МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 18–30.

УДК 517.977

© *И. В. Изместьев*

ДИСКРЕТНАЯ ИГРОВАЯ ЗАДАЧА С ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ В ФОРМЕ КОЛЬЦА

В конечномерном нормированном пространстве рассматривается дискретная игровая задача фиксированной продолжительности. Терминальное множество определяется условием принадлежности нормы фазового вектора отрезку с положительными концами. Множество, определяемое данным условием, названо в работе кольцом. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в заданный момент времени привести фазовый вектор на терминальное множество. Цель второго игрока противоположна. В данной работе построены оптимальные управления игроков. Проведено компьютерное моделирование игрового процесса. Рассмотрена модификация исходной задачи, в которой у первого игрока в неизвестный момент времени происходит изменение в динамике.

Ключевые слова: игра, управление, терминальное множество, поломка.

DOI: 10.35634/vm200102

Введение

В статье рассматривается дискретный конфликтно-управляемый процесс (см., например, [1, с. 65–87], [2, 3]). Дискретные процессы управления возникают, как правило, при решении прикладных задач. Это связано с тем, что получать информацию о состоянии реальных управляемых систем и корректировать управления в них можно только в дискретные моменты времени.

Актуальными являются задачи преследования, когда преследователь стремится сделать в заданный момент времени относительное расстояние не больше одного заданного числа, но не меньше другого заданного числа. В работах [4, 5] множество векторов, определяемое таким условием, названо кольцом. В [4, 5] рассмотрена однотипная дифференциальная игра с непрерывной динамикой, геометрическими ограничениями на управления игроков и терминальным множеством в форме кольца. В [4] построен максимальный стабильный мост. В [5] построены соответствующие оптимальные управления игроков. В работе [6] построено семейство множеств, определяющее необходимые и достаточные условия возможности окончания для дискретного варианта этой задачи.

В данной работе по указанному семейству множеств из [6] построены оптимальные управления игроков в дискретной задаче. С помощью построенных управлений проведено компьютерное моделирование игрового процесса. Кроме того, рассмотрен случай задачи с неизвестным моментом изменения динамики первого игрока.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную игровую задачу с уравнением движения

$$z(i+1) = z(i) - a(i)u(i) + b(i)v(i), \tag{1.1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $a(i) \geqslant 0$, $b(i) \geqslant 0$, $u(i) \in S$, $v(i) \in S$, $i = \overline{0, N-1}$. Здесь $u(i)$ — управление первого игрока, $v(i)$ — управление второго игрока,

$$S = \{s \in \mathbb{R}^n \colon \|s\| \leqslant 1\}.$$

Правило перехода от $z(i)$ к $z(i+1)$, $i=\overline{0,N-1}$. В момент времени i, зная значение $z(i)$, второй игрок выбирает управление $v(i)\in S$ и сообщает о своем выборе первому игроку. После этого первый игрок, зная $z(i)$ и выбранное управление второго игрока $v(i)$, выбирает управление $u(i)\in S$. Затем для выбранной пары управлений по формуле (1.1) реализуется $z(i+1)$.

Заданы числа $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$. Цель первого игрока заключается в выводе вектора $z(N)$ на терминальное множество

$$S(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\{s\in\mathbb{R}^n\colon \varepsilon_1\leqslant\|s\|\leqslant\varepsilon_2\}.$$

Цель второго игрока противоположна.

Отметим, что при $\varepsilon_1=0$ решение может быть получено, например, как частный случай результатов из [7].

§ 2. Необходимые и достаточные условия окончания

В работе [6] было построено семейство множеств $W(i)$, $i=\overline{0,N}$, определяющее необходимые и достаточные условия окончания в рассматриваемой задаче:

(1) $W(N)=S(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$;

(2) пусть $z(i)\in W(i)$, тогда для любого управления $v(i)$ найдется управление $u(i)$, гарантирующее выполнение включения $z(i+1)\in W(i+1)$;

(3) пусть $z(i)\notin W(i)$, тогда найдется управление $v(i)$, гарантирующее выполнение включения $z(i+1)\notin W(i+1)$ при любом управлении $u(i)$.

Однако сами управления игроков в [6] построены не были.

Запишем семейство множеств $W(i)$, $i=\overline{0,N}$ (см. [6]), в следующем виде:

$$W(i)=\begin{cases} S(f_1(i),f_2(i)) & \text{при } \min\limits_{k=\overline{i,N}}(f_2(k)-f_1(k))\geqslant 0,\\ \varnothing & \text{иначе,}\end{cases}$$

где $f_2(N)=\varepsilon_2$ и при $i=\overline{0,N-1}$

$$f_2(i)=\varepsilon_2+\sum_{j=i}^{N-1}(a(j)-b(j)); \tag{2.1}$$

$f_1(N)=\varepsilon_1$ и при $i=\overline{0,N-1}$

$$f_1(i)=\begin{cases}\varepsilon_1-\sum\limits_{j=i}^{N-1}(a(j)-b(j)) & \text{при } f_1(i+1)-a(i)>0,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases} \tag{2.2}$$

