.34}$$

имеем $M_* \in \mathcal{F}$ и $N_* \in \mathcal{F}$ в силу (2.6), (2.8). При этом (см. (4.31), (4.34)) $(t_*, x_*) \in W(M_*, N_*)$. Из (4.17) следует, что

$$\begin{gathered} \mathcal{S}_{M_*, N_*}(t_*, x_*) = \{\eta \in \mathcal{H}_{t_*} \mid \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]\colon ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in M_*) \,\& \\ ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in N_* \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta])\}. \end{gathered} \tag{4.35}$$

Отметим, что согласно (4.18), (4.31) и (4.32)

$$\tilde{\Pi}_{t_*}(\pi^0_{t_*, x_*}) \subset \mathcal{S}_{M_*, N_*}(t_*, x_*) \tag{4.36}$$

(в самом деле, согласно (4.32) и (4.34) $\pi^0_{t_*, x_*} = \pi^{(W)}_{t_*, x_*} \langle \cdot \mid M_*, N_* \rangle$). При этом (см. (4.35), (4.36))

$$\begin{gathered} \forall \eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\pi^0_{t_*, x_*}) \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]\colon ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in M_*) \,\& \\ ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in N_* \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{gathered} \tag{4.37}$$

Из (4.20), (4.37) и определения M_*, N_* вытекает, что (см. (4.34))

$$\forall \eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\pi^0_{t_*, x_*}) \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]\colon \omega(t_*, \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta), \vartheta) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*). \tag{4.38}$$

Как следствие получаем (см. (4.21), (4.38)), что

$$\gamma_{t_*}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*) \ \ \forall \eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\pi^0_{t_*, x_*}). \tag{4.39}$$

С другой стороны, из (4.10), (4.11) следует, что при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ \varepsilon < \varepsilon_0(t_*, x_*)$,

$$(t_*, x_*) \notin W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon)).$$

Из (4.39) вытекает, что справедливо неравенство

$$a_* \triangleq \sup_{\eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\pi^0_{t_*,x_*})} \gamma_{t_*}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*). \tag{4.40}$$

Покажем, что на самом деле в (4.40) имеет место равенство. Допустим противное: пусть (при $a_* \in \mathbb{R}_+$)

$$a_* < \varepsilon_0(t_*, x_*). \tag{4.41}$$

При этом (см. (4.40)) $\gamma_{t_*}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) \leqslant a_* \quad \forall \eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\pi^0_{t_*,x_*})$. С учетом (4.21) получаем, что

$$\forall \eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\pi^0_{t_*,x_*}) \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \colon \omega(t_*, \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta), \vartheta) \leqslant a_*. \tag{4.42}$$

В свою очередь, из (2.5), (4.20) и (4.42) вытекает, что

$$\begin{gathered} \forall \eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\pi^0_{t_*,x_*}) \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \colon ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \,\& \\ ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in S_0(\mathbf{N}, a_*) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{gathered} \tag{4.43}$$

С учетом (4.17) получаем, однако, что определено множество $\mathcal{S}_{S_0(\mathbf{M},a_*),S_0(\mathbf{N},a_*)}(t_*, x_*)$, и при этом (см. (4.43)) $\tilde{\Pi}_{t_*}(\pi^0_{t_*,x_*}) \subset \mathcal{S}_{S_0(\mathbf{M},a_*),S_0(\mathbf{N},a_*)}\,(t_*, x_*)$. Из (2.13), (4.19) и (4.32) получаем теперь, что

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*)). \tag{4.44}$$

Замечание 3. Строго говоря, для проверки (4.44) следует еще убедиться в том, что $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, a_*)$. Для этого, учитывая (2.12), выберем произвольно $\eta_* \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\pi^0_{t_*,x_*})$, получая, в частности, в силу (4.43) для некоторого $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_0]$, что

$$(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_*)) \in S_0(\mathbf{N}, a_*) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{4.45}$$

В силу (4.45) имеем, что $(t_*, x_*) = (t_*, \varphi(t_*, t_*, x_*, \eta_*)) \in S_0(\mathbf{N}, a_*)$, поскольку $t_* \in [t_*, \vartheta_*]$. $\square$

Согласно (4.10) и (4.44) получаем теперь, что $a_* \in \Sigma_0(t_*, x_*)$, а тогда в силу (4.11) $\varepsilon_0(t_*, x_*) \leqslant a_*$, что противоречит (4.41). Полученное противоречие доставляет требуемое свойство: $a_* = \varepsilon_0(t_*, x_*)$, то есть (см. (4.30), (4.32), (4.40))

$$v(t_*, x_*) \leqslant a_* = \varepsilon_0(t_*, x_*). \tag{4.46}$$

Осталось проверить равенство $v(t_*, x_*) = \varepsilon_0(t_*, x_*)$. Допустим противное, а именно, $v(t_*, x_*) < \varepsilon_0(t_*, x_*)$ (учитываем (4.46)). Полагая

$$\beta_* \triangleq \frac{v(t_*, x_*) + \varepsilon_0(t_*, x_*)}{2},$$

получаем для $\beta_* \in \mathbb{R}_+$ следующую «вилку»

$$v(t_*, x_*) < \beta_* < \varepsilon_0(t_*, x_*). \tag{4.47}$$

С учетом (4.29) и (4.47) для некоторой квазистратегии $\alpha_* \in \tilde{A}_{t_*}$ имеем, что

$$\sup_{\eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\alpha_*)} \gamma_{t_*}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) < \beta_*.$$

Опять получаем, что согласно (4.21) $\forall \eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\alpha_*) \ \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \colon \omega(t_*, \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta), \vartheta) < \beta_*$.

С учетом (2.5) и (4.20) получаем теперь, что $\forall \eta \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\alpha_*) \ \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in S_0(\mathbf{M}, \beta_*)) \,\&\, ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in S_0(\mathbf{N}, \beta_*) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta]). \tag{4.48}$$

В силу (2.12) и (4.48) имеем по аналогии с замечанием 3 свойство $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \beta_*)$ и при этом (см.(4.18))

$$\tilde{\Pi}_{t_*}(\alpha_*) \subset S_{S_0(\mathbf{M},\beta_*),S_0(\mathbf{N},\beta_*)}(t_*, x_*). \tag{4.49}$$

Из (4.19) и (4.49) вытекает по выбору α_*, что $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, \beta_*), S_0(\mathbf{N}, \beta_*))$, а тогда (см. (4.10)) $\beta_* \in \Sigma_0(t_*, x_*)$ и согласно (4.11) $\varepsilon_0(t_*, x_*) \leqslant \beta_*$, что невозможно в силу (4.47). Полученное противоречие означает, что на самом деле $v(t_*, x_*) = \varepsilon_0(t_*, x_*)$, чем и завершается (см. (4.40), (4.46)) проверка (4.33). □

Итак, значение функции ε_0 совпадает с минимаксом γ-платы в классах квазистратегий и квазипрограмм (см.(2.13), (4.32), предложение 3). При этом (4.32) определяет структуру оптимальной квазипрограммы для каждой позиции игры.

