

## Решение краевых задач с помощью $S$ -сплайна

Д. А. Силаев<sup>1,a</sup>, Д. О. Коротаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
механико-математический факультет,  
119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, Главное здание

<sup>2</sup> Институт автоматизации проектирования РАН,  
123056, г. Москва, 2-я Брестская ул., д. 19/18

E-mail: <sup>a</sup> dasilaev@mail.ru

Получено 25 сентября 2008 г.

Данная работа посвящена применению теории  $S$ -сплайнов для решения уравнений в частных производных на примере уравнения Пуассона.  $S$ -сплайн — кусочно-полиномиальная функция, коэффициенты полиномов которой определяются из двух условий: первая часть коэффициентов определяется условиями гладкой склейки, остальные определяются методом наименьших квадратов. В зависимости от порядка рассматриваемых полиномов и соотношения между количеством условий первого и второго типов мы получаем  $S$ -сплайны с разными свойствами. На настоящий момент изучены сплайны 3-й степени класса  $C^1$  и сплайны 5-й степени класса  $C^2$  (т. е. на них накладывались условия гладкой склейки вплоть до первой и второй производных соответственно). Мы рассмотрим, каким образом могут быть применены сплайны 3-й степени класса  $C^1$  при решении уравнения Пуассона на круге и в других областях.

Ключевые слова: теория  $S$ -сплайнов, уравнение Пуассона, решение дифференциальных уравнений

### Solving of boundary tasks by using $S$ -spline

D. A. Silaev<sup>1</sup>, D. O. Korotaev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU, Glavnoe Zdanie, GSP-1, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia

<sup>2</sup> Institute for Computer Aided Design, 2<sup>nd</sup> Brestskaya str. 19/18, Moscow, 123056, Russia

**Abstract.** — This article is dedicated to use of  $S$ -spline theory for solving equations in partial derivatives. For example, we consider solution of the Poisson equation.  $S$ -spline — is a piecewise-polynomial function. Its coefficients are defined by two states. The first part of coefficients are defined by smoothness of the spline. The second coefficients are determined by least-squares method. According to order of considered polynomial and number of conditions of first and second type we get  $S$ -splines with different properties. At this moment we have investigated order 3  $S$ -splines of class  $C^1$  and order 5  $S$ -splines of class  $C^2$  (they meet conditions of smoothness of order 1 and 2 respectively). We will consider how the order 3  $S$ -splines of class  $C^1$  can be applied for solving equation of Poisson on circle and other areas.

Key words:  $S$ -spline theory, Poisson equation, differential equations solving

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 2, pp. 161–171 (Russian).

## 1. Одномерный $S$ -сплайн

### 1.1. Определение одномерного $S$ -сплайна

Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  равномерную сетку  $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$ ,  $x_k = a + kh$ ,  $h$  — шаг сетки. Рассмотрим на  $[a, b]$  еще одну равномерную сетку  $\{\xi_l\}_{l=0}^{l=L}$ ,  $\xi_l = a + lH$ ,  $H = mh, m \in \mathbb{Z}$ . Пусть  $y = (y_0, y_1, \dots, y_K) \in \mathbb{R}^{K+1}$  и  $y'_0 \in \mathbb{R}$ . Обозначим

$$P^n \left\{ u : u(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{j=2}^n a_j x^j \right\}$$

множество полиномов степени  $n$  с фиксированными коэффициентами  $a_0, a_1$ . Рассмотрим функционал:  $\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^M (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2$ .

В классе  $P^n$  ищется такой полином, который минимизирует  $\Phi^l$  и удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$a_0^0 = y_0, a_1^0 = y'_0 \quad (1.1)$$

и условиям гладкой склейки двух последовательных полиномов

$$a_0^l = g_{l-1}(\xi_l - \xi_{l-1}) = g_{l-1}(H), a_1^l = g'_{l-1}(H). \quad (1.2)$$

**Определение 1.**  $S$ -сплайном назовем функцию  $S_{m,m}^n(x)$ , которая совпадает с полиномом  $g_l(x)$  на отрезке  $\xi_l \leq x < \xi_{l+1}$ .

**Определение 2.** Периодическим  $S$ -сплайном называется  $S$ -сплайн, являющийся периодической функцией на отрезке  $[a, b]$ .