§ 3. Решение задачи преследования

Лемма 1. *Пусть $f_1(i)>0$ и $W(i)\neq\varnothing$, $i=\overline{0,N-1}$, тогда*

$$f_1(k)\leqslant\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\leqslant f_2(k)$$

при $k=\overline{i,N-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия $W(i) \neq \varnothing$ следуют неравенства

$$f_1(j) \leqslant f_2(j) \quad \text{при} \quad j = \overline{i, N-1}. \tag{3.1}$$

Обозначим при $i \in \overline{0, N-1}$

$$g(i) = \sum_{j=i}^{N-1} (a(j) - b(j)).$$

Предположим противное утверждению леммы, а именно, пусть

$$f_2(i) = \varepsilon_2 + g(i) < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}.$$

Тогда

$$g(i) < \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}. \tag{3.2}$$

С другой стороны, учитывая (3.1) и (2.2), имеем систему неравенств

$$f_2(i) < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} < \varepsilon_1 - g(i) = f_1(i).$$

Таким образом, пришли к противоречию с (3.1).

Предположим противное, а именно, пусть

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} < f_1(i) = \varepsilon_1 - g(i).$$

Отсюда получим (3.2). С другой стороны, учитывая (2.1) и (3.2), имеем систему неравенств

$$f_1(t) > \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} > \varepsilon_2 + g(t) = f_2(t).$$

Пришли к противоречию с (3.1). Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть $z(i) \in W(i)$, тогда для любого управления второго игрока $v(i) \in S$ найдется управление первого игрока $u(i) \in S$, гарантирующее выполнение включения $z(i+1) \in W(i+1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Случай 1.* Пусть $f_1(i+1) = 0$.

Случай 1.1. Пусть $\|z(i) + b(i)v(i)\| > a(i)$, тогда первый игрок берет управление

$$u(i) = \frac{z(i) + b(i)v(i)}{\|z(i) + b(i)v(i)\|}.$$

Отсюда и из формул (1.1), (2.1) следуют неравенства

$$\|z(i+1)\| = \|z(i) - a(i)u(i) + b(i)v(i)\| = \|z(i) + b(i)v(i)\| - a(i) \leqslant \|z(i)\| + b(i) - a(i) \leqslant f_2(i+1).$$

Случай 1.2. Пусть $\|z(i) + b(i)v(i)\| \leqslant a(i)$, тогда первый игрок берет управление

$$u(i) = \frac{z(i) + b(i)v(i)}{a(i)} \text{ при } a(i) > 0 \quad \text{и любое } u(i) \in S \text{ при } a(i) = 0.$$

Подставляя это управление в формулу (1.1), получим

$$\|z(i+1)\| = \|z(i) - a(i)u(i) + b(i)v(i)\| = 0 \leqslant f_2(i+1).$$

Случай 2. Пусть $f_1(i+1) > 0$.

Случай 2.1. Пусть
$$\|z(i) + b(i)v(i)\| \geqslant \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \tag{3.3}$$
Отметим, что в этом случае $\|z(i) + b(i)v(i)\| \neq 0$.

Случай 2.1.1. Пусть
$$\|z(i) + b(i)v(i)\| - a(i) \geqslant \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \tag{3.4}$$
тогда первый игрок берет управление
$$u(i) = \frac{z(i) + b(i)v(i)}{\|z(i) + b(i)v(i)\|}.$$
Отсюда и из формул (1.1), (2.1) следуют неравенства
$$\|z(i+1)\| = \|z(i) + b(i)v(i)\| - a(i) \leqslant \|z(i)\| + b(i) - a(i) \leqslant f_2(i+1).$$
С другой стороны, согласно неравенству (3.4) и лемме 1,
$$\|z(i+1)\| \geqslant \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \geqslant f_1(i+1).$$

Случай 2.1.2. Пусть
$$\|z(i) + b(i)v(i)\| - a(i) < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \tag{3.5}$$
Отсюда и из (3.3) следует, что в этом случае $a(i) > 0$. Первый игрок берет управление
$$u(i) = \frac{1}{a(i)} \left(\|z(i) + b(i)v(i)\| - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right) \frac{z(i) + b(i)v(i)}{\|z(i) + b(i)v(i)\|}.$$
Отметим, что $u(i) \in S$, поскольку из (3.3) и (3.5) следуют неравенства
$$0 \leqslant \frac{1}{a(i)} \left(\|z(i) + b(i)v(i)\| - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right) < 1.$$

Подставив это управление в (1.1), получим
$$z(i+1) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \frac{z(i) + b(i)v(i)}{\|z(i) + b(i)v(i)\|}, \quad \|z(i+1)\| = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}.$$
Из леммы 1 получим требуемые неравенства $f_1(i+1) \leqslant \|z(i+1)\| \leqslant f_2(i+1)$.