§ 5. Секвенциальная реализация функции ε_0

В настоящем параграфе мы указываем одну последовательность функций на $T \times \mathbb{R}^n$, поточечно сходящуюся к ε_0. С этой целью полагаем, что

$$\Sigma_0^{(s)}(t, x) \triangleq \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t, x) \in W_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon))\} \ \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

Предложение 4. *Если $s \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то $\Sigma_0(t_*, x_*) \subset \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*)$.*

Доказательство Фиксируем $s \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Пусть $\varepsilon_* \in \Sigma_0(t_*, x_*)$. Тогда $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$ и при этом $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*))$, где $W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)) \subset$ $\subset W_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*))$ согласно (4.5). Как следствие

$$(t_*, x_*) \in W_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)). \tag{5.2}$$

Из (5.1) и (5.2) вытекает, что $\varepsilon_* \in \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*)$. Тем самым установлено, что $\Sigma_0(t_*, x_*) \subset$ $\subset \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*)$. □

Из предложений 1 и 4 получаем, что

$$\varepsilon_0(t, x) \in \Sigma_0^{(s)}(t, x) \ \ \forall s \in \mathbb{N}_0 \ \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{5.3}$$

Тогда (см. (5.3)) при $s \in \mathbb{N}_0$ и $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ имеем, что $\Sigma_0^{(s)}(t, x) \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$, а потому определено значение

$$\varepsilon_0^{(s)}(t, x) \triangleq \inf(\Sigma_0^{(s)}(t, x)) \in \mathbb{R}_+. \tag{5.4}$$

С учетом (5.4) при $s \in \mathbb{N}_0$ определена функция $\varepsilon_0^{(s)} \in \mathcal{R}_+[\,T \times \mathbb{R}^n]$, где (здесь и ниже) $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ есть множество всех неотрицательных в/з функций на $T \times \mathbb{R}^n$; значения $\varepsilon_0^{(s)}$ определяются посредством (5.4). С учетом (5.3) и (5.4) получаем, что

$$\varepsilon_0^{(s)} \leqq \varepsilon_0 \ \ \forall s \in \mathbb{N}_0, \tag{5.5}$$

где $\leqq$ — обычная поточечная упорядоченность на множестве $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$.

Предложение 5. *При* $s \in \mathbb{N}_0$ *и* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *имеет место* $\varepsilon_0^{(s)}(t,x) \in \Sigma_0^{(s)}(t,x)$.

Доказательство аналогично обоснованию [13, предложение 5].

В силу (5.5) получаем, что при $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$ множество $\{\varepsilon_0^{(k)}(t,x)\colon k \in \mathbb{N}_0\}$ непусто и ограничено, так как $\{\varepsilon_0^{(k)}(t,x)\colon k \in \mathbb{N}_0\} \subset [0, \varepsilon_0(t,x)]$, а потому определена его (конечная) точная верхняя грань:

$$\sup(\{\varepsilon_0^{(k)}(t,x)\colon k \in \mathbb{N}_0\}) \in [0, \varepsilon_0(t,x)]. \tag{5.6}$$

Предложение 6. *Если* $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\varepsilon_0(t,x) = \sup(\{\varepsilon_0^{(k)}(t,x)\colon k \in \mathbb{N}_0\})$.

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Полагаем для краткости, что $\Xi \triangleq \triangleq \{\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*)\colon k \in \mathbb{N}_0\}$, получая, что $\Xi \in \mathcal{P}'([0, \varepsilon_0(t_*, x_*)])$. Пусть, кроме того, $\varepsilon_* \triangleq \sup(\Xi)$; тогда $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$ и при этом (см. (5.6))

$$\varepsilon_* \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*). \tag{5.7}$$

Покажем, что на самом деле $\varepsilon_* = \varepsilon_0(t_*, x_*)$. Действительно, допустим противное; тогда (см. (5.7)) $\varepsilon_* < \varepsilon_0(t_*, x_*)$, а потому согласно (4.11) $\varepsilon_* \notin \Sigma_0(t_*, x_*)$. Из (4.10) вытекает, что

$$(t_*, x_*) \notin W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)).$$

С учетом (4.5) для некоторого $r \in \mathbb{N}_0$ имеем свойство

$$(t_*, x_*) \notin W_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)). \tag{5.8}$$

Вместе с тем (см. (5.5)) $\varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*)$, где

$$\varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*) \in \Sigma_0^{(r)}(t_*, x_*). \tag{5.9}$$

Из (5.1) и (5.9) вытекает, в частности, что

$$(t_*, x_*) \in W_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*)), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*))), \tag{5.10}$$

где $\varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*) \leqslant \varepsilon_*$, поскольку $\varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*) \in \Xi$.

Однако, тогда $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*)) \subset S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)$ и $S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*)) \subset S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)$; см. (2.5). Поэтому согласно (4.6)

$$W_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*)), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*))) \subset W_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)), \tag{5.11}$$

а тогда из (5.10) и (5.11) следует, что $(t_*, x_*) \in W_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*))$ вопреки (5.8). Полученное противоречие доказывает требуемое равенство, а тогда $\varepsilon_0(t_*, x_*) = \sup(\Xi)$, что и требовалось доказать. □

Предложение 7. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *и* $s \in \mathbb{N}_0$, *то* $\Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*) = [\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*), \infty[$.

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $s \in \mathbb{N}_0$. Тогда в силу (5.4)

$$\Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*) \subset [\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*), \infty[. \tag{5.12}$$

Выберем произвольно $\varepsilon^* \in [\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*), \infty[$, получая, в частности, $\varepsilon^* \in \mathbb{R}_+$. При этом $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon^*) \in \mathcal{F}$, $S_0(\mathbf{N}, \varepsilon^*) \in \mathcal{F}$ и согласно (2.5)

$$(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*)) \subset S_0(\mathbf{M}, \varepsilon^*)) \,\&\, (S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*)) \subset S_0(\mathbf{N}, \varepsilon^*)).$$

Поэтому (см. (4.6)) получаем вложение

$$W_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*)), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*))) \subset W_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon^*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon^*)), \tag{5.13}$$

где в силу (5.1) и предложения 5 $(t_*, x_*) \in W_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*)), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*)))$. С учетом (5.13) получаем, что $(t_*, x_*) \in W_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon^*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon^*))$, а тогда в силу (5.1) выполнено включение $\varepsilon^* \in \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*)$. Поскольку выбор ε^* был произвольным, установлено, что $[\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*), \infty[\subset \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*)$, а потому (см. (5.12)) $\Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*) = [\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*), \infty[$. □

Предложение 8. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\Sigma_0(t_*, x_*) = [\varepsilon_0(t_*, x_*), \infty[$.

Доказательство подобно в логическом отношении обоснованию предыдущего предложения.

Предложение 9. *Если* $b \in \mathbb{R}_+$ *и* $k \in \mathbb{N}_0$, *то*

$$W_k(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b)) = (\varepsilon_0^{(k)})^{-1}([0, b]). \tag{5.14}$$

Доказательство. Зафиксируем $b \in \mathbb{R}_+$ и $k \in \mathbb{N}_0$. Пусть $(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b))$. Тогда $b \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*)$ согласно (5.1), а потому (см. (5.4)) $\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*) \leqslant b$ и, следовательно, $(t_*, x_*) \in (\varepsilon_0^{(k)})^{-1}([0, b])$. Тем самым установлено вложение

$$W_k(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b)) \subset (\varepsilon_0^{(k)})^{-1}([0, b]). \tag{5.15}$$

Пусть теперь $(t^*, x^*) \in (\varepsilon_0^{(k)})^{-1}([0, b])$. Тогда $(t^*, x^*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и при этом $\varepsilon_0^{(k)}(t^*, x^*) \leqslant b$. Напомним, однако, что $\Sigma_0^{(k)}(t^*, x^*) = [\varepsilon_0^{(k)}(t^*, x^*), \infty[$. Поэтому $b \in \Sigma_0^{(k)}(t^*, x^*)$ и согласно (5.1), $(t^*, x^*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b))$. Тем самым установлено вложение

$$(\varepsilon_0^{(k)})^{-1}([0, b]) \subset W_k(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b)),$$

а тогда с учетом (5.15) получаем требуемое равенство (5.14). □

Предложение 10. *Если* $b \in \mathbb{R}_+$, *то* $W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b)) = (\varepsilon_0)^{-1}([0, b])$.

