ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 31–48.

УДК 517.956.6

© *К. Т. Каримов*

ЗАДАЧА КЕЛДЫША ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

В данной статье изучена задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде. На основании свойства полноты систем собственных функций двух одномерных спектральных задач доказана теорема единственности. Для доказательства существования решения задачи использован спектральный метод Фурье, основанный на разделении переменных. Решение поставленной задачи построено в виде суммы двойного ряда Фурье–Бесселя. При обосновании равномерной сходимости построенного ряда использованы асимптотические оценки функций Бесселя действительного и мнимого аргумента. На их основе получены оценки для каждого члена ряда, позволившие доказать сходимость ряда и его производных до второго порядка включительно, а также теорему существования в классе регулярных решений.

Ключевые слова: задача Келдыша, уравнение смешанного типа, спектральный метод, сингулярный коэффициент, функция Бесселя.

DOI: 10.35634/vm200103

Введение

Известно, что на плоскости задача Дирихле для вырождающихся уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами эллиптического типа не всегда будет корректно поставленной. Для таких дифференциальных уравнений наряду с задачей Дирихле можно изучить другие задачи, которые зависят от диапазона изменения параметров уравнения. Например, М. В. Келдыш впервые показал [1], что постановка задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения второго рода

$$u_{xx} + y^m u_{yy} + a\,(x,y)\,u_x + b\,(x,y)\,u_y + c\,(x,y)\,u = 0 \quad (m > 0) \tag{0.1}$$

в области D, ограниченной отрезком AB оси x и простой гладкой кривой Γ с концами в точках A и B, лежащей в полуплоскости $y > 0$, зависит от m и поведения $b\,(x,y)$ при $y \to 0$. В одних случаях граничное условие можно задавать на всей границе области D, в других — на части границы, совпадающей с линией параболического вырождения, $u\,(x,y)$ освобождается от граничного условия, т. е. $u\,(x,y)$ надо задавать лишь на Γ. Это объясняется тем, что решение $u\,(x,y)$ уравнения (0.1) и его производная u_y могут, вообще говоря, обращаться в бесконечность на линии параболического вырождения. Так, если решения уравнения (0.1) не все остаются ограниченными при $y \to 0$, то задача Дирихле не имеет решения в области D. В этих случаях оказывается разрешимой следующая задача.

Задача E. Найти в области D регулярное решение уравнения (0.1), остающееся ограниченным при $y \to 0$ и принимающее заданные непрерывные значения φ лишь на кривой Γ.

Опираясь на результаты, полученные в работе [1], С. П. Пулькиным [2] исследована задача с неполными граничными данными, т. е. следующая задача типа E:

Задача NE**.** Найти в области D_1, ограниченной кривой Γ_1, лежащей в первом квадранте, соединяющей точки $A\,(1,0)$, $B\,(0,b)$, и отрезками OB, OA регулярное решение уравнения

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0, \quad p \geqslant 1, \tag{0.2}$$

удовлетворяющее условиям $u|_{\Gamma_1} = \varphi\,(s)$ и $u_y|_{OA} = \nu\,(x)$, где $b = \mathrm{const} > 0,\; O(0,0)$.

Работа [3] является продолжением работы [2], где изучена задача типа E для уравнения (0.2) в области D_1, в которой на линии сингулярности требуется ограниченность решения уравнения, а в остальной части границы задается третье граничное условие и условие Неймана.

Отметим также, что аналогичные задачи для эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами приведены в монографии [4, с. 68].

Перечисленные выше задачи в настоящее время получили название «Задача Келдыша». Изучению их в разных областях плоскости посвящены, например, работы [5–8] и др. Для трехмерного уравнения эллиптического и смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами задача Келдыша изучена в работах [9, 10]. В данной работе будет поставлена и исследована задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде.

§ 1. Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается следующее трехмерное уравнение

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)\, u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{|y|} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0, \tag{1.1}$$

для которого задача Келдыша исследуется в области

$$\Omega = \{(x,y,z)\colon x \in (0,a),\; y \in (-b,+\infty),\; z \in (0,c)\},$$

где a, b, c, α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, причем a, b, $c > 0$, α, $\gamma \geqslant 1/2$, $|\beta| < 1/2$.

Уравнение (1.1) в области Ω принадлежит смешанному типу, а именно: в области $\Omega^+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ — эллиптическому типу, а в области $\Omega^- = \Omega \cap \{y < 0\}$ — гиперболическому типу. Плоскости $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения, а среди них $y = 0$ есть плоскость изменения типа уравнения. Задача Келдыша для уравнения (1.1) в области Ω формулируется следующим образом.

Задача E^∞**.** Найти ограниченную при $x \to 0$, $z \to 0$ функцию $u\,(x,y,z) \in C\left(\bar{\Omega} \backslash\, (xz = 0)\right) \cap \cap C^2\,(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, удовлетворяющую в области $\Omega^+ \cup \Omega^-$ уравнению (1.1) и краевым условиям

$$u\,(a,y,z) = 0, \quad y \in [-b,+\infty), \;\; z \in [0,c]; \tag{1.2}$$

$$u\,(x,y,c) = 0, \;\; x \in [0,a]\,, \;\; y \in [-b,+\infty); \tag{1.3}$$

$$\lim_{y \to +\infty} u\,(x,y,z) = 0, \;\; x \in [0,a]\,, \;\; z \in [0,c]; \tag{1.4}$$

$$u\,(x,-b,z) = f\,(x,z)\,, \;\; x \in [0,a]\,, \;\; z \in [0,c], \tag{1.5}$$

а также условию склеивания вида

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta}\, u_y\,(x,y,z) = \lim_{y \to +0} y^{2\beta} u_y\,(x,y,z), \;\; x \in (0,a), \;\; z \in (0,c), \tag{1.6}$$

где $\bar{\Omega} = \{(x,y,z)\colon x \in [0,a]\,,\; y \in [-b,+\infty),\; z \in [0,c]\}$, $f\,(x,z)$ – заданная функция.

§ 2. Построение частных решений уравнения (1.1)

Для получения решения задачи E^{∞}, формально применим метод Фурье [11]. Сначала найдем нетривиальные в $\bar{\Omega}\backslash(xz=0)$ решения уравнения (1.1), ограниченные при $x \to 0$, $z \to 0$ и удовлетворяющие условиям (1.2), (1.3). Исследование этой задачи опирается на ниже доказываемую лемму.

Лемма 1. (a) *Если* $\alpha \geqslant 1/2$, *а функция* $u(x,y,z) \in C\left(\bar{\Omega}\backslash(x=0)\right) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ *есть ограниченное при* $x \to 0$ *решение уравнения* (1.1), *то* $\lim\limits_{x\to 0}[(\partial/\partial x)\, u(x,y,z)] = 0$. (b) *Если* $\gamma \geqslant 1/2$, *а функция* $u(x,y,z) \in C\left(\bar{\Omega}\backslash(z=0)\right) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ *есть ограниченное при* $z \to 0$ *решение уравнения* (1.1), *то* $\lim\limits_{z\to 0}[(\partial/\partial z)\, u(x,y,z)] = 0$.

Доказательство. Разделив переменные по формуле $u(x,y,z) = W(x,z)Q(y)$, из уравнения (1.1) получим

$$(\operatorname{sgn} y)\, Q''(y) + \frac{2\beta}{|y|} Q'(y) - \lambda Q(y) = 0, \;\; y \in (-b,0) \cup (0,+\infty); \tag{2.1}$$

$$W_{xx} + W_{zz} + \frac{2\alpha}{x} W_x + \frac{2\gamma}{z} W_z + \lambda W = 0, \;\; x \in (0,a), \;\; z \in (0,c), \tag{2.2}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ — константа разделения.

