МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 59–63.

УДК 517.983.54

© *В. П. Танана*

ПОЛНОТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ

Математическое моделирование композиционных материалов играет важную роль в современной технике, а решение и исследование обратных граничных задач теплообмена невозможно без использования систем собственных функций задачи Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами. Одним из важнейших свойств таких систем является их полнота в соответствующих пространствах. Это свойство систем позволяет доказать теоремы существования и единственности как для прямых задач, так и обратных граничных задач теплопроводности, а также обосновать численные методы решения таких задач. В настоящей статье доказана полнота в пространстве $L_2[r_0, r_2]$ задачи Штурма–Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с разрывным коэффициентом. Эта задача возникает при исследовании и решении обратной граничной задачи теплопроводности для полого шара, состоящего из двух шаров с различными коэффициентами температуропроводности. Доказана самосопряженность, инъективность, а также положительная определенность этого оператора.

Ключевые слова: система собственных функций, задача Штурма–Лиувилля, композиционные материалы, обратные граничные задачи.

DOI: 10.35634/vm200105

При исследовании и решении прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных важную роль играют собственные функции соответствующих задач Штурма–Лиувилля. Для эффективности этих систем требуется их ортогональность и полнота в соответствующих функциональных пространствах. Заметим, что полнота системы собственных функций позволяет решить проблему существования и единственности решения не только прямой, но и обратной задачи. При решении задач для композиционных материалов соответствующая задача Штурма–Лиувилля имеет особенности. Собственные функции таких задач исследованы недостаточно. Проблемы полноты системы собственных функций задачи Штурмы–Лиувилля для операторов из другого класса рассматривались в работах [1, 2]. В статье [3], посвященной решению обратной граничной задачи для композиционных материалов, не доказана полнота системы собственных функций соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. В данной статье восполнен данный пробел.

§ 1. Постановка задачи Штурма–Лиувилля для полого шара, состоящего из двух шаров с различными коэффициентами температуропроводности

Пусть H — пространство $L_2(r_0, r_2)$ с эквивалентной нормой, определяемой скалярным произведением

$$(u(r), v(r)) := \frac{1}{a_1}\int_{r_0}^{r_1} r^2 \cdot u_1(r) \cdot v_1(r)\,dr + \frac{1}{a_2}\int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot u_2(r) \cdot v_2(r)\,dr, \tag{1}$$

где

$$u(r) = \begin{cases} u_1(r), & r \in (r_0, r_1), \\ u_2(r), & r \in (r_1, r_2), \end{cases} \qquad v(r) = \begin{cases} v_1(r), & r \in (r_0, r_1), \\ v_2(r), & r \in (r_1, r_2). \end{cases}$$

Введем оператор $A\colon H\to H$, где H определено формулой (1),

$$
Au(r)=\begin{cases}\dfrac{a_1^2}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{du_1(r)}{dr}\right), & r\in(r_0,r_1),\\ \dfrac{a_2^2}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{du_2(r)}{\partial r}\right), & r\in(r_1,r_2),\end{cases} \tag{2}
$$

$$
D(A)=\{u(r)\in W_2^2(r_0,r_1)\bigcup W_2^2(r_1,r_2),\quad u_1(r_0)=0,\quad u_2(r_2)=0,
$$
$$
u_1(r_1)=u_2(r_1),\qquad a_1u_1'(r_1)=a_2u_2'(r_1)\},
$$

где W_2^2 — пространство Соболева.

Решая задачу Штурма–Лиувилля

$$
-Au(r)+\lambda^2u(r)=0,\quad u(r)=\begin{cases}u_1(r), & r\in(r_0,r_1),\\ u_2(r), & r\in(r_1,r_2),\end{cases}\qquad u(r)\in D(A),
$$

определим последовательность собственных значений λ_n этой задачи, λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
\operatorname{ctg}\frac{\lambda(r_1-r_0)}{a_1}+\operatorname{ctg}\frac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}=\frac{(a_1-a_2)}{\lambda\cdot r_1}
$$

и соответствующие им собственные функции $\{\varphi_n(r)\}$

$$
\varphi_n(r)=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{\lambda_n(r-r_0)}{a_1}}{r\sin\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}}, & r_0\leqslant r\leqslant r_1,\\ \dfrac{\sin\frac{\lambda_n(r_2-r)}{a_2}}{r\sin\frac{\lambda_n(r_2-r_1)}{a_2}}, & r_1\leqslant r\leqslant r_2.\end{cases}
$$