Доказательство. Фиксируем $b \in \mathbb{R}_+$. Пусть $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b))$. Тогда в силу (4.10) получаем, что $b \in \Sigma_0(t_*, x_*)$ и согласно (4.11) $\varepsilon_0(t_*, x_*) \leqslant b$, а потому $(t_*, x_*) \in (\varepsilon_0)^{-1}([0, b])$. Вложение

$$W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b)) \subset (\varepsilon_0)^{-1}([0, b]) \tag{5.16}$$

установлено. Пусть $(t^*, x^*) \in (\varepsilon_0)^{-1}([0, b])$. Тогда $(t^*, x^*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и при этом $\varepsilon_0(t^*, x^*) \leqslant b$. Поскольку $\Sigma_0(t^*, x^*) = [\varepsilon_0(t^*, x^*), \infty[$, то $b \in \Sigma_0(t^*, x^*)$, а тогда в силу (4.10), $(t^*, x^*) \in W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b))$. Итак, установлено, что $(\varepsilon_0)^{-1}([0, b]) \subset W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b))$, откуда с учетом (5.16) получаем требуемое равенство. □

Предложение 11. *Если* $k \in \mathbb{N}_0$, *то* $\varepsilon_0^{(k)} \leqq \varepsilon_0^{(k+1)}$.

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Сравним $\varepsilon_*^{(k)} \triangleq \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+$ и $\varepsilon_*^{(k+1)} \triangleq \varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+$. Учтем, что в силу предложения 5, $\varepsilon_*^{(k+1)} \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_*)$. Поэтому в силу (5.1) $(t_*, x_*) \in W_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*^{(k+1)}), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*^{(k+1)}))$, где

$$W_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*^{(k+1)}), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*^{(k+1)})) \subset W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*^{(k+1)}), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*^{(k+1)}))$$

согласно (4.4). Поэтому

$$(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*^{(k+1)}), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*^{(k+1)})). \tag{5.17}$$

В силу (5.1) и (5.17) имеем, что $\varepsilon_*^{(k+1)} \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*)$, а потому (см.(5.4)) $\varepsilon_*^{(k)} \leqslant \varepsilon_*^{(k+1)}$. Итак, $\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*) \leqslant \varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_*)$. Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, установлено, что $\varepsilon_0^{(k)} \leqq \varepsilon_0^{(k+1)}$. □

Из предложений 6 и 11 вытекает, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(t, x))_{k \in \mathbb{N}} \uparrow \varepsilon_0(t, x) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{5.18}$$

Иными словами (см. (5.18)) при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, функциональная последовательность $(\varepsilon_0^{(k)}(t, x))_{k \in \mathbb{N}}$ поточечно сходится к $\varepsilon_0(t, x)$, не убывая. С учетом (4.3), (4.5) и предложений 9 и 10 получаем, что при $b \in \mathbb{R}_+$

$$((\varepsilon_0^{(k)})^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \,\&\, ((\varepsilon_0)^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}). \tag{5.19}$$

С учетом (5.19) имеем свойство полунепрерывности снизу каждой из функций $\varepsilon_0^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}_0$, и ε_0. Введем в этой связи множество

$$\mathfrak{M} \triangleq \{g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \mid g^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F} \quad \forall b \in \mathbb{R}_+\}. \tag{5.20}$$

Из (5.19) и (5.20) вытекает следующее свойство:

$$(\varepsilon_0^{(k)} \in \mathfrak{M} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \,\&\, (\varepsilon_0 \in \mathfrak{M}). \tag{5.21}$$

Введем в рассмотрение функцию $\psi \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, для которой

$$\psi(t, x) \triangleq \rho((t, x); \mathbf{M}) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{5.22}$$

Итак, ψ — функция расстояния до непустого замкнутого множества $\mathbf{M}$. Ясно, что $\psi \in$ $\in C(T \times \mathbb{R}^n)$, где, как обычно, $C(T \times \mathbb{R}^n)$ есть множество всех непрерывных в/з функций на $T \times \mathbb{R}^n$. Через $C_+(T \times \mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех неотрицательных функций из $C(T \times \mathbb{R}^n)$, получая свойство

$$\psi \in C_+(T \times \mathbb{R}^n). \tag{5.23}$$

Из (5.23) вытекает, что $\psi^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F} \quad \forall b \in [0, \infty[$, а потому $\psi \in \mathfrak{M}$. Полагаем далее, что

$$\mathfrak{M}_\psi \triangleq \{g \in \mathfrak{M} \mid g \leqq \psi\}; \tag{5.24}$$

при этом $\psi \in \mathfrak{M}_\psi$, а потому $\mathfrak{M}_\psi \in \mathcal{P}'(\mathfrak{M})$.

Предложение 12. *Справедливо свойство* $\varepsilon_0 \leqq \psi$.

Данное положение следует из [13, предложение 11]. Тем не менее напомним схему рассуждения, имея в виду (4.7). Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $b_* \triangleq \psi(t_*, x_*)$. Тогда $(t_*, x_*) \in \in S_0(\mathbf{M}, b_*)$ согласно (2.5) и (5.22), а потому согласно (4.9)

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*)), \tag{5.25}$$

где $b_* \in \mathbb{R}_+$. Из (4.10) и (5.25) получаем, что $b_* \in \Sigma_0(t_*, x_*)$; как следствие (см. (4.11)) $\varepsilon_0(t_*, x_*) \leqslant b_*$. Поэтому $\varepsilon_0(t_*, x_*) \leqslant \psi(t_*, x_*)$. Коль скоро позиция (t_*, x_*) выбиралась произвольно, требуемое свойство установлено. □

Из предложений 6 и 11 следует, что $\varepsilon_0^{(k)} \leqq \psi \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0$. Далее, из (5.21) и (5.24) получаем, что

$$(\varepsilon_0^{(k)} \in \mathfrak{M}_\psi \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \,\&\, (\varepsilon_0 \in \mathfrak{M}_\psi). \tag{5.26}$$

В (5.26) мы имеем последовательность в/з функций позиции, которая поточечно сходится (см. (5.18)) к функции значения игровой задачи с критерием (4.21). Однако само определение последовательности было дано посредством стабильных мостов Н. Н. Красовского и, по сути, является косвенным. Мы, следуя [13], построим прямую итерационную процедуру, реализующую упомянутую последовательность функций без обращения к стабильным мостам. Однако сначала отметим одно полезное свойство топологического характера.