Предположение периодичности означает замену начальных условий (1.1) на следующие условия периодичности:

$$a_0^0 = g_{L-1}(H), a_1^0 = g'_{L-1}(H). \quad (1.3)$$

Здесь  $L$  — число полиномов, составляющих сплайн.

### 1.2. Построение системы линейных уравнений

Условия минимизации функционала  $\Phi^l(u)$  дадут нам следующие уравнения:

$$\begin{cases} S_2 a_0^l + S_3 a_1^l h + S_4 a_2^l h^2 + S_5 a_3^l h^3 = P_1^l, \\ S_3 a_0^l + S_4 a_1^l h + S_5 a_2^l h^2 + S_6 a_3^l h^3 = P_2^l, \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$S_j = \sum_{k=0}^M k^j, P_j^l = \sum_{k=0}^M y_{ml+k} k^{j+1}. \quad (1.5)$$

Произведем замену переменных  $\tilde{a}_i = a_i h^i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . При этом уравнения (1.2) и (1.4) преобразуются в следующие:

$$\begin{cases} \tilde{a}_0^{l-1} + m \tilde{a}_1^{l-1} + m^2 \tilde{a}_2^{l-1} + m^3 \tilde{a}_3^{l-1} = \tilde{a}_0^l, \\ \tilde{a}_1^{l-1} + 2m \tilde{a}_2^{l-1} + 3m^2 \tilde{a}_3^{l-1} = \tilde{a}_1^l, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} S_2 \tilde{a}_0^l + S_3 \tilde{a}_1^l + S_4 \tilde{a}_2^l + S_5 \tilde{a}_3^l = P_1^l, \\ S_3 \tilde{a}_0^l + S_4 \tilde{a}_1^l + S_5 \tilde{a}_2^l + S_6 \tilde{a}_3^l = P_2^l, \end{cases} \quad (1.7)$$

Обозначим матрицы:

$$A_1 = \begin{vmatrix} S_2 & S_3 \\ S_3 & S_4 \end{vmatrix}, A_2 = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 \\ S_5 & S_6 \end{vmatrix}, B_1 = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, B_2 = \begin{vmatrix} m^2 & m^3 \\ 2m & 3m^2 \end{vmatrix}.$$

Кроме того, пусть

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ P_2^l \end{pmatrix} \text{ и } X^{2l} = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \end{pmatrix}, X^{2l+1} = \begin{pmatrix} a_2^l \\ a_3^l \end{pmatrix}, \text{ где } l = 0, 1, \dots, L-1.$$

Тогда систему уравнений для определения коэффициентов периодического сплайна можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & 0 & \dots & B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & -E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \\ \vdots \\ X^{2L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P^0 \\ 0 \\ P^1 \\ 0 \\ \vdots \\ P^{L-1} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Размерность этой системы —  $4L \times 4L$ . Здесь  $E$ , как обычно, единичная матрица:  $E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

Для непериодического сплайна первые две строки заменяются на стартовые условия (1.1).

Введем обозначение<sup>1</sup>:

$$U = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{A} m^2 T_{35} - \frac{1}{A} m^3 T_{34} & m + \frac{1}{A} m^2 T_{45} - \frac{1}{A} m^3 T_{34} \\ \frac{2m}{A} T_{35} - 3 \frac{m^2}{A} T_{34} & 1 + 2 \frac{m}{A} T_{45} - 3 \frac{m^2}{A} T_{44} \end{vmatrix}, \quad (1.9)$$

где

$$A = \det(A_2) = \det \begin{vmatrix} S_4 & S_5 \\ S_5 & S_6 \end{vmatrix} = S_4 S_6 - S_5^2 > 0, \quad (1.10)$$

$$T_{ij} = S_i S_j - S_{i-1} S_{j+1}. \quad (1.11)$$

Если сделать некоторые преобразования, то система (1.8) распадается на систему размерности  $2L \times 2L$ :

$$\begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & \dots & U \\ U & -E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U & -E & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^2 \\ X^4 \\ \vdots \\ X^{2L-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_2 A_2^{-1} P^{L-1} \\ -B_2 A_2^{-1} P^0 \\ -B_2 A_2^{-1} P^1 \\ \vdots \\ -B_2 A_2^{-1} P^{L-2} \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

<sup>1</sup> Матрицу  $U$  назовем матрицей устойчивости, поскольку, как мы увидим далее, она определяет устойчивость сплайна.