Путем разделения переменных $W(x,z) = X(x)\, Z(z)$, уравнение (2.2) также распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X''(x) + \frac{2\alpha}{x} X'(x) + \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < a; \tag{2.3}$$

$$Z''(z) + \frac{2\gamma}{z} Z'(z) + (\lambda - \mu)\, Z(z) = 0, \quad 0 < z < c, \tag{2.4}$$

где $\mu \in \mathbb{R}$ — константа разделения.

В силу условия леммы 1, $u(x,y,z) = X(x)\, Q(y)\, Z(z)$ — ограниченная в $\bar{\Omega}$ функция. Из процесса получения уравнения (2.3) и (2.4) следует, что для доказательства леммы 1, достаточно показать, что функции $X(x)$ и $Z(z)$ при $x \to 0$ и $z \to 0$ ограничены и

$$\lim_{x\to 0} X'(x) = 0,$$
$$\lim_{z\to 0} Z'(z) = 0.$$

Докажем это. Пусть $\mu > 0$. Найдем общее решение уравнения (2.3). Произведя замену $X(x) = \left(t/\sqrt{\mu}\right)^{1/2-\alpha} p(t)$, где $t = \sqrt{\mu}x$, из (2.3) получим уравнение Бесселя [12, с. 49]:

$$t^2 p''(t) + t p'(t) + \left[t^2 - (\alpha - 1/2)^2\right] p(t) = 0. \tag{2.5}$$

Принимая во внимание вид общего решения [12, с. 90] уравнения (2.5) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (2.3) в виде

$$X(x) = d_1 x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(x\sqrt{\mu}) + d_2 x^{1/2-\alpha} Y_{\alpha-1/2}(x\sqrt{\mu}), \tag{2.6}$$

здесь d_1 и d_2 — произвольные постоянные, $J_l(x)$ и $Y_l(x)$ — функция Бесселя порядка l первого и второго рода [12, с. 51, с. 78] соответственно. В силу условия $\alpha \geqslant 1/2$ из (2.6) следует, что ограниченное при $x \to 0$ решение определяется равенством

$$X(x) = d_1 x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(x\sqrt{\mu}). \tag{2.7}$$

Вычисляя производную от функции (2.7) по формуле [12, с. 56]

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\pm\nu}J_{\nu}\left(x\right)\right]=\pm x^{\pm\nu}J_{\nu\mp1}\left(x\right), \tag{2.8}$$

имеем $X'\left(x\right)=-\sqrt{\mu}x^{1/2-\alpha}J_{\alpha+1/2}\left(x\sqrt{\mu}\right)$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to0}X'\left(x\right)=0$.

Пусть теперь $\mu=0$. Тогда общее решение уравнения (2.3) при $\alpha>1/2$ и $\alpha=1/2$ соответственно имеет вид $X\left(x\right)=d_3x^{1-2\alpha}+d_4$ и $X\left(x\right)=d_3\ln x+d_4$, где d_3 и d_4 — произвольные постоянные. Из этих формул легко следует, что ограниченным при $x\to0$ решением уравнения (2.3) является функция $X\left(x\right)=d_4$, откуда сразу следует, что $\lim\limits_{x\to0}X'\left(x\right)=0$.

Предположим теперь $\mu<0$. В уравнении (2.3) произведем замену $\left(t/\sqrt{-\mu}\right)^{1/2-\alpha}p\left(t\right)$, где $t=x\sqrt{-\mu}$. В результате получим уравнение Бесселя вида [12, с. 91]

$$t^2p''\left(t\right)+tp'\left(t\right)-\left[t^2+\left(\alpha-1/2\right)^2\right]p\left(t\right)=0.$$

Принимая во внимание вид общего решения [12] этого уравнения и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (2.3) в виде

$$X\left(x\right)=d_5x^{1/2-\alpha}I_{\alpha-1/2}\left(x\sqrt{-\mu}\right)+d_6x^{1/2-\alpha}K_{\alpha-1/2}\left(x\sqrt{-\mu}\right),$$

здесь d_5 и d_6 — произвольные постоянные, $I_l\left(x\right)$ и $K_l\left(x\right)$ — функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда [12, с. 91, с. 92] соответственно. В силу условия $\alpha\geqslant1/2$ из последнего равенства следует, что ограниченное при $x\to0$ решение определяется равенством $X\left(x\right)=d_5x^{1/2-\alpha}I_{\alpha-1/2}\left(x\sqrt{-\mu}\right)$. Из этого получим равенство $X'\left(x\right)=d_5\sqrt{-\mu}x^{1/2-\alpha}I_{\alpha+1/2}\left(x\sqrt{-\mu}\right)$. Отсюда легко следует, что $\lim\limits_{x\to0}X'\left(x\right)=0$. Часть (a) леммы 1 доказана.

Часть (b) леммы 1 доказывается аналогично. По ходу ее доказательства устанавливается, что ограниченные при $z\to0$ решения уравнения (2.4) имеют вид

$$Z\left(z\right)=d_7z^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(z\sqrt{\lambda-\mu}\right)\ \text{ при } \lambda>\mu, \tag{2.9}$$

$$Z\left(z\right)=d_8\ \text{ при } \lambda=\mu,$$

$$Z\left(z\right)=d_9z^{1/2-\gamma}I_{\gamma-1/2}\left(z\sqrt{\lambda-\mu}\right),\ \text{ при }\ \lambda<\mu,$$

где d_j, $j=\overline{7,9}$ — произвольные постоянные. Лемма 1 полностью доказана. □

Из однородных условий (1.2) и (1.3) для уравнений (2.3) и (2.4) вытекают условия

$$X\left(a\right)=0, \tag{2.10}$$

$$Z\left(c\right)=0. \tag{2.11}$$

Следовательно, для того чтобы найти решения задачи (1.1)–(1.3), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (2.1), (2.3) и (2.4), причем решения уравнений (2.3) и (2.4) должны удовлетворять условиям $\{|X(+0)|<+\infty,$ (2.10)$\}$ и $\{|Z\left(+0\right)|<+\infty,$ (2.11)$\}$, где $F\left(+0\right)=\lim\limits_{x\to+0}F\left(x\right)$. Из вида найденных выше ограниченных решений уравнений (2.3) и (2.4) легко следует, что при $\mu\leqslant0$ и $\lambda\leqslant\mu$ нетривиальные решения уравнений (2.3) и (2.4), удовлетворяющие условиям (2.10) и (2.11) соответственно, не существуют. Поэтому воспользуемся решениями (2.7) и (2.9). Подставляя (2.7) и (2.9) соответственно в (2.10) и (2.11), имеем

$$J_{\alpha-1/2}\left(a\sqrt{\mu}\right)=0, \tag{2.12}$$

$$J_{\gamma-(1/2)}\left(c\sqrt{\lambda-\mu}\right)=0. \tag{2.13}$$

Известно, что при $l>-1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [12, с. 530]. Так как $\alpha-1/2>-1$, то уравнение (2.12) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через σ_n n-ый положительный корень уравнения (2.12), получим те значения параметра μ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (т. е. собственные значения задачи) $\{(2.3),\ |X(+0)|<+\infty,\ (2.10)\}$: $\mu_n=(\sigma_n/a)^2$, $n\in N$.