Заметим, что при $t \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ функция $\tau \longmapsto \psi(\tau, x(\tau))\colon [t, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и, следовательно, достигает максимума (см. (5.22), (5.23)); если, к тому же, $g \in \mathfrak{M}_\psi$, то в силу (5.24) $\tau \longmapsto g(\tau, x(\tau))\colon [t, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$ есть ограниченная функция, для которой $0 \leqslant \sup\limits_{\tau \in [t, \vartheta]} g(\tau, x(\tau)) \leqslant \max\limits_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \psi(\tau, x(\tau)) \ \ \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0]$.

Произвольным функции $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и моменту времени $t_* \in T$ сопоставим функционал $\mathfrak{H}[g; t_*] \in \mathcal{R}_+[C_n([t_*, \vartheta_0])] \times [t_*, \vartheta_0]]$ посредством правила

$$\mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta) \triangleq \sup(\{\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} g(t, x(t)); \psi(\vartheta, x(\vartheta))\}) \ \ \forall x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]; \tag{5.27}$$

данному функционалу соответствуют множества Лебега

$$\tilde{Y}_b[g; t_*] \triangleq \mathfrak{H}[g; t_*]^{-1}([0, b]) \in \mathcal{P}(C_n([t_*, \vartheta_0]) \times [t_*, \vartheta_0]) \ \ \forall b \in \mathbb{R}_+. \tag{5.28}$$

Предложение 13. *Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$ и $b \in \mathbb{R}_+$, то множество $\tilde{Y}_b[g; t_*]$ замкнуто в естественной метризуемой топологии, являющейся произведением топологии равномерной сходимости пространства $C_n([t_*, \vartheta_0])$ и обычной $|\cdot|$ — топологии отрезка $[t_*, \vartheta_0]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$ и $b \in \mathbb{R}_+$ фиксированы. Выберем произвольно последовательность

$$(z_k^*)_{k \in \mathbb{N}}\colon \mathbb{N} \to \tilde{Y}_b[g; t_*] \tag{5.29}$$

и $z^* \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \times [t_*, \vartheta_0]$, для которых

$$((pr_1(z_k^*))_{k \in \mathbb{N}} \rightrightarrows pr_1(z^*)) \,\&\, ((pr_2(z_k^*))_{k \in \mathbb{N}} \to pr_2(z^*)), \tag{5.30}$$

где $pr_1(\cdot)$ и $pr_2(\cdot)$ есть операции проектирования на $C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $[t_*, \vartheta_0]$ соответственно. Полагаем для краткости, что $x_k^*(\cdot) \triangleq pr_1(z_k^*)$ при $k \in \mathbb{N}$, $x^*(\cdot) \triangleq pr_1(z^*)$, $\vartheta_k^* \triangleq pr_2(z_k^*)$ при $k \in \mathbb{N}$, и $\vartheta^* \triangleq pr_2(z^*)$. Тогда (см. (5.30))

$$((x_k^*(\cdot))_{k \in \mathbb{N}} \rightrightarrows x^*(\cdot)) \,\&\, ((\vartheta_k^*)_{k \in \mathbb{N}} \to \vartheta^*). \tag{5.31}$$

Отметим, что согласно (5.27), (5.28) имеем в силу (5.29), что при $k \in \mathbb{N}$

$$(\sup_{t \in [t_*, \vartheta_k^*]} g(t, x_k^*(t)) \leqslant b) \,\&\, (\psi(\vartheta_k^*, x_k^*(\vartheta_k^*)) \leqslant b). \tag{5.32}$$

При этом согласно (5.31) реализуется сходимость $(x_k^*(\vartheta_k^*))_{k\in\mathbb{N}} \to x^*(\vartheta^*)$ (учитываем, что $x^*(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$). В итоге (см. (5.31)) $\rho((\vartheta_k^*, (x_k^*(\vartheta_k^*)), (\vartheta^*, x^*(\vartheta^*))) \to 0$. В силу непрерывности ψ имеем, что $(\psi(\vartheta_k^*, x_k^*(\vartheta_k^*)))_{k\in\mathbb{N}} \to \psi(\vartheta^*, x^*(\vartheta^*))$. Покажем теперь, что

$$\mathfrak{H}[g; t_*](z^*) \leqslant b. \tag{5.33}$$

В самом деле, допустим противное: пусть

$$b < \mathfrak{H}[g; t_*](z^*). \tag{5.34}$$

Тогда в силу (5.27), (5.32) и (5.34) получаем, что $b < \sup\limits_{t \in [t_*, \vartheta^*]} g(t, x^*(t))$. Это означает, в частности, что для некоторого $t^* \in [t_*, \vartheta^*]$

$$b < g(t^*, x^*(t^*)). \tag{5.35}$$

Введем в рассмотрение последовательность $(t_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$ в $[t_*, \vartheta_0]$ по следующему правилу:

$$t_k^* \triangleq \inf(\{\vartheta_k^*; t^*\}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Учтем второе свойство в (5.31), а также то, что

$$t^* = \inf(\{\vartheta^*; t^*\}).$$

При $k \in \mathbb{N}$ имеем оценку

$$|t_k^* - t^*| \leqslant |\vartheta_k^* - \vartheta^*|. \tag{5.36}$$

Поскольку выбор $k \in \mathbb{N}$ был произвольным, из (5.31) и (5.36) получаем теперь, что

$$(t_j^*)_{j\in\mathbb{N}} \to t^*. \tag{5.37}$$

Как следствие, из (5.31) и (5.37) получаем сходимость

$$(\|x_j^*(t_j^*) - x^*(t^*)\|)_{j\in\mathbb{N}} \to 0. \tag{5.38}$$

В этом случае согласно (5.37) и (5.38) имеем

$$(\rho((t_j^*, x_j^*(t_j^*)), (t^*, x^*(t^*))))_{j\in\mathbb{N}} \to 0. \tag{5.39}$$

Вместе с тем согласно (5.32) имеем по выбору $(t_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$ следующее свойство: $g(t_l^*, x_l^*(t_l^*)) \leqslant b$ $\forall l \in \mathbb{N}$. Это означает, что $(t_j^*, x_j^*(t_j^*)) \in g^{-1}([0, b])$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Поскольку $g \in \mathfrak{M}$, то $g^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}$, а тогда в силу (5.39) получаем, что $(t^*, x^*(t^*)) \in g^{-1}([0, b])$. Поэтому $g(t^*, x^*(t^*)) \leqslant b$ вопреки (5.35). Полученное при условии (5.34) противоречие показывает, что само (5.34) невозможно и, следовательно, справедливо (5.33), то есть

$$z^* \in \mathfrak{H}[g; t_*]^{-1}([0, b]). \tag{5.40}$$

Из (5.28) и (5.40) получаем, что $z^* \in \tilde{Y}_b[g; t_*]$. Поскольку последовательность $(z_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ (5.29) и позиция z^* со свойством (5.30) выбирались произвольно, установлено, что $\tilde{Y}_b[g; t_*]$ — замкнутое множество в смысле топологии-произведения на множестве $C_n([t_*, \vartheta_0]) \times [t_*, \vartheta_0]$. $\square$

Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, то полагаем, что

$$\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) \colon \eta \in \Pi_{t_*}(\nu)\}, \tag{5.41}$$

получая при этом непустой компакт в топологии равномерной сходимости (непрерывный образ компакта мер в относительной $*$-слабой топологии).