§ 2. Основные свойства оператора A

Лемма 1. *Пусть оператор A определен формулой (2). Тогда A симметричен на множестве $D(A)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_1(r),\ u_2(r),\ v_1(r),\ v_2(r)\in D(A)$. Необходимо показать, что

$$
\int_{r_0}^{r_1}u_1(r)\cdot\frac{a_1^2}{r^2}\cdot[r^2v_1'(r)]'\cdot r^2\frac{dr}{a_1}+\int_{r_1}^{r_2}u_2(r)\cdot\frac{a_2^2}{r^2}\cdot[r^2v_2'(r)]'\cdot r^2\frac{dr}{a_2}=
$$
$$
\int_{r_0}^{r_1}v_1(r)\cdot\frac{a_1^2}{r^2}\cdot[r^2u_1'(r)]'\cdot r^2\frac{dr}{a_1}+\int_{r_1}^{r_2}v_2(r)\cdot\frac{a_2^2}{r^2}\cdot[r^2u_2'(r)]'\cdot r^2\frac{dr}{a_2}.
$$

Проинтегрировав левую часть этого равенства дважды по частям, получим

$$
(Au(r),v(r))=(v(r),Au(r)).
$$

Тем самым лемма доказана. □

Лемма 2. *Существует линейный инъективный оператор A^{-1}, обратный к A, для которого выполняются условия $D(A^{-1})=H$, а $R(A^{-1})=D(A)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $f \in H$ существует единственная функция $u(r) \in D(A)$, такая, что $Au(r) = f(r)$,

$$\begin{aligned} u_1(r) &= \int_{r_0}^{r} \left[\frac{1}{a_1^2 \cdot \eta_1^2} \int_{r_0}^{\eta_1} f(\eta_2) \cdot \eta_2^2 \cdot d\eta_2 \right] d\eta_1 - \frac{c_1}{r} + \frac{c_1}{r_0}, \\ u_2(r) &= \int_{r_2}^{r} \left[\frac{1}{a_2^2 \cdot \eta_1^2} \int_{r_2}^{\eta_1} f(\eta_2) \cdot \eta_2^2 \cdot d\eta_2 \right] d\eta_1 - \frac{c_2}{r} + \frac{c_2}{r_2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Константы c_1 и c_2 в (3) однозначно определяются условием согласования. Тем самым лемма доказана. □

Лемма 3. *Существует число $\gamma_0 > 0$ такое, что для любой функции $u(r) \in D(A)$ справедливо соотношение*

$$-(Au(r), u(r)) \geqslant \gamma_0 \cdot \|u(r)\|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для любых $u(r),\ v(r) \in D(A),\ \ A = -B^*B$, где

$$Bu(r) = r\frac{du(r)}{dr}, \quad u(r_0) = u(r_2) = 0, \quad B^*v(r) = -\frac{d}{dr}[rv(r)].$$

Тогда $-(Au(r), u(r)) = (B^*Bu(r), u(r)) = (Bu(r), Bu(r)) = \|Bu(r)\|^2$.

Поскольку

$$-(Au(r), u(r)) = \int_{r_0}^{r_1} r^2 \cdot [u_1'(r)]^2 dr + \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot [u_2'(r)]^2 dr,$$

то достаточно показать, что для любого $u(r) \in H$

$$\int_{r_0}^{r_1} r^2 \cdot u_1^2(r) dr + \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot u_2^2(r) dr \leqslant c_3 \cdot \int_{r_0}^{r_1} r^2 \cdot [u_1'(r)]^2 dr + c_4 \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot [u_2'(r)]^2 dr,$$

где константы c_3 и $c_4 > 0$ будут определены ниже.

Имеем

$$u(r) = \int_{r_0}^{r} (\xi_1^2)^{1/2} \cdot u_1'(\xi_1) \cdot (\xi_1^2)^{-1/2} d\xi_1 + \int_{r_2}^{r} (\xi_2^2)^{1/2} \cdot u_2'(\xi_2) \cdot (\xi_2^2)^{-1/2} d\xi_2, \ \ \xi_1 \in [r_0, r_1], \ \ \xi_2 \in [r_1, r_2].$$

$$|u(r)| \leqslant \left(\int_{r_0}^{r} \xi_1^2 \cdot [u_1'(\xi_1)]^2 d\xi_1 \right)^{1/2} \cdot \left(\left| \int_{r_0}^{r} \frac{d\xi_1}{\xi_1^2} \right| \right)^{1/2} + \left(\int_{r_2}^{r} \xi_2^2 \cdot [u_2'(\xi_2)]^2 d\xi_1 \right)^{1/2} \cdot \left(\left| \int_{r_2}^{r} \frac{d\xi_2}{\xi_2^2} \right| \right)^{1/2},$$

$$r^2 \cdot u^2(r) \leqslant r^2 \cdot \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right| \cdot \int_{r_0}^{r_1} r^2 \cdot [u_1'(r)]^2 dr + \left| \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right| \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot [u_2'(r)]^2 dr,$$

$$\int_{r_0}^{r_2} r^2 \cdot u^2(r) \leqslant \int_{r_0}^{r_1} r^2 \cdot \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right| dr \cdot \int_{r_0}^{r_1} r^2 \cdot [u_1'(r)]^2 dr + \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right| dr \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot [u_2'(r)]^2 dr,$$

$c_3 = \displaystyle\int_{r_0}^{r_1} r^2 \cdot \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right| dr, \quad c_4 = \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right| dr$. Выбрав $\gamma_0 = \min\{c_3, c_4\}$, получим утверждение леммы. □

Из теоремы 1 в [4, глава VII, § 6] следует самосопряженность оператора A^{-1}, а из теоремы 1.8, доказанной в [5, с. 126], его полная непрерывность.