Полагая в (2.7) $\mu=\mu_n$ и $d_1=1$, получим нетривиальные решения (собственные функции) задачи $\{(2.3),\ |X(+0)|<+\infty,\ (2.10)\}$:

$$\tilde{X}_n(x)=x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x/a),\ n\in N. \tag{2.14}$$

Для удобства дальнейших вычислений данную систему функций нормируем:

$$X_n(x)=\tilde{X}_n(x)\Big/\left\|\tilde{X}_n\right\|_{L_{2,\rho}[0,a]}, \tag{2.15}$$

где $\left\|\tilde{X}_n\right\|_{L_{2,\rho}[0,a]}=\left(\int\limits_0^a\rho(x)\,\tilde{X}_n^2(x)\,dx\right)^{1/2}=\left|aJ_{1/2+\alpha}(\sigma_n)\right|/\sqrt{2},\ \rho(x)=x^{2\alpha}$.

Согласно работе [12], система собственных функций (2.15) ортонормальна и полна в пространстве $L_2[0,a]$ с весом $x^{2\alpha}$.

Теперь исследуем задачи $\{(2.4),\ |Z(+0)|<+\infty,\ (2.11)\}$ при $\mu=\mu_n$. Обозначая через δ_{km} m-ый положительный корень уравнения (2.13) при $n=k$, получим те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$\{(2.4),\ |Z(+0)|<+\infty,\ (2.11)\}:\lambda_{nm}=(\sigma_n/a)^2+(\delta_{nm}/c)^2,\ n,m\in N.$$

Полагая в (2.9) $\lambda=\lambda_{nm}$ и $d_7=1$, находим нетривиальные решения (собственные функции) задачи $\{(2.4),\ |Z(+0)|<+\infty,\ (2.11)\}$ в виде

$$\tilde{Z}_{nm}(z)=z^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}(\delta_{nm}z/c),\ n,m\in N. \tag{2.16}$$

Отсюда, нормируя, получаем ортонормальную и полную в пространстве $L_2[0,c]$ с весом $z^{2\gamma}$ систему собственных функций:

$$Z_{nm}(z)=\tilde{Z}_{nm}(z)\Big/\left\|\tilde{Z}_{nm}\right\|_{L_{2,q}[0,c]}, \tag{2.17}$$

где $\left\|\tilde{Z}_{nm}\right\|_{L_{2,q}[0,c]}=\left(\int\limits_0^c q(z)\,\tilde{Z}_{nm}^2(z)\,dz\right)^{1/2}=\left|cJ_{1/2+\gamma}(\delta_{nm})\right|/\sqrt{2},\ q(z)=z^{2\gamma}$.

Отметим, что для собственных значений σ_n при достаточно больших n справедлива асимптотическая формула [13, с. 317]

$$\sigma_n=\pi n+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{1}{4}\pi+O\left(n^{-1}\right)=\pi n+\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+O\left(n^{-1}\right).$$

В этой формуле $O\left(n^{-1}\right)$ [13, с. 15] означает такую величину, отношение которой к n^{-1} при беспредельном возрастании n остается меньше некоторой постоянной. Для вычисления членов более высокого порядка положим $\sigma_n\approx\pi n$. Для собственных значений δ_{nm} и λ_{nm} (для каждого фиксированного $n \in N$) при достаточно больших m справедливы асимптотические формулы:

$$\delta_{nm} \approx \pi m, \quad \lambda_{nm} \approx (\pi m)^2 . \tag{2.18}$$

Полагая в уравнении (2.1) $\lambda = \lambda_{nm}$, найдем общее решение этого уравнения при $y > 0$ и $y < 0$ для каждой пары (n, m) натуральных n и m:

$$Q_{nm}(y) = \begin{cases} a_{nm} y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right) + b_{nm} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right), & y \in (0, +\infty), \\ (-y)^{1/2-\beta}\left[c_{nm} J_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right) + d_{nm} Y_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right], & y \in [-b, 0), \end{cases} \tag{2.19}$$

здесь a_{nm}, b_{nm}, c_{nm} и d_{nm} — произвольные постоянные.

Теперь в (2.19) на основании $u(x, y, z) \in C\left(\bar{\Omega} \backslash (xz = 0)\right)$ и условия склеивания (1.6) подберем постоянные a_{nm}, b_{nm}, c_{nm} и d_{nm} так, чтобы выполнялись условия

$$Q_{nm}(+0) = Q_{nm}(-0), \quad \lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} Q'_{nm}(y) = \lim_{y \to +0} y^{2\beta} Q'_{nm}(y). \tag{2.20}$$

Из (2.19) следует, что первое из равенств (2.20) выполняется, если $d_{nm} = -\pi b_{nm}/2$ при любых a_{nm} и c_{nm}, а второе равенство имеет место при $c_{nm} = (\pi b_{nm}/2)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta\pi}{2}\right) - a_{nm}$ и $d_{nm} = -\pi b_{nm}/2$. С учетом последних равенств, функции из (2.19) примут вид

$$Q_{nm}(y) = \begin{cases} a_{nm} y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right) + \\ \qquad + b_{nm} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right), \ y \in [0, +\infty), \\ -a_{nm}(-y)^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right) + \\ \qquad + b_{nm}(-y)^{1/2-\beta} \bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right), \ y \in [-b, 0], \end{cases} \tag{2.21}$$

где $\bar{Y}_{1/2-\beta}\left[-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right] = [\pi/(2\cos\beta\pi)]\left\{J_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right) + J_{\beta-1/2}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right\}$.

По условию (1.4), решение $u(x, y, z)$ уравнения (1.1) имеет ноль на бесконечности, поэтому построенные функции $Q_{nm}(y)$ при $y \to +\infty$ должны стремиться к нулю. Из равенства (2.21), на основании асимптотического поведения функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ при больших z [14, с. 173]:

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}}, \quad K_\nu(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}, \tag{2.22}$$

следует, что $a_{nm} = 0$ для всех n, $m \in N$, так как функция $y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right)$ при $y \to +\infty$ стремится к бесконечности. Тогда, полагая в (2.21) $a_{nm} = 0$, получаем

$$Q_{nm}(y) = \begin{cases} b_{nm} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right), & y \in [0, +\infty), \\ b_{nm}(-y)^{1/2-\beta} \bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right), & y \in [-b, 0]. \end{cases} \tag{2.23}$$

Таким образом, частные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям (1.2), (1.3), (1.4), (1.6), в области Ω определяются в виде

$$u_{nm}(x, y, z) = \begin{cases} b_{nm} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right) X_n(x) Z_{nm}(z), & (x, y, z) \in \overline{\Omega^+}, \\ b_{nm}(-y)^{1/2-\beta} \bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right) X_n(x) Z_{nm}(z), & (x, y, z) \in \overline{\Omega^-}, \end{cases}$$

где $X_n(x)$ и $Z_{nm}(z)$ задаются по формуле (2.15) и (2.17) соответственно.