из которой находятся первый и второй коэффициенты полиномов. Остальные два коэффициента определяются из метода наименьших квадратов (1.4). Заметим, что матрица  $U$ , определенная нами выше, может быть также записана в виде  $U = B_1 - B_2 A_2^{-1} A_1$ .

### 1.3. Существование и единственность $S$ -сплайнов

**Теорема 1.** При любых начальных условиях и для любых констант  $m$  и  $M$  существует и единственен непериодический сплайн  $S_{m,M}[y](x)$ .

**Теорема 2.** Пусть числа  $m$  и  $M$  таковы, что собственные числа матрицы  $U$  не равны корню степени  $L$  из единицы. Тогда существует и единственен периодический сплайн  $S_{m,M}[y](x)$ .

### 1.4. Сходимость $S$ -сплайнов

**Теорема 3.** Пусть  $f(x) \in C^4[a, b]$  — периодическая функция и пусть выполнены предположения

$$|f(x_k) - f_k| \leq Ch^{4+\varepsilon}, \quad (1.13)$$

где константа  $C$  не зависит от  $h$ . Пусть, кроме того, собственные числа матрицы  $U$  (1.9) по модулю меньше единицы. Тогда периодический сплайн  $S_{m,M}(x)$  с узлами на равномерной сетке  $\xi_l = a + lH$  имеет дефект два (т. е.  $S_{m,M}^3(x) \in C^1[a, b]$ ), и для  $x \in [a, b]$  справедливы следующие оценки:

$$|f^{(p)}(x) - S_{m,M}^{(p)}(x)| \leq C_p h^{4-p}, \quad p = 0, 1, 2, 3. \quad (1.14)$$

**Теорема 4.** Пусть  $f(x) \in C^4[a, b]$  и пусть выполнены предположения

$$|f(x_k) - f_k| \leq Ch^{4+\varepsilon}, |f'(0) - f'_0| \leq Ch^{3+\varepsilon}, \quad (1.15)$$

где константа  $C$  не зависит от  $h$ . Пусть, кроме того, собственные числа матрицы  $U$  (1.9) по модулю меньше единицы. Тогда непериодический сплайн  $S_{m,M}(x)$  с узлами на равномерной сетке  $\xi_l = a + lH$  имеет дефект два (т. е.  $S_{m,M}^3(x) \in C^1[a, b]$ ), и для  $x \in [a, b]$  справедливы следующие оценки:

$$|f^{(p)}(x) - S_{m,M}^{(p)}(x)| \leq C_p h^{4-p}, \quad p = 0, 1, 2, 3. \quad (1.16)$$

**Замечание.** Как показано в работе [1], выполнение условия  $m \leq M\zeta_*$ , где  $\zeta_* \approx 0,93$ , обеспечивает устойчивость, собственные числа матрицы  $U$  оказываются по модулю меньше единицы.

### 1.5. Фундаментальный $S$ -сплайн

Фундаментальный  $S$ -сплайн  $B_j(x)$  — это периодический или непериодический  $S$ -сплайн, построенный по данным  $y = (y_0, y_1, \dots, y_K) \in \mathbf{R}^{K+1}$  и  $y'_0 \in \mathbf{R}$  вида:  $\{y_i = \delta_{ij}, i = 0, \dots, K\}$ . Легко видеть, что линейная комбинация  $\sum_{j=0}^K y_j B_j(x) = S(x)$  является  $S$ -сплайном, приближающим начальные данные  $\{y_i, i = 0, \dots, K\}$ .

Приведем графики фундаментальных  $S$ -сплайнов для периодического случая (см. рис. 1).