В связи с (5.41) введем при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ сужение

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu] \triangleq (\mathfrak{H}[g; t_*] \mid \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]) \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]] \tag{5.42}$$

функционала $\mathfrak{H}[g; t_*]$. Из (5.28) и (5.42) вытекает, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $b \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu] \triangleq \mathbf{h}[g; t_*; x_*, \nu]^{-1}([0, b]) = \tilde{Y}_b[g; t_*] \cap (\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]) \tag{5.43}$$

есть множество, замкнутое в естественной топологии произведения топологии равномерной сходимости множества $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и $|\cdot|$-топологии $[t_*, \vartheta_0]$. Данная топология превращает $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$ в компактное пространство. Согласно (5.42) при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ определено (конечное) значение

$$\inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+.$$

Предложение 14. *Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, то*

$$\exists (\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] \colon \quad \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) = \inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta).$$

Доказательство. Фиксируем g, t_*, x_* и ν в соответствии с условиями предложения. Полагаем для краткости, что $h \triangleq \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu]$; тогда в силу (5.42)

$$h \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]].$$

При этом

$$\mathbf{a} \triangleq \inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} h(x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \tag{5.44}$$

Заметим также, что в силу (5.43)

$$\mathfrak{Y}_b \triangleq \mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu] = h^{-1}([0, b]) \quad \forall b \in \mathbb{R}_+. \tag{5.45}$$

Все множества $\mathfrak{Y}_b$, $b \in \mathbb{R}_+$, замкнуты в топологии метризуемого компакта с «единицей» $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$. Далее, при $b \in]\mathbf{a}, \infty[$ для некоторых $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ имеем $h(x(\cdot), \vartheta) < b$ согласно (5.44). Тогда, как следствие, в силу (5.45)

$$\mathfrak{Y}_b \neq \varnothing \quad \forall b \in]\mathbf{a}, \infty[. \tag{5.46}$$

Итак, мы получаем, что $\mathbf{Y} \triangleq \{\mathfrak{Y}_b \colon b \in]\mathbf{a}, \infty[\}$ есть непустое семейство непустых замкнутых п/м метризуемого компакта. Далее, из (5.45) следует, что $\forall b_1 \in]\mathbf{a}, \infty[\ \forall b_2 \in]\mathbf{a}, \infty[$

$$(b_1 \leqslant b_2) \Longrightarrow (\mathfrak{Y}_{b_1} \subset \mathfrak{Y}_{b_2}).$$

Но в этом случае при всяком выборе $k \in \mathbb{N}$ и чисел $b_1 \in]\mathbf{a}, \infty[, \ldots, b_k \in]\mathbf{a}, \infty[$ для некоторого $j \in \overline{1,k}$ (индекса числа наименьшего из $b_1, \ldots, b_k$) получаем, что $\mathfrak{Y}_{b_j} \subset \mathfrak{Y}_{b_l} \quad \forall l \in \overline{1,k}$, а тогда (см. (5.46)) пересечение всех множеств $\mathfrak{Y}_{b_i}$, $i \in \overline{1,k}$, содержит $\mathfrak{Y}_{b_j}$ и потому непусто. Получили, что $\mathbf{Y}$ есть центрированное семейство замкнутых п/м компакта, а тогда

$$\bigcap_{Y \in \mathbf{Y}} Y = \bigcap_{b \in]\mathbf{a}, \infty[} \mathfrak{Y}_b \neq \varnothing.$$

Пусть $(x^*(\cdot), \vartheta^*)$ есть элемент пересечения всех множеств $\mathfrak{Y}_b$, $b \in]\mathbf{a}, \infty[$. Тогда с учетом (5.45) получаем, что $h(x^*(\cdot), \vartheta^*) \leqslant b \quad \forall b \in]\mathbf{a}, \infty[$. Как следствие, $h(x^*(\cdot), \vartheta^*) \leqslant \mathbf{a}$. Однако (см. (5.44)), $\mathbf{a} \leqslant h(x^*(\cdot), \vartheta^*)$. В итоге $h(x^*(\cdot), \vartheta^*) = \mathbf{a}$. С учетом (5.44) и определения h получаем требуемое утверждение. □

С учетом предложения 14 получаем, что определено значение

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \;\; \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n \;\; \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}.$$

Вернемся к (5.27). Напомним, что множества (5.41) компактны в топологии равномерной сходимости. Поскольку ψ есть функция, непрерывная на пространстве позиций (в топологии покоординатной сходимости), то справедливо следующее.

Предложение 15. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\exists c \in \mathbb{R}_+$:

$$\psi(t, x(t)) \leqslant c \;\; \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \;\; \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \;\; \forall t \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{5.47}$$

Доказательство. В силу условия равномерной ограниченности для некоторого $b \in \mathbb{R}_+$ имеет место $\|\varphi(t, t_*, x_*, \eta)\| \leqslant b \;\; \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \;\; \forall t \in [t_*, \vartheta_0]$. С учетом (5.41) получаем тогда, что

$$\|x(t)\| \leqslant b \;\; \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \;\; \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \;\; \forall t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Полагая теперь $b_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) = \psi(t_*, x_*)$, мы по неравенству треугольника получаем при $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и $t \in [t_*, \vartheta_0]$, что

$$\begin{gathered} \psi(t, x(t)) = \rho((t, x(t)); \mathbf{M}) \leqslant \rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) + \rho((t_*, x_*), (t, x(t))) = \\ = \psi(t_*, x_*) + \rho((t, x(t)), (t_*, x_*)) \leqslant \psi(t_*, x_*) + \sup(\{2b; \vartheta_0 - t_0\}) = \\ = b_* + \sup(\{2b; \vartheta_0 - t_0\}). \end{gathered} \tag{5.48}$$

Значение в правой части (5.48) может использоваться в качестве числа c в (5.47). □

Из предложения 15 вытекает в силу (5.24), что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ для некоторого $c_* \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{gathered} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta) \leqslant c_* \\ \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \;\; \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \;\; \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \;\; \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \end{gathered}$$

Тем более (см. (5.42), (5.46)) имеем, что $\forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R} \; \exists c \in \mathbb{R}_+$:

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant c \;\; \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \;\; \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}.$$

С учетом этого получаем, в частности, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ определено значение

$$\sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \; \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n.$$

Используя это простое обстоятельство, полагаем, что оператор

$$\Gamma\colon \mathfrak{M}_\psi \longrightarrow \mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n] \tag{5.49}$$

определяется следующим правилом: при $g\in\mathfrak{M}_\psi$ и $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$

$$\Gamma(g)(t_*,x_*) \triangleq \sup_{\nu\in\mathcal{E}_{t_*}} \min_{(x(\cdot),\vartheta)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)\times[t_*,\vartheta_0]} \mathbf{h}[g;t_*;x_*;\nu](x(\cdot),\vartheta). \tag{5.50}$$

В связи с (5.50) заметим, что в силу (5.41) при $M\in\mathcal{F}$ и $F\in\mathcal{F}$

$$\begin{gathered}\mathbb{A}[M](F) = \{(t_*,x_*)\in F \mid \forall\nu\in\mathcal{E}_{t_*}\ \ \exists x(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)\ \ \exists\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]\colon\\ ((\vartheta,x(\vartheta))\in M)\,\&\,((\xi,x(\xi))\in F\ \ \forall\xi\in[t_*,\vartheta])\}\in\mathcal{F},\end{gathered} \tag{5.51}$$

см. [18, раздел 7]. Разумеется (5.51) может применяться при $M=\mathbf{M}$ и при $M=S_0(\mathbf{M},\varepsilon)$, где $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$.