Случай 2.2. Пусть
$$\|z(i) + b(i)v(i)\| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \tag{3.6}$$

Случай 2.2.1. Пусть
$$\|z(i) + b(i)v(i)\| + a(i) < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \tag{3.7}$$
Тогда первый игрок берет управление
$$u(i) = -\frac{z(i) + b(i)v(i)}{\|z(i) + b(i)v(i)\|} \text{ при } \|z(i) + b(i)v(i)\| > 0; \quad u(i) = s \text{ при } \|z(i) + b(i)v(i)\| = 0,$$
где s любой вектор с $\|s\| = 1$.

Подставляя это управление в (1.1), получим равенство

$$\|z(i+1)\| = \|z(i) + b(i)v(i)\| + a(i). \tag{3.8}$$

Если $f_1(i) = 0$, то, согласно (2.2), $f(i+1) - a(i) \leqslant 0$. Отсюда и из (3.8) получим неравенство $\|z(i+1)\| \geqslant f(i+1)$. Если же $f_1(i) > 0$, то, используя (2.2), получим неравенства

$$\|z(i+1)\| \geqslant \|z(i)\| - b(i) + a(i) \geqslant f_1(i+1).$$

С другой стороны, согласно (3.7), (3.8) и лемме 1,

$$\|z(i+1)\| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \leqslant f_2(i+1).$$

Случай 2.2.2. Пусть

$$\|z(i) + b(i)v(i)\| + a(i) \geqslant \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \tag{3.9}$$

Отсюда и из (3.6) следует, что в этом случае $a(i) > 0$. Первый игрок берет управление

$$u(i) = \frac{1}{a(i)} \left(\|z(i) + b(i)v(i)\| - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right) \frac{z(i) + b(i)v(i)}{\|z(i) + b(i)v(i)\|} \text{ при } \|z(i) + b(i)v(i)\| > 0;$$

$$u(i) = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2a(i)} s \text{ при } \|z(i) + b(i)v(i)\| = 0,$$

где s любой вектор с $\|s\| = 1$. Отметим, что $u(i) \in S$, поскольку из (3.6) и (3.9) следуют неравенства

$$-1 \leqslant \frac{1}{a(i)} \left(\|z(i) + b(i)v(i)\| - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right) < 0.$$

Подставив это управление в (1.1), получим $\|z(i+1)\| = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$. Из леммы 1 следуют требуемые неравенства $f_1(i+1) \leqslant \|z(i+1)\| \leqslant f_2(i+1)$. □

§ 4. Решение задачи уклонения

Теорема 2. *Пусть $z(i) \notin W(i)$, тогда найдется управление второго игрока $v(i) \in S$, гарантирующее выполнение включения $z(i+1) \notin W(i+1)$ при любом управлении первого игрока $u(i) \in S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Случай 1.* Пусть $W(i+1) \neq \varnothing$.

Если $W(i) \neq \varnothing$, то условие $z(i) \notin W(i)$ равносильно выполнению одного из неравенств $\|z(i)\| > f_2(i)$ или $\|z(i)\| < f_1(i)$.

Если же $W(i) = \varnothing$, то из условия $W(i+1) \neq \varnothing$ следует $f_2(i) < f_1(i)$. Таким образом, должно выполниться одно из неравенств $\|z(i)\| > f_2(i)$ или $\|z(i)\| < f_1(i)$.

Случай 1.1. Пусть

$$\|z(i)\| > f_2(i). \tag{4.1}$$

Второй игрок берет управление

$$v(i) = \frac{z(i)}{\|z(i)\|} \text{ при } \|z(i)\| > 0 \text{ и } v(i) = s \text{ при } \|z(i)\| = 0,$$

где s любой вектор с $\|s\| = 1$. Используя (1.1), (2.1) и (4.1), получим неравенства

$$\|z(i+1)\| \geqslant \|z(i) + b(i)v(i)\| - a(i) = \|z(i)\| + b(i) - a(i) > f_2(i+1).$$

Случай 1.2. Пусть
$$\|z(i)\| < f_1(i). \tag{4.2}$$

В случае $\|z(i)\| - b(i) > 0$ второй игрок берет управление
$$v(i) = -\frac{z(i)}{\|z(i)\|}.$$

Отсюда и из (1.1), (2.2), (4.2) следуют неравенства
$$\|z(i+1)\| \leqslant \left\| z(i) - \frac{z(i)}{\|z(i)\|} b(i) \right\| + a(i) = \|z(i)\| - b(i) + a(i) < f_1(i+1).$$

В случае $\|z(i)\| - b(i) \leqslant 0$ второй игрок берет управление
$$v(i) = -\frac{z(i)}{b(i)} \text{ при } b(i) > 0 \quad \text{и} \quad \text{любое } v(i) \in S \text{ при } b(i) = 0.$$

Из (4.2) следует, что $f_1(i) > 0$. Тогда, согласно (2.2), $a(i) < f(i+1)$. Отсюда и из (1.1) получим оценку
$$\|z(i+1)\| \leqslant \|z(i) + b(i)v(i)\| + a(i) = a(i) < f(i+1).$$

Случай 2. Пусть $W(i+1) = \varnothing$. Тогда второй игрок может брать любое управление $v(i) \in S$.