Фундаментальные сплайны одной переменной

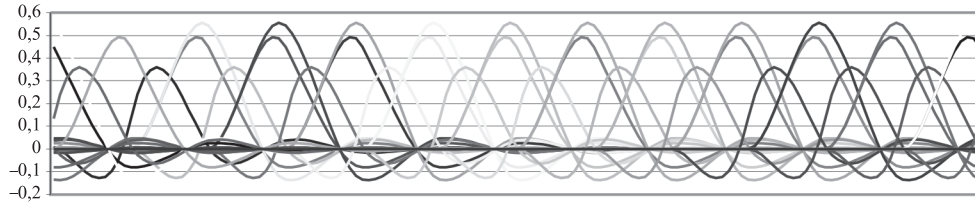


Рис. 1

## 2. $S$ -сплайн на круге

### 2.1. Построение $\varphi$ - $r$ -сплайна

Будем рассматривать на единичном круге полярные сетки:

$$\begin{aligned} \{\varphi_i = ih_1, i = 0, 1, \dots, K_1\}, \{\Phi_k = kH_1, k = 0, \dots, L_1\}, \\ H_1 = m_1 h_1, K_1 = m_1 L_1, K_1 h_1 = 2\pi, \\ \{r_j = jh_2, j = 0, 1, \dots, K_2\}, \{R_l = lH_2, l = 0, \dots, L_2\}, \\ H_2 = m_2 h_2, K_2 = m_2 L_2, K_2 h_2 = 1. \end{aligned}$$

Будем строить аппроксимацию функции  $f(\varphi, r)$  на круге при условии, что функция  $f$  имеет 4 производных по переменным  $r$  и  $\varphi$ , т. е.

$$f \in C^4[0, 1] \times [0, 2\pi]. \quad (2.1)$$

Пусть  $\{y_{ij} = f(\varphi_i, r_j), i = 0, \dots, K_1, j = 0, \dots, K_2\}$  — значения в узлах сетки, по которым будет проводиться аппроксимация. При каждом  $j = 1, \dots, K_2$  построим периодический  $S$ -сплайн  $S_j(\varphi)$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  по начальным данным  $\{y_{ij}, i = 0, \dots, K_1\}$ . Каждый из этих сплайнов аппроксимирует функцию  $f(\varphi, r_j)$  на окружности с радиусом  $r_j$ , причем в силу теоремы о сходимости

$$\left| S_j^{(p)}(\varphi) - \frac{\partial^p f(\varphi, r_j)}{\partial \varphi^p} \right| < Ch_1^{4-p}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad p = 0, 1, 2, 3.$$

Далее, фиксируем произвольное  $\tilde{\varphi} \in [0, 2\pi]$ . Рассмотрим набор  $\{z_j = S_j(\tilde{\varphi}), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\}$ . Также обозначим  $z'_0$  — значение, получаемое по некоторому алгоритму по набору  $\{z_j\}$ , которое приближает  $f'_r(r, \tilde{\varphi})|_{r=0}$  с порядком не ниже третьего. Например,

$$z'_0 = \frac{1}{h_2} \left[ 3(z_1 - z_0) - \frac{3}{2}(z_2 - z_0) + \frac{1}{3}(z_3 - z_0) \right] \quad (2.2)$$

— приближение производной с третьим порядком аппроксимации.

По набору  $\{z_j\}$  и  $z'_0$  строим  $S_{\tilde{\varphi}}(r)$  — непериодический  $S$ -сплайн на отрезке  $[0, 1]$ . Будем считать, что  $m_2 < M_2 \zeta_*$  (здесь  $\zeta_* = 0,93096$ ). Это гарантирует, что собственные значения матрицы  $U$

по модулю не будут превосходить единицы. Тогда, построенный для  $\tilde{\varphi}$  сплайн  $S_{\tilde{\varphi}}(r)$  будет аппроксимировать функцию  $f(\tilde{\varphi}, r)$  при  $r \in [0, 1]$ .

**Определение 3.** Назовем  $\varphi$ - $r$ -сплайном функцию  $S(\varphi, r)$ , значение которой при любых  $r$  и  $\varphi$  определяется по следующему алгоритму: по набору  $\{z_j = S_j(\varphi), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\}$ ,  $z'_0$  строим  $S_{\varphi}(r)$ , затем полагаем  $S(\varphi, r) = S_{\varphi}(r)$ .

По-другому  $S(\varphi, r) = \{S_{\varphi}(r) | \{z_j = S_j(\varphi), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\}\}$ .