§ 6. Итерации в функциональном пространстве

В настоящем параграфе мы прежде всего ставим задачу о преобразовании $\varepsilon_0^{(k)}$ в $\varepsilon_0^{(k+1)}$ при $k\in\mathbb{N}_0$, минуя этап построения итераций в пространстве множеств. Оказывается, такое преобразование реализуется посредством Γ (5.49), (5.50): справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если $k\in\mathbb{N}_0$, то справедливо равенство $\varepsilon_0^{(k+1)}=\Gamma(\varepsilon_0^{(k)})$.*

Доказательство. Фиксируем $k\in\mathbb{N}_0$ и рассмотрим (см. (5.26)) функции $\varepsilon_0^{(k)}\in\mathfrak{M}_\psi$, $\varepsilon_0^{(k+1)}\in\mathfrak{M}_\psi$ и $\Gamma(\varepsilon_0^{(k)})\in\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]$. Фиксируем позицию $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$. Сравним $a_*\triangleq\varepsilon_0^{(k+1)}(t_*,x_*)\in\mathbb{R}_+$ и $b_*\triangleq\Gamma(\varepsilon_0^{(k)})(t_*,x_*)\in\mathbb{R}_+$. Тогда $a_*\in\Sigma_0^{(k+1)}(t_*,x_*)$ согласно предложению 14, а потому $(t_*,x_*)\in W_{k+1}(S_0(\mathbf{M},a_*),S_0(\mathbf{N},a_*))$ и, стало быть

$$(t_*,x_*)\in\mathbb{A}[S_0(\mathbf{M},a_*)](W_k(S_0(\mathbf{M},a_*),S_0(\mathbf{N},a_*))).$$

С учетом (5.51) получаем, что $\forall\nu\in\mathcal{E}_{t_*}\ \ \exists(x(\cdot),\vartheta)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)\times[t_*,\vartheta_0]$:

$$((\vartheta,x(\vartheta))\in S_0(\mathbf{M},a_*))\,\&\,((\xi,x(\xi))\in W_k(S_0(\mathbf{M},a_*),S_0(\mathbf{N},a_*))\ \ \forall\xi\in[t_*,\vartheta]).$$

Иными словами (см. (5.1), (5.4), (5.22)) $\forall\nu\in\mathcal{E}_{t_*}\ \ \exists(x(\cdot),\vartheta)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)\times[t_*,\vartheta_0]$:

$$(\psi(\vartheta,x(\vartheta))\leqslant a_*)\,\&\,(\varepsilon_0^{(k)}(t,x(t))\leqslant a_*\ \ \forall t\in[t_*,\vartheta]). \tag{6.1}$$

Из (5.27), (6.1) получаем, как следствие, что $\forall\nu\in\mathcal{E}_{t_*}$

$$\min_{(x(\cdot),\vartheta)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)\times[t_*,\vartheta_0]} \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)};t_*;x_*;\nu](x(\cdot),\vartheta)\leqslant a_*.$$

С учетом (5.50) получаем неравенство

$$b_*\leqslant a_*. \tag{6.2}$$

Выберем произвольно $\hat\nu\in\mathcal{E}_{t_*}$. Тогда по определению b_* имеем из (5.50) для некоторых $\hat x(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\hat\nu)$ и $\hat\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$ неравенство $\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)};t_*;x_*;\hat\nu](\hat x(\cdot),\hat\vartheta)\leqslant b_*$. С учетом (5.27) и (5.42) получаем, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(t,\hat x(t))\leqslant b_*\ \ \forall t\in[t_*,\hat\vartheta])\,\&\,(\psi(\hat\vartheta,\hat x(\hat\vartheta))\leqslant b_*). \tag{6.3}$$

Тогда $b_* \in \Sigma_0^{(k)}(t, \hat{x}(t))\ \ \forall t \in [t_*, \hat{\vartheta}]$; кроме того (см. (6.3)) $(\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, b_*)$ в силу (5.22). Получили, что упорядоченная пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{\vartheta}) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \hat{\nu}) \times [t_*, \vartheta_0]$ такова, что

$$((\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, b_*))\,\&\,((t, \hat{x}(t)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*))\ \ \forall t \in [t_*, \hat{\vartheta}]).$$

Поскольку выбор $\hat{\nu}$ был произвольным, установлено, что

$$\begin{gathered}\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}\ \ \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] \colon ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, b_*))\,\&\\ \&((t, x(t)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*))\ \ \forall t \in [t_*, \hat{\vartheta}]).\end{gathered} \tag{6.4}$$

При этом $(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*))$. В самом деле, $\mathcal{E}_{t_*} \neq \varnothing$. Пусть $\bar{\nu} \in \mathcal{E}_{t_*}$. Тогда в силу (6.4) для некоторых $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \bar{\nu})$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$

$$(t, \bar{x}(t)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*)) \qquad \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}].$$

В частности, $(t_*, \bar{x}(t_*)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*))$, где согласно (5.41) $\bar{x}(t_*) = x_*$. В итоге требуемое свойство установлено, а потому (см. (5.51), (6.4))

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[S_0(\mathbf{M}, b_*)](W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*))).$$

Иными словами, $(t_*, x_*) \in W_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*))$. Это означает (см. (5.1)), что $b_* \in \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_*)$, а тогда согласно (5.4) $a_* = \varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_*) \leqslant b_*$. С учетом (6.2) имеем равенство $a_* = b_*$, то есть $\varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_*) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)})(t_*, x_*)$. Поскольку позиция (t_*, x_*) выбиралась произвольно, требуемое совпадение $\varepsilon_0^{(k+1)}$ и $\Gamma(\varepsilon_0^{(k)})$ установлено. □

Заметим, что $\rho(\cdot; \mathbf{N})$ есть функционал $(t, x) \mapsto \rho((t, x); \mathbf{N}) \colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.

Предложение 16. *Справедливо равенство* $\rho(\cdot; \mathbf{N}) = \varepsilon_0^{(0)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что (см. (4.4))

$$W_0(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon)) = S_0(\mathbf{N}, \varepsilon)\ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+;$$

тогда в силу (5.1) $\Sigma_0^{(0)}(t, x) = \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t, x) \in S_0(\mathbf{N}, \varepsilon)\}\ \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$. Зафиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, получая

$$\Sigma_0^{(0)}(t_*, x_*) = \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \varepsilon)\} = [\varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*), \infty[, \tag{6.5}$$

где $\varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+$. Из (6.5) имеем, что $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*))$, а потому

$$\rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \leqslant \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*). \tag{6.6}$$

С другой стороны, $\rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \in \mathbb{R}_+$ и $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}))$. В силу (6.5) $\rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \in \Sigma_0^{(0)}(t_*, x_*)$, а тогда $\varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*) \leqslant \rho((t_*, x_*); \mathbf{N})$. С учетом (6.6) имеем, что

$$\rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) = \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*).$$

Поскольку позиция (t_*, x_*) выбиралась произвольно, совпадение $\rho(\cdot; \mathbf{N})$ и $\varepsilon_0^{(0)}$ установлено. □

Предложение 17. *Если* $g \in \mathfrak{M}_\psi$, *то* $g \leqq \Gamma(g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Напомним, что $\mathcal{E}_{t_*} \neq \varnothing$. Пусть $\nu_0 \in \mathcal{E}_{t_*}$. Для краткости полагаем, что $\mathbf{h}_0 \triangleq \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu_0]$; тогда

$$\mathbf{h}_0 \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu_0) \times [t_*, \vartheta_0]]$$