§ 3. Единственность решения задачи E^{∞}

Пусть $u(x,y,z)$ — решение задачи E^{∞}. Следуя работе [15], рассмотрим следующую функцию:

$$\omega_{nm}(y) = \int_0^c \int_0^a u(x,y,z)\, x^{2\alpha} X_n(x)\, z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dx\, dz, \quad m,n \in N. \tag{3.1}$$

На основании (3.1), введем функции

$$\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y) = \int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} \int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} u(x,y,z)\, x^{2\alpha} X_n(x)\, z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dx\, dz, \quad m,n \in N, \tag{3.2}$$

где ε_1 и ε_2 — достаточно малые положительные числа. Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0} \omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y) = \omega_{nm}(y).$$

Дифференцируем равенство (3.2) по y и учитывая уравнение (1.1), имеем

$$\begin{gathered}
\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]'' = -(\operatorname{sgn} y) \int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} \int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} \left(u_{xx} + u_{zz} + \frac{2\gamma}{z} u_z + \frac{2\beta}{|y|} u_y\right) x^{2\alpha} X_n(x)\, z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dx\, dz = \\
= -(\operatorname{sgn} y) \left[\int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} \left(\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} u_{xx} x^{2\alpha} X_n(x)\, dx + \int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} \frac{2\alpha}{x} u_x x^{2\alpha} X_n(x)\, dx \right) z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dz + \right. \\
\left. + \int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} \left(\int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} u_{zz} z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dz + \int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} \frac{2\gamma}{z} u_z z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dz \right) x^{2\alpha} X_n(x)\, dx + \frac{2\beta}{|y|} \left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]' \right].
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Преобразуем следующие интегралы:

$$\begin{gathered}
\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} u_{xx} x^{2\alpha} X_n(x)\, dx = u_x x^{2\alpha} X_n(x)\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1} - u\left[x^{2\alpha} X_n(x)\right]'\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1} + \\
+ \int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} u x^{2\alpha} \left[X_n''(x) + 2\frac{2\alpha}{x} X_n'(x) + \left(4\alpha^2 - 2\alpha\right) x^{-2} X_n(x) \right] dx,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} \frac{2\alpha}{x} u_x x^{2\alpha} X_n(x)\, dx = 2\alpha x^{2\alpha-1} X_n(x)\, u\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1} - \\
- \int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} u x^{2\alpha} \left[\frac{2\alpha}{x} X_n'(x) + \left(4\alpha^2 - 2\alpha\right) x^{-2} X_n(x) \right] dx.
\end{gathered}$$

На основании полученных выше равенств, имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} u_{xx}x^{2\alpha}X_n\left(x\right)\,dx+\int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}\frac{2\alpha}{x}u_x x^{2\alpha}X_n\left(x\right)\,dx=\\ =\left\{\left[u_x X_n\left(x\right)-uX_n'\left(x\right)\right]x^{2\alpha}\right\}\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1}-\left(\sigma_n/a\right)^2\int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}ux^{2\alpha}X_n\left(x\right)\,dx.\end{gathered}\tag{3.4}$$

Аналогично находим

$$\begin{gathered}\int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2} u_{zz}z^{2\gamma}Z_{nm}\left(z\right)\,dz+\int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}\frac{2\gamma}{z}u_z z^{2\gamma}Z_{nm}\left(z\right)\,dz=\\ =\left\{\left[u_z Z_{nm}\left(z\right)-uZ_{nm}'\left(z\right)\right]z^{2\gamma}\right\}\Big|_{z=\varepsilon_2}^{z=c-\varepsilon_2}-\left(\delta_{nm}/c\right)^2\int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}uz^{2\gamma}Z_{nm}\left(z\right)\,dz.\end{gathered}\tag{3.5}$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в равенство (3.3), получим

$$\begin{gathered}\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(y\right)\right]''=-\left(\operatorname{sgn}y\right)\left[\int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}\left(\left[u_x X_n\left(x\right)-uX_n'\left(x\right)\right]x^{2\alpha}\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1}-\right.\right.\\ \left.-\left(\sigma_n/a\right)^2\int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}ux^{2\alpha}X_n\left(x\right)dx\right)z^{2\gamma}Z_{nm}\left(z\right)dz+\\ +\int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}\left(\left[u_z Z_{nm}\left(z\right)-uZ_{nm}'\left(z\right)\right]z^{2\gamma}\Big|_{z=\varepsilon_2}^{z=c-\varepsilon_2}-\right.\\ \left.\left.-\left(\delta_{nm}/c\right)^2\int\limits_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}uz^{2\gamma}Z_{nm}\left(z\right)dz\right)x^{2\alpha}X_n\left(x\right)dx+\frac{2\beta}{|y|}\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(y\right)\right]'\right].\end{gathered}\tag{3.6}$$

Теперь из (3.6), переходя к пределу при $\varepsilon_1\to0$, $\varepsilon_2\to0$ и учитывая условия (1.2), (1.3), $|X_n\left(+0\right)|<+\infty$, $X_n\left(a\right)=0$, $X_n'\left(a\right)=-\sqrt{2}a^{-3/2-\alpha}\sigma_n$, $|Z_{nm}\left(+0\right)|<+\infty$, $Z_{nm}\left(c\right)=0$, $Z_{nm}'\left(c\right)=-\sqrt{2}c^{-3/2-\gamma}\delta_{nm}$ и условия леммы 1, получим, что $\omega_{nm}\left(y\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\operatorname{sgn}y\right)\omega_{nm}''\left(y\right)+\frac{2\beta}{|y|}\omega_{nm}'\left(y\right)-\lambda_{nm}\omega_{nm}\left(y\right)=0,\quad y\in\left(-b,0\right)\cup\left(0,+\infty\right),$$

т. е. уравнению (2.1). Следовательно, $\omega_{nm}\left(y\right)=Q_{nm}\left(y\right)$.

Теперь, учитывая условия (1.5), из (3.1) находим

$$\omega_{nm}\left(-b\right)=\int\limits_0^c\int\limits_0^a f\left(x,z\right)x^{2\alpha}X_n\left(x\right)z^{2\gamma}Z_{nm}\left(z\right)\,dx\,dz=f_{nm},\quad n,m\in N.\tag{3.7}$$

Учитывая равенство $\omega_{nm}\left(y\right)=Q_{nm}\left(y\right)$ и подставляя (2.23) в условие (3.7), получим $Q_{nm}\left(-b\right)=b_{nm}b^{1/2-\beta}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(b\sqrt{\lambda_{nm}}\right)=f_{nm}$, откуда, при условии

$$\Delta_{nm}\left(b\right)=\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(b\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\neq0,\quad n,m\in N,\tag{3.8}$$

однозначно находится b_{nm}:

$$b_{nm}=\frac{b^{\beta-1/2}}{\Delta_{nm}(b)}f_{nm},\quad n,m\in N. \tag{3.9}$$

Принимая во внимание равенства (2.23), (3.9) и $\omega_{nm}(y)=Q_{nm}(y)$, окончательно находим

$$\omega_{nm}(y)=\begin{cases}(y/b)^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)f_{nm}\Big/\Delta_{nm}(b), & y\in[0,+\infty),\\ (-y/b)^{1/2-\beta}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)f_{nm}\Big/\Delta_{nm}(b), & y\in[-b,0].\end{cases} \tag{3.10}$$

Пусть теперь $f(x,z)\equiv 0$ и выполнено условие (3.8). Тогда из равенств (3.7) и (3.10) следует, что $\omega_{nm}(y)\equiv 0$ при всех $n,m\in N$ и из (3.1) получим

$$\int\limits_0^c\int\limits_0^a u(x,y,z)\,x^{2\alpha}X_n(x)\,z^{2\gamma}Z_{nm}(z)\,dx\,dz=0,\quad m,n\in N.$$

Отсюда, в силу полноты (для каждого $n\in N$) системы функций (2.17) в пространстве $L_2[0,c]$ с весом $z^{2\gamma}$, следует

$$\int\limits_0^a u(x,y,z)\,x^{2\alpha}X_n(x)\,dx=0,\quad n\in N.$$

Если учесть полноту системы функций (2.15) в $L_2[0,a]$ с весом $x^{2\alpha}$, то из последнего равенства вытекает, что $u(x,y,z)\equiv 0$ для всех $x\in[0,a]$ и при любом $y\in[0,+\infty)$, $z\in[0,c]$.