Очевидно, что этот сплайн можно дифференцировать по  $r$  3 раза в любой точке, не принадлежащей сетке, т. е. при  $r \neq R_j$ . При  $r = R_j$  определим производную следующим образом:

$$\frac{\partial^p}{\partial r^p} S(\varphi, r) = \frac{\partial^p}{\partial r^p} S(\varphi, r+0), \quad p = 0, 1, 2, 3.$$

**Определение 4.** Назовем  $p$ -й производной по  $\varphi$  от  $\varphi$ - $r$ -сплайна ( $p = 1, 2, 3$ ) функцию  $\frac{\partial^p}{\partial \varphi^p} S(\varphi, r)$  на единичном круге, которая равна  $\varphi$ - $r$ -сплайну, построенному по набору

$$\left\{ z_j = \frac{d^p}{d\varphi^p} S_j(\varphi), j = 1, \dots, K_2, z_0 = 0 \right\}, \quad p = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Как и в случае с производной по  $r$ , под производной по  $\varphi$  в точках  $\varphi = \Phi_k$  понимается значение в точке  $\varphi = \Phi_k + 0$ .

## 2.2. Получение S-сплайна на круге как явной функции двух переменных

Будем обозначать фундаментальные сплайны по  $\varphi$  как  $C_i(\varphi)$ , а фундаментальные сплайны по аргументу  $r$  как  $D_j(r)$ .

$$\begin{aligned} S(\varphi, r) &= \{S_{\varphi}(r) | \{z_j = S_j(\varphi), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\}\} = S_{\varphi}(r) = \\ &= \sum_{j=0}^{K_2} z_j D_j(r) = \sum_{j=0}^{K_2} D_j(r) \sum_{i=0}^{K_1-1} y_{ij} C_i(\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} C_i(\varphi) D_j(r). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Предпоследнее равенство следует из определения набора  $\{z_j = S_j(\varphi)\}$  и разложения по фундаментальным сплайнам  $S_j(\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1} y_{ij} C_i(\varphi)$ . График фундаментального сплайна представлен на рис. 2.

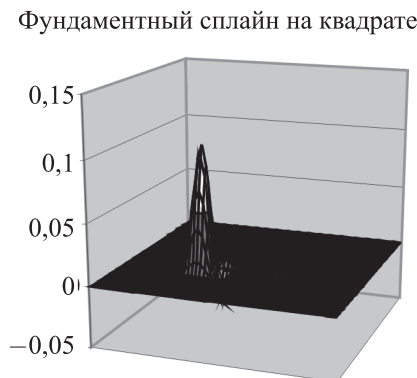


Рис. 2

Теперь рассмотрим укрупненную сетку круга  $\{\Phi_k = kH_1, k = 0, \dots, L_1\}$ , где  $H_1 = m_1 h_1$ , и  $\{R_l = lH_2, l = 0, \dots, L_2\}$ , где  $H_2 = m_2 h_2$ . Рассмотрим вид  $S$ -сплайна в некотором произвольном секторе этой сетки:

$$\varphi = kH_1 + \tilde{\varphi}, r = lH_2 + \tilde{r}, \text{ где } |\tilde{\varphi}| \leq H_1 \text{ и } |\tilde{r}| \leq H_2. \quad (2.5)$$

В этом секторе фундаментальные  $BS$ -сплайны согласно определению  $S$ -сплайна представляются в виде полиномов третьей степени:

$$C_i(\varphi) = \sum_{p=0}^3 c_{pk}^i \tilde{\varphi}^p, D_j(r) = \sum_{q=0}^3 c_{ql}^j \tilde{r}^q.$$

Подставляя эти выражения в формулу для  $S(\varphi, r)$  и меняя порядок суммирования, получим

$$\begin{aligned} S(\varphi, r) &= \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} \sum_{p=0}^3 c_{pk}^i \tilde{\varphi}^p \sum_{q=0}^3 d_{ql}^j \tilde{r}^q = \\ &= \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 \tilde{\varphi}^p \tilde{r}^q \left( \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} c_{pk}^i d_{ql}^j \right) = \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 a_{pq}^{kl} \tilde{\varphi}^p \tilde{r}^q. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Представление сплайна на круге в виде разложения по одномерным фундаментальным сплайнам (2.4) позволяет определить понятие смешанной производной для двумерного сплайна.

**Определение 4.** Под смешанной производной двумерного сплайна  $\frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} S(\varphi, r)$ ,  $0 \leq p + q \leq 3$ , понимается следующая конечная сумма  $\sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} \frac{d^p}{d\varphi^p} C_i(\varphi) \frac{d^q}{dr^q} D_j(r)$ , состоящая из формальных производных от соответствующих фундаментальных сплайнов по  $r$  и  $\varphi$ .