и при этом (см. (5.27), (5.42))

$$\mathbf{h}_0(x(\cdot), \vartheta) = \sup(\{\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} g(t, x(t)); \psi(\vartheta, x(\vartheta))\}) \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu_0) \ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (6.7)$$

В силу (5.50) и (6.7) получаем

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu_0) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}_0(x(\cdot), \vartheta) \leqslant \Gamma(g)(t_*, x_*). \quad (6.8)$$

Отметим, что, в частности, в силу (6.7)

$$g(t_*, x(t_*)) \leqslant \mathbf{h}_0(x(\cdot), \vartheta) \quad \forall (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu_0) \times [t_*, \vartheta_0].$$

Тогда, используя (6.8), получаем, конечно, что при некотором $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu_0)$ непременно $g(t_*, x(t_*)) \leqslant \Gamma(g)(t_*, x_*)$. Однако $x(t_*) = x_*$ при $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu_0)$ в силу (5.41). С учетом того, что $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu_0) \neq \varnothing$ получаем неравенство $g(t_*, x_*) \leqslant \Gamma(g)(t_*, x_*)$. Поскольку позиция (t_*, x_*) выбиралась произвольно, получаем, что $g \leqq \Gamma(g)$. □

Предложение 18. *Оператор* Γ *является изотонным:*

$$\forall g_1 \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall g_2 \in \mathfrak{M}_\psi \quad (g_1 \leqq g_2) \Rightarrow (\Gamma(g_1) \leqq \Gamma(g_2)). \quad (6.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $g_1 \in \mathfrak{M}_\psi$ и $g_2 \in \mathfrak{M}_\psi$, для которых $g_1 \leqq g_2$:

$$g_1(t, x) \leqslant g_2(t, x) \ \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (6.10)$$

Тогда (см. (6.10)) получаем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} g_1(t, x(t)) \leqslant \sup_{t \in [t_*, \vartheta]} g_2(t, x(t)) \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0].$$

С учетом (5.27) получаем как следствие при $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, что $\mathfrak{H}[g_1; t_*](x(\cdot), \vartheta) \leqslant \mathfrak{H}[g_2; t_*](x(\cdot), \vartheta)$. Из (5.42) следует теперь тот факт, что при $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\mathbf{h}[g_1; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant \mathbf{h}[g_2; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta). \quad (6.11)$$

В свою очередь, из (6.11) вытекает свойство

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g_1; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant$$
$$\leqslant \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g_2; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}.$$

С учетом (5.50) получаем теперь неравенство $\Gamma(g_1)(t_*, x_*) \leqslant \Gamma(g_2)(t_*, x_*)$. Поскольку позиция (t_*, x_*) была выбрана произвольно, имеем $\Gamma(g_1) \leqq \Gamma(g_2)$, чем и завершается проверка импликации (6.9). □

§ 7. Свойство неподвижной точки

Вернемся к (5.49), (5.50) и рассмотрим некоторые вопросы, связанные с неподвижными точками нашего (программного) оператора Γ. Оказывается, что функция ε_0 (гарантированного результата в классе квазистратегий) является неподвижной точкой Γ. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Функция ε_0 есть неподвижная точка оператора Γ: $\varepsilon_0 = \Gamma(\varepsilon_0)$.*

Доказательство. В силу (5.26) и предложения 17 $\varepsilon_0 \leqq \Gamma(\varepsilon_0)$. Пусть $(t_*, x_*) \in \in T \times \mathbb{R}^n$, $a_* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_*)$ и $b_* \triangleq \Gamma(\varepsilon_0)(t_*, x_*)$. Кроме того, полагаем, что

$$\mathbf{h}_\nu \triangleq \mathbf{h}[\varepsilon_0; t_*; x_*; \nu] \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}. \tag{7.1}$$

Согласно (5.50) и (7.1) в этом случае справедливо равенство

$$b_* = \sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \min_{(x(\cdot),\vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}_\nu(x(\cdot), \vartheta).$$

Отметим, что в силу предложения 1 $a_* \in \Sigma_0(t_*, x_*)$, а потому выполнено включение $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*))$ Поэтому, согласно [13, предложение 16] имеем свойство

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](W(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*))). \tag{7.2}$$

Из (5.51) и (7.2) вытекает, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \,\&\, ((t, x(t)) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*)) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta]). \tag{7.3}$$

Тогда (см. (5.22), (7.3)) $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$:

$$(\psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leqslant a_*) \,\&\, (\varepsilon_0(t, x(t)) \leqslant a_* \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta]). \tag{7.4}$$

В силу (5.27), (5.42) и (7.4) получаем, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$:

$$\mathbf{h}_\nu(x(\cdot), \vartheta) = \mathbf{h}[\varepsilon_0; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant a_*. \tag{7.5}$$

Но в этом случае (см. (5.50), (7.5)) получаем неравенство $b_* = \Gamma(\varepsilon_0)(t_*, x_*) \leqslant a_*$. Однако (см. предложение 17) $a_* \leqslant b_*$, а потому $a_* = b_*$, то есть $\varepsilon_0(t_*, x_*) = \Gamma(\varepsilon_0)(t_*, x_*)$. Поскольку позиция $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ выбиралась произвольно, установлено требуемое равенство $\varepsilon_0 = \Gamma(\varepsilon_0)$. □

Введем в рассмотрение по аналогии с [13, теорема 3]

$$\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_\psi \mid (g = \Gamma(g)) \,\&\, (\rho(\cdot; \mathbf{N}) \leqq g)\}. \tag{7.6}$$

Теорема 3. *Функция ε_0 является наименьшим элементом множества (7.6):*

$$(\varepsilon_0 \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}) \,\&\, (\varepsilon_0 \leqq g \ \ \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}).$$

Доказательство. Напомним, что согласно (5.5) и предложению 16 $\rho(\cdot; \mathbf{N}) = = \varepsilon_0^{(0)} \leqq \varepsilon_0$. Тогда из (5.26), теоремы 2 и (7.6) вытекает, что $\varepsilon_0 \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$. Выберем произвольно $\mathbf{g} \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$; тогда $\mathbf{g}$ обладает свойствами (см. предложение 16);

$$(\mathbf{g} = \Gamma(\mathbf{g})) \,\&\, (\varepsilon_0^{(0)} \leqq \mathbf{g}).$$

Пусть $\mathfrak{N} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid \varepsilon_0^{(k)} \leqq \mathbf{g}\}$. Тогда $0 \in \mathfrak{N}$, а потому $\mathfrak{N} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}_0)$. Пусть $r \in \mathfrak{N}$. Тогда $r \in \mathbb{N}_0$ и $\varepsilon_0^{(r)} \leqq \mathbf{g}$. В силу (5.26) и предложения 18 получаем, что $\Gamma(\varepsilon_0^{(r)}) \leqq \Gamma(\mathbf{g}) = \mathbf{g}$. Но в силу теоремы 1, $\varepsilon_0^{(r+1)} = \Gamma(\varepsilon_0^{(r)})$. В итоге $r + 1 \in \mathfrak{N}$. Получили, что $(0 \in \mathfrak{N}) \,\&\, (k + 1 \in \mathfrak{N} \ \forall k \in \mathfrak{N})$. Тогда (по индукции) $\mathfrak{N} = \mathbb{N}_0$. Это означает, что $\varepsilon_0^{(k)} \leqq \mathbf{g} \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0$. С учетом (5.18) получаем теперь, что $\varepsilon_0 \leqq \mathbf{g}$. Поскольку выбор $\mathbf{g}$ был произвольным, установлено, что $\varepsilon_0 \leqq \mathbf{g} \ \ \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$.Теорема полностью доказана. □