Пусть при некоторых b и $n=l$, $m=k$, где l, $k\in N$, нарушено условие (3.8), т. е. $\Delta_{lk}(b)=0$. Тогда однородная задача E^{∞} [т. е. при $f(x,z)\equiv 0$] имеет нетривиальное решение

$$u_{lk}(x,y,z)=\begin{cases}y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{lk}}\right)X_l(x)\,Z_{lk}(z), & y\in[0,+\infty),\\ (-y)^{1/2-\beta}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{lk}}\right)X_l(x)\,Z_{lk}(z), & y\in[-b,0],\end{cases} \tag{3.11}$$

где $X_l(x)$ и $Z_{lk}(z)$ находятся по формуле (2.15) и (2.17) соответственно.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y,z)$ задачи E^{∞}, то оно единственно тогда и только тогда, когда $\Delta_{nm}(b)\neq 0$ при всех $n,m\in N$.*

§ 4. Построение и обоснование решения задачи E^{∞}

Решение задачи E^{∞} при выполнении условий (3.8) будем искать формально в виде суммы двойного ряда Фурье–Бесселя:

$$u(x,y,z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{W}(x,z)\,(y/b)^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right), & y\geqslant 0,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{W}(x,z)\,(-y/b)^{1/2-\beta}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right), & y\leqslant 0,\end{cases} \tag{4.1}$$

где $\tilde{W}(x,z) = 4\tilde{X}_n(x)\,\tilde{Z}_{nm}(z)\,F_{nm}\Big/\Big\{\Delta_{nm}(b)\,\big[acJ_{1/2+\alpha}(\sigma_n)\,J_{1/2+\gamma}(\delta_{nm})\big]^2\Big\}$, а функции $\tilde{X}_n(x)$, $\tilde{Z}_{nm}(z)$ и коэффициенты F_{nm} определяются соответственно формулами (2.14), (2.16) и

$$F_{nm} = \int\limits_0^c \int\limits_0^a f(x,z)\,x^{1/2+\alpha} J_{\alpha-1/2}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right) z^{1/2+\gamma} J_{\gamma-1/2}\left(\frac{\delta_{nm} z}{c}\right) dx\,dz. \tag{4.2}$$

Каждый член этого ряда удовлетворяет условиям (1.2)–(1.6). Для обоснования существования решения задачи E^∞ надо показать существование числа $b>0$, при котором выражение $\Delta_{nm}(b)$ при достаточно больших m отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Рассмотрим выражение

$$\tilde{\Delta}_{nm}(b) = \frac{2\cos\beta\pi}{\pi}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(b\sqrt{\lambda_{nm}}\right) = J_{1/2-\beta}\left(b\sqrt{\lambda_{nm}}\right) + J_{\beta-1/2}\left(b\sqrt{\lambda_{nm}}\right).$$

При фиксированных $n \in N$ и достаточно больших m справедливы соотношения (2.18). На основании асимптотической формулы для функции $J_\nu(\xi)$ при больших ξ [14, с. 172]

$$J_\nu(\xi) \approx \left(\frac{2}{\pi\xi}\right)^{1/2} \cos\left(\xi - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \xi \to \infty, \tag{4.3}$$

имеем

$$\sqrt{m}\tilde{\Delta}_{nm}(b) = A\cos\left(\pi m b - \frac{\pi}{4}\right) = A\sin\left(\pi m b + \frac{\pi}{4}\right), \tag{4.4}$$

где $A = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{b}}\cos\left(\frac{\beta\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Если, например, $b = p \in N$, то из (4.4) получаем

$$\left|\sqrt{m}\tilde{\Delta}_{nm}(p)\right| = A\sin\frac{\pi}{4} = \frac{A}{\sqrt{2}} \geqslant C_0 > 0, \quad C_0 = \mathrm{const}.$$

Пусть теперь $b = i/j$ — дробное число, где $(i,j)=1$, $(4,j)=1$. Тогда

$$\left|\sqrt{m}\tilde{\Delta}_{nm}(i/j)\right| = A\left|\sin\pi\left(\frac{mi}{j} + \frac{1}{4}\right)\right|. \tag{4.5}$$

Разделим mi на j с остатком: $mi = sj + r$, здесь $s, r \in N \cup \{0\}$, $0 \leqslant r < j$. Выражение (4.5) примет вид

$$\left|\sqrt{m}\tilde{\Delta}_{nm}(i/j)\right| = A\left|\sin\pi\left(\frac{r}{j} + \frac{1}{4}\right)\right| \geqslant C_0 > 0.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Если выполнено одно из условий:*

(1) b — любое натуральное число;

(2) $b = i/j$ — любое дробное число, где $(i,j)=1$, $(4,j)=1$,

то при больших m справедлива оценка $\left|\sqrt{m}\tilde{\Delta}_{nm}(b)\right| \geqslant C_0 > 0$.

Из последнего неравенства следует, что

$$\left|\sqrt{m}\Delta_{nm}(b)\right| = \left|\frac{\pi\sqrt{m}\tilde{\Delta}_{nm}(b)}{2\cos\beta\pi}\right| \geqslant \frac{\pi\tilde{C}_0}{2\cos\beta\pi} = \mathrm{const} > 0.$$

Если принять во внимание условие $m \in N$, то при больших значениях m

$$|\Delta_{nm}(b)| \geqslant C_0 = \text{const} > 0. \tag{4.6}$$

Теперь докажем, что ряды из (4.1) и ряды для $(u_{xx} + (2\alpha/x)\,u_x)$, $(u_{yy} + (2\beta/y)\,u_y)$, $(u_{zz} + (2\gamma/z)\,u_z)$, полученные из них дифференцированием, сходятся абсолютно и равномерно в области их рассмотрения. Тогда сумма ряда (4.1) будет решением задачи E^∞. При этом нам понадобятся доказанные ниже леммы.

Лемма 3. *Для достаточно больших натуральных n и m справедливы следующие оценки:*

$$J^2_{1/2+\alpha}(\sigma_n) \geqslant \frac{C_1}{\sigma_n}, \quad J^2_{1/2+\gamma}(\delta_{nm}) \geqslant \frac{C_2}{\delta_{nm}}, \tag{4.7}$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как σ_n $(n \in N)$ есть нули функции $J_{\alpha-1/2}(x)$, то справедливо равенство $\int\limits_0^a x J^2_{\alpha-1/2}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right) dx = \frac{a^2}{2} J^2_{1/2+\alpha}(\sigma_n)$. Из этого равенства следует, что

$$J^2_{1/2+\alpha}(\sigma_n) = \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a x J^2_{\alpha-1/2}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right) dx = \frac{2}{\sigma_n^2}\int\limits_0^{\sigma_n} \xi J^2_{\alpha-1/2}(\xi)\, d\xi. \tag{4.8}$$

В силу асимптотической формулы (4.3), существует некоторое достаточно большое число $C_3 > 0$ такое, что для $\xi > C_3 > 0$ справедливо равенство $\xi J^2_{\alpha-1/2}(\xi) \approx \frac{2}{\pi}\sin^2\left(\xi - \frac{\alpha\pi}{2}\right)$. Тогда, если предположить, что σ_n — достаточно большое число и $\sigma_n > 2(C_3+1)$, то

$$\int\limits_0^{\sigma_n} \xi J^2_{\alpha-1/2}(\xi)\, d\xi > \int\limits_{C_3}^{\sigma_n} \xi J^2_{\alpha-1/2}(\xi)\, d\xi \geqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_{C_3}^{\sigma_n} \sin^2\left(\xi - \frac{\alpha\pi}{2}\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sigma_n - \frac{1}{\pi}\left[C_3 + \cos(\sigma_n + C_3 - \alpha\pi)\sin(\sigma_n - C_3)\right] \geqslant \frac{1}{2\pi}\sigma_n.$$

Если учесть это, то из (4.8) следует первая оценка из (4.7).