□

§ 5. Компьютерное моделирование игрового процесса

Рассмотрим задачу преследования, в которой уравнения движения первого игрока (преследователя) и второго игрока (убегающего) имеют вид
$$z_1(i+1) = z_1(i) + a(i)u(i) \quad \text{и} \quad z_2(i+1) = z_2(i) + b(i)v(i), \tag{5.1}$$
соответственно. Здесь $z_1(i) \in \mathbb{R}^n$, $z_2(i) \in \mathbb{R}^n$ при $i = \overline{0, N}$; $a(i) \geqslant 0$, $b(i) \geqslant 0$, $u(i) \in S$, $v(i) \in S$ при $i = \overline{0, N-1}$.

В момент времени i, зная значения $z_1(i)$ и $z_2(i)$, второй игрок выбирает управление $v(i) \in S$ и сообщает о своем выборе первому игроку. После этого первый игрок, зная $z_1(i)$, $z_2(i)$ и выбранное управление второго игрока $v(i)$, выбирает управление $u(i) \in S$. Затем для выбранной пары управлений по формуле (5.1) реализуются $z_1(i+1)$ и $z_2(i+1)$.

Цель преследователя осуществить неравенства $\varepsilon_1 \leqslant \|z_2(N) - z_1(N)\| \leqslant \varepsilon_2$. Цель убегающего противоположна. После замены переменных $z(i) = z_2(i) - z_1(i)$ рассматриваемая задача преследования примет вид (1.1).

На языке программирования C++ в среде разработки Builder 6 написана программа, моделирующая игровой процесс в задаче (5.1) в случае $\mathbb{R}^2$ (см. рис. 1 и 2).

Пользователь программы вводит параметры игры (радиусы кольца — «Eps1» и «Eps2»; «a b» — значения $a(i)$ и $b(i)$) и начальные координаты игроков («Px», «Py» — начальное положение преследователя; «Ex», «Ey» — начальное положение убегающего) и нажимает кнопку «Ввести параметры». После этого первый и второй игрок изображаются на плоскости как точки красного и синего цвета, соответственно. Вокруг точки, соответствующей положению первого игрока, описывается две окружности с радиусами «Eps1» и «Eps2», которые задают кольцо.