### 2.3. Сходимость двумерного сплайна

Обозначим  $h = \max(h_1, h_2)$ .

**Теорема 5.** Пусть  $m_1 < M_1 \zeta_*$ ,  $m_2 < M_2 \zeta_*$  и выполнены условия

$$f \in C^4[0, 1] \times [0, 2\pi]. \quad (2.7)$$

Тогда для сплайна  $S(\varphi, r)$  справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} S(\varphi, r) - \frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} f(\varphi, r) \right| < C_{pq} h^{4-p-q}, \text{ где } 0 \leq p + q \leq 3.$$

Доказательство следует из построения двумерного сплайна, представления его в виде линейной комбинации фундаментальных одномерных сплайнов, а также из сходимости одномерных сплайнов.

### 2.4. Решение краевых задач с помощью сплайнов

Рассмотрим уравнение Пуассона с некоторыми граничными условиями

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -p(r, \varphi), (r, \varphi) \in D, \\ u(r, \varphi)|_{\partial D} = f(r, \varphi). \end{cases} \quad (2.8)$$

Пусть  $D$  — некоторая область, лежащая внутри единичного круга.

Предлагаемый метод решения состоит из следующих шагов:

- 1) представление предполагаемого решения уравнения в виде линейной комбинации фундаментальных сплайнов;
- 2) применение метода Галеркина к уравнению в пространстве фундаментальных сплайнов;
- 3) подстановка граничных условий.

Рассмотрим последовательно эти шаги. Представим решение уравнения в виде

$$S(\varphi, r) = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=1}^{K_2} u_{ij} C_i(\varphi) D_j(r), \quad (2.9)$$

где  $C_i(\varphi)$  и  $D_j(r)$  — соответствующие фундаментальные одномерные сплайны.

Домножим исходное уравнение на  $r$ . Теперь будем домножать уравнение скалярно на  $C_l(\varphi) D_k(r)$ , где пары индексов  $l, k$  пробегает все значения  $l = 0, \dots, K_1 - 1, k = 1, \dots, K_2$ , но такие, что  $(h_2 k, h_1 l) \in D$  (т. е. только для внутренних узлов области  $D$ ). В нашем случае в качестве скалярного произведения возьмем интеграл по области  $D$ . Получим уравнение

$$\iint_D \left\{ r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} C_l(\varphi) D_k(r) r dr d\varphi = - \iint_D p(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi. \quad (2.10)$$

Заметим, что под интегралом вошел также якобиан  $r$  от преобразования в полярные координаты. Рассмотрим процесс интегрирования на примере круга. В случае других областей можно действовать подобным образом. Область интегрирования разбиваем на сектора вида  $r \in [R_q, R_{q+1}]$ ,  $\varphi \in [\Phi_p, \Phi_{p+1}]$ , где  $R_q = qH_2, q = 0, \dots, L_2, \Phi_p = pH_1, p = 0, \dots, L_1$ . После этого мы можем разбить двойной интеграл на одномерные.

Преобразуем левую часть следующим образом:

$$\iint_D \left\{ r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} C_l(\varphi) D_k(r) r dr d\varphi = \sum_{p=0}^{L_1-1} \sum_{q=0}^{L_2-1} \left\{ \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} C_l(\varphi) D_k(r) r dr d\varphi \right\}.$$

Теперь подставим разложение (2.9) и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \sum_{p,q} u_{ij} \left\{ \int_{R_q}^{R_{q+1}} r^2 D_j''(r) D_k(r) + r D_j'(r) D_k(r) dr \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} C_i(\varphi) C_l(\varphi) d\varphi + \right. \\ & \left. + \int_{R_q}^{R_{q+1}} D_j(r) D_k(r) dr \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} C_i''(\varphi) C_l(\varphi) d\varphi \right\} = \sum_{i,j} \sum_{p,q} u_{ij} \left\{ r^2 D_j'(r) D_k(r) \Big|_{R_q}^{R_{q+1}} + \int_{R_q}^{R_{q+1}} r D_j'(r) D_k(r) - \right. \\ & \left. - 2r D_j'(r) D_k'(r) dr \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} C_i(\varphi) C_l(\varphi) d\varphi + \int_{R_q}^{R_{q+1}} D_j(r) D_k(r) dr \left( C_i'(\varphi) C_l(\varphi) \Big|_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} - \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} C_i'(\varphi) C_l'(\varphi) d\varphi \right) \right\} = \\ & = \sum_{i,j} u_{ij} \left\{ \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \left( D_k(1) D_j'(1) + - \int_0^1 r D_k(r) D_j'(r) - 2r D_k'(r) D_j'(r) dr \right) + \right. \\ & \left. + \int_0^{2\pi} C_l'(\varphi) C_i'(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_k(r) D_j(r) dr \right\} = - \iint_D p(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi. \quad (2.11) \end{aligned}$$