§ 3. Полнота системы собственных функций $\{\varphi_n(r)\}$

Теорема 1. *Система собственных функций $\{\varphi_n(r)\}$ задачи Штурма–Лиувилля полна в пространстве H.*

Доказательство. Так как из лемм 1–3 следует, что оператор $-A^{-1}$ является инъективным линейным, вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, а $\overline{R(A^{-1})} = \overline{D(A)} = H$, то из теоремы Гильберта–Шмидта следует, что для любого $f(r) \in H$, $f(r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \lambda_n^2 \varphi_n(r)$, где $f_n = (f, \varphi_n)$, что и доказывает полноту системы $\{\varphi_n(r)\}$ в пространстве H.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ система собственных функций оператора A^{-1}. Тогда

$$-A^{-1}\varphi_n(r) = \mu_n^2 \varphi_n(r), \tag{4}$$

где $\mu_n = 1/\lambda_n$. Из (4) следует, что

$$\frac{1}{\mu_n^2}\varphi_n(r) = -A\varphi_n(r),$$

то есть системы собственных функций операторов A^{-1} и A совпадают. Тем самым теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухтаров О. Ш., Кадакал М. Спектральные свойства одной задачи типа Штурма–Лиувилля с разрывным весом // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46. № 4. С. 860–875.
2. Erdogan S., Mukhtarov O. Sh. Spectral properties of discontinuous Sturm–Liouville problems with a finite number of transmission conditions // Mediterranean Journal of Mathematics. 2016. Vol. 13. Issue 1. P. 153–170. https://doi.org/10.1007/s00009-014-0487-x
3. Танана В. П., Сидикова А. И. Приближенное решение обратной граничной задачи для системы дифференциальных уравнений параболического типа и оценка погрешности этого решения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 247–264. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-247-264
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
5. Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации. М.: МГУ, 1999.

Поступила в редакцию 19.01.2020

Танана Виталий Павлович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, кафедра системного программирования, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.
E-mail: tananavp@susu.ru

Цитирование: В. П. Танана. Полнота системы собственных функций задачи Штурма–Лиувилля с особенностью // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 59–63.

V. P. Tanana

Completeness of the system of eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem with the singularity

Keywords: system of eigenfunctions, Sturm–Liouville problem, composite material, inverse boundary value problems.

MSC2010: 34L10, 35P10

DOI: 10.35634/vm200105

Mathematical modeling of composite materials plays an important role in modern technology, and the solution and study of inverse boundary value problems of heat transfer is impossible without the use of systems of eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem for the differential equation with discontinuous coefficients. One of the most important properties of such systems is their completeness in the corresponding spaces. This property of systems allows to prove theorems of existence and uniqueness of both direct problems and inverse boundary value problems of thermal conductivity, and also to prove numerical methods of solving such problems. In this paper, we prove the completeness of the Sturm–Liouville problem in the space $L_2[r_0, r_2]$ for a second-order differential operator with a discontinuous coefficient. This problem arises when investigating and solving the inverse boundary problem of thermal conductivity for a hollow ball consisting of two balls with different temperature conductivity coefficients. Self-conjugacy, injectivity, and positive definiteness of this operator are proved.

REFERENCES

1. Mukhtarov O. Sh., Kadakal M. Some spectral properties of one Sturm–Liouville type problem with discontinuous weight, *Siberian Mathematical Journal*, 2005, vol. 46, issue 4, pp. 681–694 (in Russian). https://doi.org/10.1007/s11202-005-0069-z
2. Erdogan S., Mukhtarov O. Sh. Spectral properties of discontinuous Sturm–Liouville problems with a finite number of transmission conditions, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, vol. 13, issue 1, pp. 153–170. https://doi.org/10.1007/s00009-014-0487-x
3. Tanana V. P., Sidikova A. I. Approximate solution of an inverse boundary value problem for a system of differential equations of parabolic type and estimation of the error of this solution, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, issue 3, pp. 247–264 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-247-264
4. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementy funktsional'nogo analiza* (Elements of functional analysis), Moscow: Nauka, 1965.
5. Osipov Yu. S., Vasil'ev F. P., Potapov M. M. *Osnovy metoda dinamicheskoi regulyarizatsii* (Bases of the dynamical regularization method), Moscow: Moscow State University, 1999.

Received 19.01.2020

Tanana Vitalii Pavlovich, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Department of System Programming, South Ural State University, pr. Lenina, 76, Chelyabinsk, 454080, Russia.
E-mail: tananavp@susu.ru

Citation: V. P. Tanana. Completeness of the system of eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem with the singularity, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 59–63.