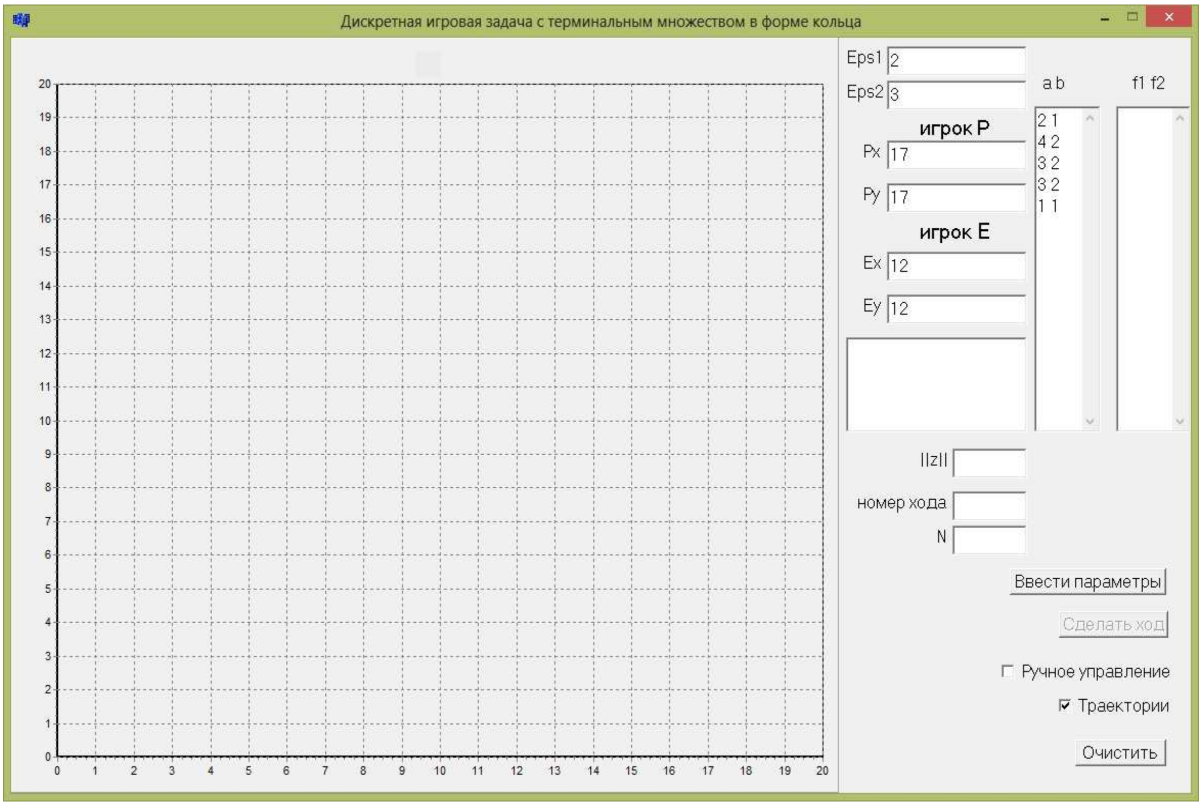

Рис. 1: Ввод параметров игры и начального положения игроков

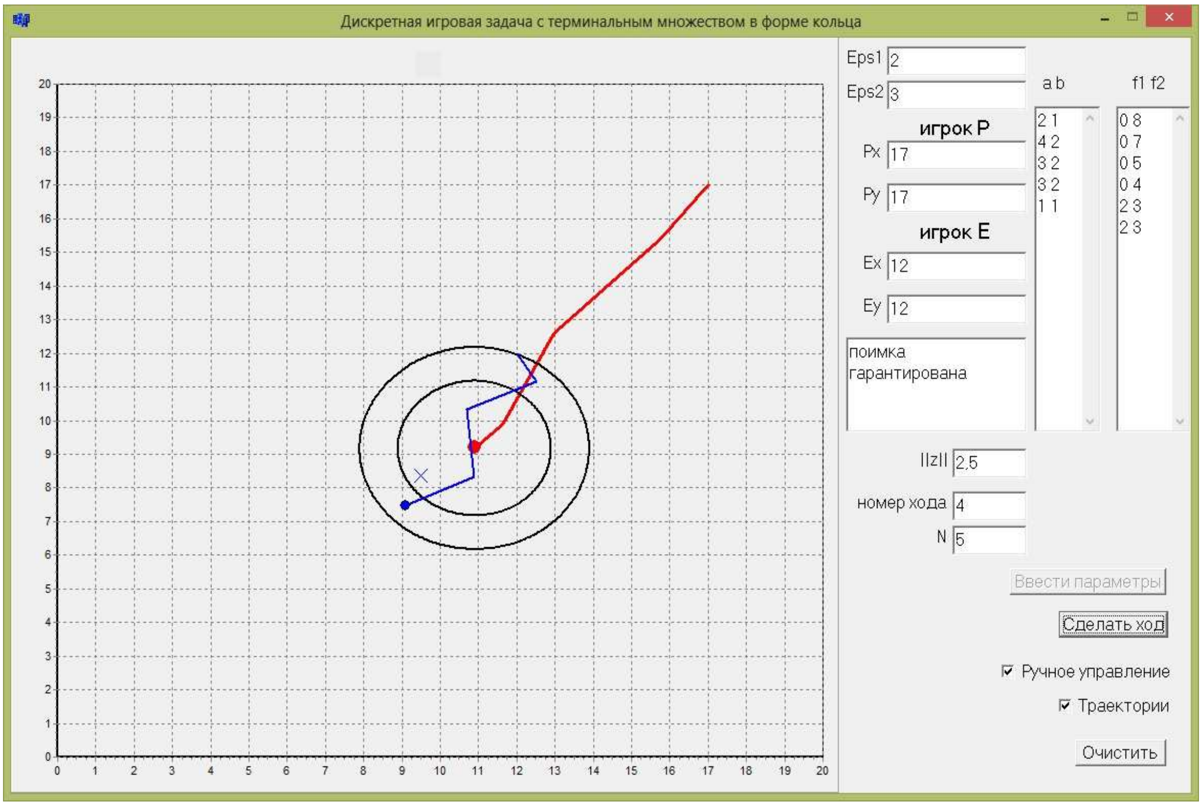

Рис. 2: Движение в случае ручного управления вторым игроком

Программа содержит также информационные поля, которые заполняются после нажатия кнопки «Ввести параметры». В поле «N» отображается продолжительность игры, которая равна количеству строк, введенных в поле «a b». В «f1 f2» выводятся вычисленные значения $f_1(i)$, $f_2(i)$. Кроме того, существует поле, в котором предсказывается возможность поимки убегающего. В случае, если начальная позиция принадлежит множеству $W(0)$, отображается сообщение «поимка гарантирована». В противном случае отображается сообщение «2–ой игрок может уклониться».

Кнопка «Сделать ход» задает пересчет позиций игроков по правилу (5.1). В поле «номер хода» отображается количество уже сделанных ходов. Если включен индикатор «Траектория», то происходит отрисовка траекторий игроков.