Аналогично доказывается вторая оценка из (4.7). Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Для всех $x \in [0, a]$ и при достаточно больших n справедливы следующие оценки:*

$$\left|\tilde{X}_n(x)\right| \leqslant C_4, \tag{4.9}$$

$$\left|x^{-2\alpha}\left[x^{2\alpha}\tilde{X}'_n(x)\right]'\right| \leqslant C_4 (\sigma_n/a)^2, \tag{4.10}$$

где C_4 — некоторое положительное постоянное.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\tilde{X}_n(x) \in C[0, a]$ и для достаточно больших n справедлива асимптотическая формула (4.3). Поэтому справедлива оценка (4.9).

Используя формулу (2.8), из (2.14) найдем $x^{2\alpha}\tilde{X}'_n(x) = -(\sigma_n/a)\,x^{1/2+\alpha}J_{1/2+\alpha}(\sigma_n x/a)$. Вычислим производную первого порядка последней функции по формуле (2.8). Затем, умножая ее на $x^{-2\alpha}$, получим

$$x^{-2\alpha}\left[x^{2\alpha}\tilde{X}'_n(x)\right]' = -(\sigma_n/a)^2 x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x/a) = -(\sigma_n/a)^2\tilde{X}_n(x).$$

Отсюда, в силу (4.9), следует справедливость оценки (4.10). □

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 5. *Для всех $z \in [0, c]$ и натуральных n при достаточно больших m справедливы следующие оценки:*

$$\left|\tilde{Z}_{nm}\left(z\right)\right| \leqslant C_5, \tag{4.11}$$

$$\left|z^{-2\gamma}\left[z^{2\gamma}\tilde{Z}'_{nm}\left(z\right)\right]'\right| \leqslant C_5\left(\delta_{nm}/c\right)^2,$$

где C_5 — некоторое положительное постоянное.

Лемма 6. *Для всех натуральных n при достаточно больших m справедливы следующие оценки:*

$$\left|y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right| \leqslant C_6, \quad y \in [0, +\infty); \tag{4.12}$$

$$\left|y^{-2\beta}\left\{y^{2\beta}\left[y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right]'\right\}'\right| \leqslant C_6\lambda_{nm}, \quad y \in (0, +\infty); \tag{4.13}$$

$$\left|(-y)^{1/2-\beta}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right| \leqslant C_7, \quad y \in [-b, 0]; \tag{4.14}$$

$$\left|(-y)^{-2\beta}\left\{(-y)^{2\beta}\left[(-y)^{1/2-\beta}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right]'\right\}'\right| \leqslant C_7\lambda_{nm}, \quad y \in (-b, 0), \tag{4.15}$$

где C_6, C_7 — некоторые положительные постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $1/2 - \beta \notin Z$, то справедливо равенство

$$y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right) = \pi y^{1/2-\beta}\left[I_{\beta-1/2}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right) - I_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right]\Big/(2\cos\beta\pi).$$

Отсюда в силу того что функции $y^{1/2-\beta}I_{\pm(1/2-\beta)}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)$ ограничены при $y\sqrt{\lambda_{nm}} \in [0, q_1]$, где $q_1 = \text{const} > 0$, следует, что $\left|y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right| < \tilde{C}_6$ при $y\sqrt{\lambda_{nm}} \in [0, q_1]$. Кроме того, на основании асимптотической формулы (2.22), для $\forall n \in N$ при достаточно больших натуральных m справедливы неравенства

$$\left|y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right| \leqslant y^{1/2-\beta}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_{nm}}y}\right)^{1/2} e^{-\sqrt{\lambda_{nm}}y} \leqslant C'_6 \text{ при } y\sqrt{\lambda_{nm}} > q_1.$$

Следовательно, при любых значениях $y \in [0, +\infty)$, $\forall n \in N$ при достаточно больших m, имеем $\left|y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right| \leqslant C_6$. Неравенство (4.12) доказано.

Известно, что функция $Q_{nm}(y) = y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}(y\sqrt{\lambda_{nm}})$ удовлетворяет уравнению (2.1), которое при $Q\left(y\right) = Q_{nm}\left(y\right)$ и $\lambda = \lambda_{nm}$ можно написать в виде $y^{-2\beta}\left[y^{2\beta}Q'_{nm}\left(y\right)\right]' = \lambda_{nm}Q_{nm}\left(y\right)$. Отсюда, в силу (4.12), сразу следует справедливость оценки (4.13).

Теперь рассмотрим функции

$$(-y)^{1/2-\beta}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right) = \tfrac{\pi}{2\cos\beta\pi}(-y)^{1/2-\beta}\left\{J_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right) + J_{\beta-1/2}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right\}.$$

Если здесь учесть ограниченность функций $(-y)^{1/2-\beta}J_{\pm(1/2-\beta)}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)$ при $(-y)\sqrt{\lambda_{nm}} \in [0, q_2]$, где $q_2 = \text{const} > 0$, а также формулы (4.3), то легко следует, что при любых значениях $y \in [-b, 0]$, $\forall n \in N$ и достаточно больших натуральных m, имеет место неравенство (4.14). Доказательство оценки (4.15), проводится аналогично оценке (4.13). Лемма 6 доказана. □

Лемма 7. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$|f(0,z)| < +\infty, \quad f(a,z) = 0, \quad |f(x,0)| < +\infty, \quad f(x,c) = 0, \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{xz}(x,z)\right] \in C([0,a] \times [0,c]), \tag{4.17}$$

$$|f_0(0,z)| < +\infty, \quad f_0(a,z) = 0, \quad |f_0(x,0)| < +\infty, \quad f_0(x,c) = 0, \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{0xz}(x,z)\right] \in C([0,a] \times [0,c]), \tag{4.19}$$

$$\int\limits_0^c \int\limits_0^a \left| x^{\alpha-1/2} z^{\gamma-1/2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{0xz}(x,z)\right]\right| dx\, dz < +\infty. \tag{4.20}$$

Тогда для любого фиксированного n при больших m справедлива оценка

$$|F_{nm}| \leqslant \frac{C_8}{\sigma_n^{4+\varepsilon_3} \delta_{nm}^{4+\varepsilon_4}}, \tag{4.21}$$