§ 8. Частный случай

Рассмотрим один специальный пример для нашей постановки, а именно, пусть

$$(\mathbf{M} \triangleq T \times \mathcal{M}) \,\&\, (\mathbf{N} \triangleq T \times \mathcal{N}), \tag{8.1}$$

где $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — замкнутые непустые множества в $\mathbb{R}^n$, имеющем стандартную топологию, порожденную евклидовой нормой $\|\cdot\|$. Более того, пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Если $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$, тогда мы введем

$$(\|\cdot\| - \inf)[x; H] \triangleq \inf(\{\|x - h\| : \ h \in H\}) \in [0, \infty[.$$

Получаем следующее свойство: для $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$,

$$\rho((t, x_*); T \times H) = (\|\cdot\| - \inf)[x_*; H] \quad \forall t \in T. \tag{8.2}$$

Таким образом, из (8.1) и (8.2), имеем $\forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$(\rho((t, x); \mathbf{M}) = (\|\cdot\| - \inf)[x; \mathcal{M}]) \,\&\, (\rho((t, x); \mathbf{N}) = (\|\cdot\| - \inf)[x; \mathcal{N}]).$$

Следовательно, установлено, что

$$\omega(t, x(\cdot\,), \theta) = \sup(\{(\|\cdot\| - \inf)[x(\theta); \mathcal{M}]; \ \max_{t \le \xi \le \theta}(\|\cdot\| - \inf)[x(\xi); \mathcal{N}]\})$$
$$\forall t \in T \ \forall x(\cdot\,) \in C_n([t, \vartheta_0]) \ \forall \theta \in [t, \vartheta_0].$$

В качестве следствия, в рассмотренном случае (8.1), справедливо

$$\gamma_t(x(\cdot\,)) = \min_{\theta \in [t, \vartheta_0]} \sup(\{(\|\cdot\| - \inf)[x(\theta); \mathcal{M}]; \ \max_{t \le \xi \le \theta}(\|\cdot\| - \inf)[x(\xi); \mathcal{N}]\})$$
$$\forall t \in T \ \forall x(\cdot\,) \in C_n([t, \vartheta_0]).$$

Таким образом, мы получили естественный функционал платы.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект № 19–01–000573 А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Isaacs R. Differential games. New York: Wiley, 1965.
2. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). С. 307–330.
3. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
4. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр // Доклады АН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 285–287.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
7. Roxin E. Axiomatic approach in differential games // Journal of Optimization Theory and Applications. 1969. Vol. 3. P. 153. https://doi.org/10.1007/BF00929440
8. Elliott R. J., Kalton N. J. Values in differential games // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 78. No. 3. P. 427–431.
9. Ченцов А. Г. К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76. http://mi.mathnet.ru/dan39693

10. Кряжимский А. В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 779–782. http://mi.mathnet.ru/dan41626
11. Чистяков С. В. К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
12. Ухоботов В. И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–364.
13. Ченцов А. Г., Хачай Д. М. Релаксация дифференциальной игры сближения–уклонения и методы итераций // Труды ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 4. С. 246–269. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-4-246-269
14. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
15. Ченцов А. Г. Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 304–321. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321
16. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы: В 3-х т. Т. 1: Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
17. Ченцов А. Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения. Деп. в ВИНИТИ. №1933-79 / Уральский политехнический институт им. С.М. Кирова. Свердловск, 1979. 103 с.
18. Ченцов А. Г. Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений // Труды ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 285–302. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302

Поступила в редакцию 02.01.2020

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Хачай Даниил Михайлович, аспирант, младший научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: dmx@imm.uran.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов, Д. М. Хачай. Оператор программного поглощения и релаксация дифференциальной игры сближения–уклонения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 64–91.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 1. Pp. 64–91.

A. G. Chentsov, D. M. Khachai

Relaxation of pursuit–evasion differential game and program absorption operator

Keywords: pursuit–evasion differential game, program iterations method, guaranteed result.

MSC2010: 05A05, 97N70, 97N80

DOI: 10.35634/vm200106

We consider some natural relaxation of pursuit-evasion differential game. For two closed sets, which are parameters, similar guidance problem for ε-neighborhoods is being solved. We are interested in finding a minimal size of such neighborhoods, which allows player I successfully solve his guidance problem in the class of generalized non-anticipating strategies. To resolve above-mentioned differential game, a modification of Program Iterations Method is implemented. Size of the neighborhoods is found as a position function and it's defined by application of special iterative procedure further below. As a corollary, it is shown that desired function is a fixed point of the open-loop operator, which defines the procedure.

Funding. The study was funded by RFBR, project number 19–01–000573 A.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: Wiley, 1965.
2. Pontryagin L. S. Linear differential games of pursuit, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1980, vol. 112 (154), no. 3 (7), pp. 307–330.
3. Krasovskii N. N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on the encounter of motions), M.: Nauka, 1970.
4. Pshenichnii B. N. The structure of differential games, *Soviet Math. Dokl.*, 1969, vol. 184, pp. 285–287.
5. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. An alternative for the game problem of convergence, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965.
6. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.
7. Roxin E. Axiomatic approach in differential games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1969, vol. 3, pp. 153. https://doi.org/10.1007/BF00929440
8. Elliott R. J., Kalton N. J. Values in differential games, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 78, no. 3, pp. 427–431.
9. Chentsov A. G. On a game problem of guidance, *Soviet Math., Doklady*, 1976, vol. 17, pp. 73–77. https://zbmath.org/?q=an:0395.90105
10. Kryazimskii A. V. On the theory of positional differential games of convergence–evasion, *Sov. Math., Dokl.*, 1978, vol. 19, no. 2, pp. 408–412. https://zbmath.org/?q=an:0399.90118
11. Chistiakov S. V. On solving pursuit game problems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 845–852. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90167-8
12. Ukhobotov V. I. Construction of a stable bridge for a class of linear games, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90021-1
13. Chentsov A. G., Khachai D. M. Relaxation of a differential game of approach–evasion and iterative methods, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 246–269 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-4-246-269
14. Subbotin A. I., Chentsov A. G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), M.: Nauka, 1981.
15. Chentsov A. G. The program iteration method in a game problem of guidance, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. 43–61. https://doi.org/10.1134/S0081543817050066

16. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part I: General theory*, New York–London: Interscience, 1958.
17. Chentsov A. G. *Metod programmnykh iteratsii dlya differentsial'noi igry sblizheniya-ukloneniya* (The method of program iterations for a differential approach–evasion game). Sverdlovsk, 1979. Available from VINITI, no. 1933-79, 102 p.
18. Chentsov A. G. Stability iterations and an evasion problem with a constraint on the number of switchings, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 285–302 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302

Received 02.01.2020

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Khachai Daniil Mikhailovich, PhD student, Junior Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: dmx@imm.uran.ru

Citation: A. G. Chentsov, D. M. Khachai. Relaxation of pursuit–evasion differential game and program absorption operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 64–91.