Пользователь программы может управлять вторым игроком вручную. Для этого необходимо включить индикатор «Ручное управление». В этом случае управление первого игрока строится согласно алгоритму из § 3, а положение второго игрока в следующий момент времени пользователь выбирает с помощью курсора мыши (см. пример траекторий игроков на рис. 2). Если индикатор «Ручное управление» неактивен, то программа демонстрирует движение игроков в случае оптимальных управлений.

После N ходов игровой процесс останавливается.

§ 6. Задача с неизвестным моментом изменения динамики первого игрока

Рассмотрим модификацию исходной задачи, в которой

$$a(i,\tau)=\begin{cases} a_1(i), & \text{при } 0\leqslant i<\tau,\\ a_2(i), & \text{при } \tau\leqslant i<N,\end{cases}$$

где $a_1(i)\geqslant 0$, $a_2(i)\geqslant 0$, $i=\overline{0,N-1}$.

Такое изменение динамики может произойти в результате поломки [8,9]. Момент поломки $\tau\in\overline{0,N}$ первому игроку заранее не известен. Информацию о том, произошла поломка или нет, первый игрок получает в начале каждого хода до выбора своего управления $u(i)$.

Рассмотрим случай, когда момент изменения динамики первого игрока τ выбирает второй игрок.

Обозначим $f_2(N,\tau)=\varepsilon_2$ и при $i=\overline{0,N-1}$

$$f_2(i,\tau)=\varepsilon_2+\sum_{j=i}^{N-1}(a(j,\tau)-b(j));$$

$f_1(N,\tau)=\varepsilon_1$ и при $i=\overline{0,N-1}$

$$f_1(i,\tau)=\begin{cases} \varepsilon_1-\sum\limits_{j=i}^{N-1}(a(j,\tau)-b(j)) & \text{при } f_1(i+1,\tau)-a(i,\tau)>0,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Определим семейство множеств $W^*(i)$, $i=\overline{0,N}$:

$$W^*(i)=\begin{cases} S(f_1^*(i),f_2^*(i)) & \text{при } \min\limits_{i\leqslant k\leqslant N}(f_2^*(k)-f_1^*(k))\geqslant 0,\\ \varnothing & \text{иначе.}\end{cases}$$

Здесь $f_2^*(N)=\varepsilon_2$ и при $i=\overline{0,N-1}$

$$f_2^*(i)=\min_{i\leqslant\tau\leqslant N}f_2(i,\tau)=\varepsilon_2+\min_{i\leqslant\tau\leqslant N}\sum_{j=i}^{N-1}(a(j,\tau)-b(j));$$

$f_1^*(N) = \varepsilon_1$ и при $i = \overline{0, N-1}$

$$f_1^*(i) = \max_{i \leqslant \tau \leqslant N} f_1(i,\tau) = \begin{cases} \varepsilon_1 - \min\limits_{\tau \in T(i)} \sum\limits_{j=i}^{N-1} (a(j,\tau) - b(j)) & \text{при } T(i) \neq \varnothing, \\ 0 & \text{при } T(i) = \varnothing, \end{cases}$$

где $T(i) = \{\tau \in \overline{i, N} \colon f_1(i,\tau) > 0\}$.

Теорема 3. *Пусть $z(i) \in W^*(i)$, тогда для любого управления второго игрока $v(i) \in S$ найдется управление первого игрока $u(i) \in S$, гарантирующее выполнение включения $z(i+1) \in W^*(i+1)$ при любом моменте изменения динамики $\tau \in \overline{i, N}$.*

Доказательство. Обозначим за $a_*(i)$ ставшее известным в начале хода значение $a(i,\tau)$: $a_1(i)$ или $a_2(i)$. Можно показать, что

$$f_2^*(i) \leqslant f_2^*(i+1) + a_*(i) - b(i); \tag{6.1}$$

$$F(f_1^*(i+1) - a_*(i), b(i)) \leqslant f_1^*(i), \tag{6.2}$$

где $F(0,\sigma) = 0$ при любом $\sigma \geqslant 0$; $F(\delta,\sigma) = \delta + \sigma$ при любых $\delta > 0$ и $\sigma \geqslant 0$.

Случай 1. Пусть $f_1^*(i+1) \leqslant \|z(i) + b(i)v(i)\| \leqslant f_2^*(i+1)$. Тогда первый игрок берет управление $u(i) = 0$. Отсюда и из (1.1) получим $z(i+1) \in W^*(i+1)$.

Случай 2. Пусть

$$\|z(i) + b(i)v(i)\| > f_2^*(i+1). \tag{6.3}$$

Отсюда и из (6.1) следует, что в этом случае $a_*(i) > 0$. Первый игрок берет управление

$$u(i) = \frac{\|z(i) + b(i)v(i)\| - f_2^*(i+1)}{a_*(i)} \frac{z(i) + b(i)v(i)}{\|z(i) + b(i)v(i)\|}.$$

Отметим, что $u(i) \in S$, поскольку из неравенств $\|z(i)\| \leqslant f_2^*(i)$, (6.1) и (6.3) следуют неравенства

$$0 < \frac{\|z(i) + b(i)v(i)\| - f_2^*(i+1)}{a_*(i)} \leqslant \frac{f_2^*(i) + b(i) - f_2^*(i+1)}{a_*(i)} \leqslant 1.$$

Подставив это управление в формулу (1.1), получим равенство $\|z(i+1)\| = f_2^*(i+1)$.