где ε_3, ε_4, C_8 — положительные постоянные, и

$$f_0(x,z) = x^{-2\alpha} z^{-2\gamma} (\partial^2/\partial x \partial z)\left[x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{xz}(x,z)\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании формул (2.8) коэффициенты F_{nm}, которые задаются формулой (4.2), представимы в виде

$$F_{nm} = \frac{ac}{\sigma_n \delta_{nm}} \int\limits_0^c \int\limits_0^a f(x,z) \frac{d}{dx}\left[x^{1/2+\alpha} J_{1/2+\alpha}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right)\right] \frac{d}{dz}\left[z^{1/2+\gamma} J_{1/2+\gamma}\left(\frac{\delta_{nm} z}{c}\right)\right] dx\, dz.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям и учитывая условия (4.16), получим

$$F_{nm} = \frac{ac}{\sigma_n \delta_{nm}} \int\limits_0^c \int\limits_0^a f_{xz}(x,z)\, x^{1/2+\alpha} J_{1/2+\alpha}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right) z^{1/2+\gamma} J_{1/2+\gamma}\left(\frac{\delta_{nm} z}{c}\right) dx\, dz.$$

Из последнего, интегрируя по частям и принимая во внимание условия (4.17) и неравенства $\alpha, \gamma \geqslant 1/2$, а также равенства $J_{\alpha-1/2}(\sigma_n) = 0$ и $J_{\gamma-1/2}(\delta_{nm}) = 0$, имеем

$$F_{nm} = \frac{(ac)^2}{\sigma_n^2 \delta_{nm}^2} \int\limits_0^c \int\limits_0^a \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{xz}(x,z)\right] x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right) z^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}\left(\frac{\delta_{nm} z}{c}\right) dx\, dz.$$

Снова интегрируя по частям и учитывая условие (4.18), находим

$$F_{nm} = \frac{(ac)^3}{\sigma_n^3 \delta_{nm}^3} \int\limits_0^c \int\limits_0^a f_{0xz}(x,z)\, x^{1/2+\alpha} J_{1/2+\alpha}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right) z^{1/2+\gamma} J_{1/2+\gamma}\left(\frac{\delta_{nm} z}{c}\right) dx\, dz.$$

Отсюда, интегрируя по частям еще раз и принимая во внимание условия (4.19) и неравенства $\alpha, \gamma \geqslant 1/2$, а также равенства $J_{\alpha-1/2}(\sigma_n) = 0$ и $J_{\gamma-1/2}(\delta_{nm}) = 0$, имеем

$$F_{nm} = \frac{(ac)^4}{\sigma_n^4 \delta_{nm}^4} \int\limits_0^c \int\limits_0^a \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{0xz}(x,z)\right] x^{\frac{1}{2}+\alpha} J_{\alpha-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right) z^{\frac{1}{2}+\gamma} J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta_{nm} z}{c}\right) dx\, dz. \tag{4.22}$$

Известно [16], что если $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция на $[0,l]$, то справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^l xf(x)\,J_p(\lambda_k x)\,dx=0,\quad p>-1, \tag{4.23}$$

здесь λ_k — занумерованные в порядке возрастания положительные нули функции $J_p(x)$.

Так как выполнено условие (4.20), то в силу (4.23) имеет место равенство

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_0^c\int_0^a\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left[x^{2\alpha}z^{2\gamma}f_{0xz}(x,z)\right]x^{1/2+\alpha}J_{\alpha-1/2}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right)z^{1/2+\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\frac{\delta_{nm}z}{c}\right)dx\,dz=0.$$

В силу этого из (4.22) при достаточно больших n и m следует оценка (4.21). □

Согласно работе [16, с. 276], для достаточно больших n справедливо неравенство

$$1/\sigma_n\leqslant 2/n. \tag{4.24}$$

Аналогично, для $\forall n\in N$ при достаточно больших натуральных m справедливо неравенство

$$1/\delta_{nm}\leqslant 2/m. \tag{4.25}$$

Теперь переходим к исследованию сходимости рядов. Из (4.1) почленным дифференцированием формально составим ряды:

$$u_{xx}+\frac{2\alpha}{x}u_x=
=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}x^{-2\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{2\alpha}\tilde{W}_x(x,z)\right](y/b)^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right), & y>0,\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}x^{-2\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{2\alpha}\tilde{W}_x(x,z)\right](-y/b)^{1/2-\beta}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right), & y<0,\end{cases} \tag{4.26}$$

$$u_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y=
=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{W}(x,z)\,y^{-2\beta}\left\{y^{2\beta}\left[(y/b)^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right]'\right\}', & y>0,\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{W}(x,z)\,(-y)^{-2\beta}\left\{(-y)^{2\beta}\left[(-y/b)^{1/2-\beta}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)\right]'\right\}', & y<0,\end{cases} \tag{4.27}$$

$$u_{zz}+\frac{2\gamma}{z}u_z=
=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}z^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma}\tilde{W}_z(x,z)\right](y/b)^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right), & y>0,\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}z^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma}\tilde{W}_z(x,z)\right](-y/b)^{1/2-\beta}\bar{Y}_{1/2-\beta}\left(-y\sqrt{\lambda_{nm}}\right), & y<0,\end{cases} \tag{4.28}$$

В силу оценок (4.6), (4.7), (4.9), (4.11), (4.12), (4.14), (4.21), (4.24) и (4.25), ряд (4.1) при любом $(x, y, z) \in \bar{\Omega}$ и достаточно больших $n,\ m$ мажорируется числовым рядом

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_9}{n^{3+\varepsilon_3} m^{3+\varepsilon_4}},$$

а ряды (4.26), (4.27) и (4.28) при любом (x, y, z) на каждом компакте $K \subset \Omega^+ \cup \Omega^-$ мажорируются соответственно числовыми рядами

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10}}{n^{1+\varepsilon_3} m^{3+\varepsilon_4}}, \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{11}\left(\frac{n^2+m^2}{n^{3+\varepsilon_3} m^{3+\varepsilon_4}}\right), \quad S_4 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{12}}{n^{3+\varepsilon_3} m^{1+\varepsilon_4}},$$

где C_j, $j = \overline{9, 12}$, — некоторые положительные постоянные.

Пользуясь интегральным признаком, нетрудно убедиться, что числовые ряды S_1, S_2, S_3, S_4 сходятся. Тогда, согласно признаку Вейерштрасса [17, с. 427], абсолютно и равномерно сходится ряд (4.1) в $\bar{\Omega}$, а ряды (4.26), (4.27) и (4.28) на каждом компакте $K \subset \Omega^+ \cup \Omega^-$. Поэтому функция $u\,(x, y, z)$, определенная рядом (4.1), удовлетворяет всем условиям задачи E^∞.

Если для указанных в лемме 2 значений b при некоторых $n = s_1, s_2, \ldots, s_j$ и $m = t_1, t_2, \ldots, t_i$, где $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_j < n_0$, $1 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_i < m_0$, s_j, t_i, j и i — заданные натуральные числа, $\Delta_{nm}\,(b) = 0$, то для разрешимости системы (2.23) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\int_0^c \int_0^a f\,(x, z)\, x^{2\alpha} X_n\,(x)\, z^{2\gamma} Z_{nm}\,(z)\; dx\, dz = 0. \tag{4.29}$$