Случай 3. Пусть

$$\|z(i) + b(i)v(i)\| < f_1^*(i+1). \tag{6.4}$$

Отсюда и из (6.2) следует, что в этом случае $a_*(i) > 0$. Первый игрок берет управление

$$u(i) = \frac{\|z(i) + b(i)v(i)\| - f_1^*(i+1)}{a_*(i)} \frac{z(i) + b(i)v(i)}{\|z(i) + b(i)v(i)\|} \quad \text{при} \quad \|z(i) + b(i)v(i)\| > 0,$$

$$u(i) = -\frac{f_1^*(i+1)}{a_*(i)} s \quad \text{при} \quad \|z(i) + b(i)v(i)\| = 0,$$

где s — любой вектор с $\|s\| = 1$. Покажем, что $u(i) \in S$. Пусть $f_1^*(i+1) - a_*(i) > 0$, тогда из неравенств $f_1^*(i) \leqslant \|z(i)\|$, (6.2) и (6.4) следуют неравенства

$$-1 \leqslant \frac{f_1^*(i) - b(i) - f_1^*(i+1)}{a_*(i)} \leqslant \frac{\|z(i) + b(i)v(i)\| - f_1^*(i+1)}{a_*(i)} < 0.$$

Пусть $f_1^*(i+1) - a_*(i) \leqslant 0$, тогда отсюда и из (6.4) следуют неравенства

$$-1 \leqslant -\frac{f_1^*(i+1)}{a_*(i)} \leqslant \frac{\|z(i) + b(i)v(i)\| - f_1^*(i+1)}{a_*(i)} < 0.$$

Подставив это управление в формулу (1.1), получим равенство $\|z(i+1)\| = f_1^*(i+1)$. $\square$

Замечание 1. На i-том ходе два момента изменения динамики $\tau_1 = i$ и $\tau_2 < i$ эквивалентны друг другу в том смысле, что $a(j,\tau_1) = a(j,\tau_2) = a_2(j)$ при $j = \overline{i, N-1}$. Поэтому в условии теоремы 3 и во всех следующих ниже рассуждениях $\tau \in \overline{i, N}$.

Теорема 4. *Пусть $z(i) \notin W^*(i)$, тогда найдется управление второго игрока $v(i) \in S$ и момент изменения динамики $\tau \in \overline{i, N}$, гарантирующие невыполнение включения $z(i+1) \notin W^*(i+1)$ при любом управлении первого игрока $u(i) \in S$.*

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $W^*(i+1) \neq \varnothing$.

Случай 1.1. Пусть $\|z(i)\| > f_2^*(i)$. Тогда второй игрок выбирает момент изменения динамики $\tau_* \in \overline{i, N}$ такой, что
$$f_2^*(i) = f_2(i, \tau_*). \tag{6.5}$$
Строя свое управление так, как это описано в случае 1.1 доказательства теоремы 2, второй игрок гарантирует выполнение неравенства $\|z(i+1)\| > f_2(i+1, \tau_*)$.

Покажем, что $f_2(i+1,\tau_*) = f_2^*(i+1)$. В самом деле, из определения функции f_2^* и замечания 1 следует неравенство $f_2(i+1,\tau_*) \geqslant f_2^*(i+1)$. С другой стороны, используя (6.1) и (6.5), получим

$$f_2(i+1,\tau_*) = f_2(i,\tau_*) - a(i,\tau_*) + b(i) = f_2^*(i) - a(i,\tau_*) + b(i) \leqslant f_2^*(i+1).$$

Таким образом, получили неравенство $\|z(i+1)\| > f_2^*(i+1)$.

Случай 1.2. Пусть $\|z(i)\| < f_1^*(i)$. Тогда второй игрок выбирает момент изменения динамики $\tau_* \in \overline{i, N}$ такой, что $f_1^*(i) = f_1(i,\tau_*)$. Строя свое управление так, как это описано в случае 1.2 доказательства теоремы 2, второй игрок гарантирует выполнение неравенства $\|z(i+1)\| < f_1(i+1,\tau_*)$. Действуя по аналогии со случаем 1.1, можно показать равенство $f_1(i+1,\tau_*) = f_1^*(i+1)$. Следовательно, $\|z(i+1)\| < f_1^*(i+1)$.

Случай 2. Пусть $W^*(i+1) = \varnothing$. Тогда второй игрок на i-том ходе может брать любое управление $v(i) \in S$, не выбирая момент изменения динамики τ. □

Таким образом, из теорем 3 и 4 следует, что семейство множеств $W^*(i)$, $i = \overline{0, N}$, задает необходимые и достаточные условия окончания для модификации исходной задачи, в которой момент изменения динамики первого игрока τ выбирает второй игрок.