В этом случае решение задачи E^∞ определяется в виде суммы ряда

$$\begin{aligned} u\,(x, y, z) = {} & \left[\sum_{n=1}^{s_1-1}\left(\sum_{m=1}^{t_1-1} + \sum_{m=t_1+1}^{t_2-1} + \ldots + \sum_{m=t_i+1}^{\infty}\right) + \right. \\ & + \sum_{n=s_1+1}^{s_2-1}\left(\sum_{m=1}^{t_1-1} + \sum_{m=t_1+1}^{t_2-1} + \ldots + \sum_{m=t_i+1}^{\infty}\right) + \ldots + \\ & \left. + \sum_{n=s_j+1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{t_1-1} + \sum_{m=t_1+1}^{t_2-1} + \ldots + \sum_{m=t_i+1}^{\infty}\right)\right] \omega_{nm}\,(y)\, X_n\,(x)\, Z_{nm}\,(z) + \\ & + \sum_{l}\sum_{k} C_{lk} u_{lk}\,(x, y, z). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Здесь в последней сумме l принимает значения $s_1, s_2, \ldots, s_j$, а k принимает значения $t_1, t_2, \ldots, t_i$, C_{lk} — произвольные постоянные, $u_{lk}\,(x, y, z)$ определяется по формуле (3.11).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $f\,(x, z)$ удовлетворяет условиям (4.16)–(4.20) и для каждого $n \in N$ при больших значениях m выполнена оценка (4.6). Тогда справедливы следующие утверждения: (1) если $\Delta_{nm}\,(b) \neq 0$ при всех n и m, то существует единственное решение задачи E^∞ и это решение определяется рядом (4.1); (2) если $\Delta_{nm}\,(b) = 0$ при некоторых $n = s_1, s_2, \ldots, s_j$, $m = t_1, t_2, \ldots, t_i$, то задача E^∞ разрешима только тогда, когда выполняются условия ортогональности (4.29) и решение в этом случае определяется рядом (4.30).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // ДАН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
2. Пулькин С. П. О единственности решения сингулярной задачи Геллерстеда // Известия вузов. Математика. 1960. № 6. С. 214–225.
3. Вострова Л. Е., Пулькин С. П. Сингулярная задача с нормальной производной // Волжский математический сборник. 1966. Вып. 5. С. 49–57.
4. Сабитов К. Б. К теории уравнений смешанного типа. М.: Физматлит, 2014.
5. Safina R. M. Keldysh problem for Pul'kins equation in rectangular domain // Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2015. No. 3. P. 53–64. https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4491/43907
6. Safina R. M. Keldysh problem for a mixed-type equation of the second kind with the Bessel operator // Differential Equations. 2015. Vol. 51. No. 10. P. 1347–1359. https://doi.org/10.1134/S0012266115100109
7. Safina R. M. Keldysh problem for mixed type equation with strong characteristic degeneration and singular coefficient // Russian Mathematics. 2017. Vol. 61. Issue 8. P. 46–54. https://doi.org/10.3103/S1066369X17080059
8. Zaitseva N. V. Keldysh type problem for B-hyperbolic equation with integral boundary value condition of the first kind // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. No. 1. P. 162–169. https://doi.org/10.1134/S199508021701022X
9. Urinov A. K., Karimov K. T. The unique solvability of boundary value problems for a 3D elliptic equation with three singular coefficients // Russian Mathematics. 2019. Vol. 63. Issue 2. P. 62–73. https://doi.org/10.3103/S1066369X19020087
10. Уринов А. К., Каримов К. Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами // Актуальные проблемы прикладной математики: тез. докл. междунар. конф. Нальчик–Эльбрус. 2018. С. 253. https://elibrary.ru/item.asp?id=36308506
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
12. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: Изд. ИЛ., 1949.
13. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Мир, 1986.
14. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1963.
15. Urinov A. K., Karimov K. T. The Dirichlet problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2017. Vol. 21. No. 4. P. 665–683. https://doi.org/10.14498/vsgtu1559
16. Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.
17. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 1969.

Поступила в редакцию 25.09.2019

Каримов Камолиддин Туйчибоевич, к. ф.-м. н., доцент, Ферганский государственный университет, 150100, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19.
E-mail: karimovk80@mail.ru

Цитирование: К. Т. Каримов. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 31–48.

K. T. Karimov

Keldysh problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped

Keywords: Keldysh problem, mixed type equation, spectral method, singular coefficient, Bessel function.

MSC2010: 35J15, 35J75

DOI: 10.35634/vm200103

This article studies the Keldysh problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped. Based on the completeness property of eigenfunction systems of two one-dimensional spectral problems, the uniqueness theorem is proved.To prove the existence of a solution to the problem, the Fourier spectral method based on the separation of variables is used. The solution to this problem is constructed in the form of a sum of a double Fourier–Bessel series. In substantiating the uniform convergence of the constructed series, we used asymptotic estimates of the Bessel functions of the real and imaginary argument. Based on them, estimates were obtained for each member of the series, which made it possible to prove the convergence of the series and its derivatives to the second order inclusive, as well as the existence theorem in the class of regular solutions.

REFERENCES

1. Keldysh M. V. On some cases of degenerate elliptic equations on the boundary of a domain, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183 (in Russian).
2. Pul'kin S. P. On uniqueness of solution of singular Hellerstedt problem, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1960, no. 6, pp. 214–225 (in Russian).
3. Vostrova L. E., Pul'kin S. P. Singular problem with a normal derivative, *Volzhsk. Matem. Sborn.*, 1966, no. 5, pp. 49–57 (in Russian).
4. Sabitov K. B. *K teorii uravnenii smeshannogo tipa* (On the theory of equations of the mixed type), Moscow: Fizmatlit, 2014.
5. Safina R. M. Keldysh problem for Pul'kins equation in rectangular domaim, *Vestnik of Samara university*, 2015, no. 3, pp. 53–64. `https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4491/43907`
6. Safina R. M. Keldysh problem for a mixed-type equation of the second kind with the Bessel operator, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 10, pp. 1347–1359. `https://doi.org/10.1134/S0012266115100109`
7. Safina R. M. Keldysh problem for mixed type equation with strong characteristic degeneration and singular coefficient, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, issue 8, pp. 46–54. `https://doi.org/10.3103/S1066369X17080059`
8. Zaitseva N. V. Keldysh type problem for B-hyperbolic equation with integral boundary value condition of the first kind, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2017, vol. 38, no. 1, pp. 162–169. `https://doi.org/10.1134/S199508021701022X`
9. Urinov A. K., Karimov K. T. The unique solvability of boundary value problems for a 3D elliptic equation with three singular coefficients, *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, issue 2, pp. 62–73. `https://doi.org/10.3103/S1066369X19020087`
10. Urinov A. K., Karimov K. T. The Keldysh problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients, *Aktual'nye problemy prikladnoi matematiki: sbornik statei* (Actual problems of applied mathematics), Kabardino Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, 2018, p. 253 (in Russian). `https://elibrary.ru/item.asp?id=36308506`
11. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1972.
12. Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge: Cambridge University Press, 1922. Translated under the title *Teoriya besselevykh funktsii*, Moscow: Inostr. Literat., 1949.

13. Olver F. W. J. *Introduction to asymptotics and special functions*, New York: Academic Press, 1974. Translated under the title *Vvedenie v asimptoticheskie metody i spetsial'nye funktsii*, Moscow: Mir, 1986.
14. Lebedev N. N. *Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya* (Special functions and their applications), Moscow: Fizmatlit, 1963.
15. Urinov A. K., Karimov K. T. The Dirichlet problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 665–683. https://doi.org/10.14498/vsgtu1559
16. Tolstov G. P. *Ryady Fur'e* (Fourier Series), Moscow: Nauka, 1980.
17. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 2* (A course of differential and integral calculus. Vol. 2), Moscow: Fizmatlit, 1963.

Received 25.09.2019

Karimov Kamoliddin Tuychiboyevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Ferghana State University, ul. Murabbiylar, 19, Ferghana, 150100, Uzbekistan.
E-mail: karimovk80@mail.ru

Citation: K. T. Karimov. Keldysh problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 31–48.