В перспективе, если предположить, что момент изменения динамики τ не зависит от выбора второго игрока, данная задача может быть рассмотрена в рамках теории игр с неопределенностью [10, 11].

Финансирование. Работа поддержана РНФ (грант № 19–11–00105).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
3. Шориков А. Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
4. Ухоботов В. И. Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца // Некоторые задачи динамики и управления: сб. науч. трудов. Челябинский государственный университет. Челябинск, 2005. С. 108–123.
5. Ухоботов В. И., Изместьев И. В. Однотипные дифференциальные игры с терминальным множеством в форме кольца // Динамика систем и процессы управления (SDCP’2014): Труды международной научной конференции (Екатеринбург, 15–20 сентября 2014 г.). ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. С. 325–332.

6. Никитина С. А., Ухоботов В. И. Дискретная динамическая задача управления с терминальным множеством в форме кольца // Вестник РАЕН. 2019. Т. 19. № 2. С. 120–121.
7. Ухоботов В. И., Стабулит И. С. Динамическая задача управления при наличии помехи и с заданным множеством моментов коррекций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 74–81. https://doi.org/10.20537/vm180107
8. Никольский М. С. Задача о переправе с возможной остановкой двигателя // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 11. С. 1937–1940.
9. Ухоботов В. И. Об одной задаче управления при наличии помехи и возможной поломке // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 265–278. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-265-278
10. Жуковский В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. М.: Международный НИИ проблем управления, 1997.
11. Adukova N. V., Kudryavtsev K. N. Sorger game under uncertainty: Discrete case // Communications in Computer and Information Science. 2018. Vol. 87. P. 207–219. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93800-4_17

Поступила в редакцию 20.11.2019

Изместьев Игорь Вячеславович, к. ф.-м. н., Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: j748e8@gmail.com

Цитирование: И. В. Изместьев. Дискретная игровая задача с терминальным множеством в форме кольца // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 18–30.

MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 1. Pp. 18–30.

I. V. Izmest'ev

Discrete game problem with ring–shaped terminal set

Keywords: game, control, terminal set, breakdown.

MSC2010: 91A23, 49N75

DOI: 10.35634/vm200102

In a normed space of finite dimension a discrete game problem with fixed duration is considered. The terminal set is determined by the condition that the norm of the phase vector belongs to a segment with positive ends. In this paper, a set defined by this condition is called a ring. The aim of the first player is to lead a phase vector to the terminal set at fixed time. The aim of the second player is the opposite. In this paper, optimal controls of the players are constructed. Computer simulation of the game process is performed. A modification of the original problem, in which at an unknown time there is a change in the dynamics of the first player, is considered.

Funding. This work supported by the Russian Science Foundation (grant no. 19–11–00105).

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967.
2. Propoi A. I. *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov* (Elements of the theory of optimal discrete processes), Moscow: Nauka, 1973.
3. Shorikov A. F. *Minimaksnoe otsenivanie i upravlenie v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh* (Minimax estimation and control in discrete-time dynamical systems), Yekaterinburg: Ural Univ., 1997.
4. Ukhobotov V. I. Single-type differential game with terminal set in form of a ring, *Nekotorye zadachi dinamiki i upravleniya: sbornik nauchnykh trudov* (Some problems of dynamic and control: Transactions), Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 2005, pp. 108–123 (in Russian).
5. Ukhobotov V. I., Izmest'ev I. V. Single-type differential games with terminal set in form of a ring, *Dinamika sistem i protsessy upravleniya* (System dynamic and control processes): Proceedings of International Conference SDCP'2014 (Ekaterinburg, Russia, Sept. 15–20, 2014), IMM UrO RAN, Ekaterinburg, 2015, pp. 325–332 (in Russian).
6. Nikitina S. A., Ukhobotov V. I. Discrete dynamic control problem with terminal set in form of ring, *Vestn. Ross. Akad. Est. Nauk*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 120–121 (in Russian).
7. Ukhobotov V. I., Stabulit I. S. Dynamic control problem under interference with a given set of correction momenta, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 74–81 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180107
8. Nikol'skii M. S. The crossing problem with possible engine shutoff, *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 11, pp. 1681–1684.
9. Ukhobotov V. I. On a control problem under a disturbance and a possible breakdown, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 265–278 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-265-278
10. Zhukovskii V. I. *Vvedenie v differentsial'nye igry pri neopredelennosti* (Introduction to differential games with uncertainty), Moscow: MNIIPU, 1997.
11. Adukova N. V., Kudryavtsev K. N. Sorger game under uncertainty: Discrete case, *Communications in Computer and Information Science*, 2018, vol. 31, pp. 207–219. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93800-4_17

Received 20.11.2019

Izmest'ev Igor' Vyacheslavovich, Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: j748e8@gmail.com

Citation: I. V. Izmest'ev. Discrete game problem with ring–shaped terminal set, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 18–30.