Последнее уравнение ввиду произвольности выбора  $l$  и  $k$  представляет собой систему для определения коэффициентов  $u_{ij}$ . Чтобы сделать ее полной, нам необходимо учесть граничные условия, которые дадут нам недостающее число уравнений

$$\sum_{i,j} u_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) \Big|_{\partial D} = f(\varphi, r).$$

Для круга радиуса единица они будут иметь вид

$$\sum_{i,j} u_{ij} C_i(\varphi_l) D_j(1) = f(\varphi), \quad l = 0, \dots, K_1 - 1. \quad (2.12)$$

В общем же случае нам необходимо поставить граничные условия в точках пересечения сетки с границей области  $D$ , но столько, сколько нам не хватает уравнений (с учетом того количества уравнений, которое получилось для полностью внутренних точек области). Встает закономерный вопрос о том, каким образом выбирать пары индексов  $(i, j)$ , которые определяют фундаментальные сплайны, участвующие в разложении предполагаемого решения, для произвольной области внутри единичного круга. Во-первых, мы берем индексы, соответствующие всем внутренним узлам сетки, как мы это делали при домножении уравнения на фундаментальные сплайны. Во-вторых, мы берем все точки, лежащие на границе или ближайšie к ним узлы, если двигаться по лучам сетки по направлению от границы.

Из системы уравнений (2.11) и (2.12) мы получаем коэффициенты  $u_{ij}$  в разложении решения по фундаментальным сплайнам, т. е. искомое приближенное решение.

**Теорема 6.** Пусть  $u(r, \varphi)$  — точное решение уравнения (2.8), а  $S(r, \varphi)$  — приближенное решение, полученное в результате вышеописанного метода. Пусть, кроме того, собственные значения матрицы  $U$ , построенной для сплайнов по  $r$  и по  $\varphi$ , по модулю меньше единицы. Тогда верна оценка

$$|u(r, \varphi) - S(r, \varphi)| < Ch^4, \quad \text{где } h = \max(h_1, h_2).$$

**Доказательство.** Аппроксимируем точное решение  $u$  сплайном  $\tilde{S}(r, \varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=1}^{K_2} v_{ij} C_i(\varphi) D_j(r)$ .

Пусть  $u \in C^4$ . Обозначим  $y = u - \tilde{S}$ . Тогда, применив теорему 5, получим, что  $|y^{(n)}(r, \varphi)| < C_1 h^{4-n}$ , где  $n = 0, 1, 2, 3$ . Так как  $u$  — точное решение уравнения (2.8), то будет выполнено интегральное тождество

$$\iint_D \Delta u C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi = \iint_D p(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi.$$

Разобьем область интегрирования на сектора, как мы это делали в методе Галеркина. Тогда мы сможем почленно дифференцировать  $u = y + \tilde{S}$  два раза:

$$\sum_{p=0}^{L_1-1} \sum_{q=0}^{L_2-1} \left\{ \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) (y + \tilde{S}) \right) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi \right\} = \iint_D r^2 p(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) dr d\varphi.$$

Теперь перенесем члены с  $y$  в правую часть, а оставшиеся проинтегрируем по частям, как мы это делали в методе Галеркина:

$$\sum_{i,j} v_{ij} \left\{ \int_0^{2\pi} C_i(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \left( D_k(1) D_j'(1) + \int_0^1 r D_k(r) D_j'(r) - 2r D_k'(r) D_j'(r) dr \right) - \int_0^{2\pi} C_i'(r) C_i'(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_k(r) D_j(r) dr \right\} =$$

$$= - \iint_D p(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi - \sum_{p,q} \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} \Delta y(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) dr d\varphi.$$

Как мы видим, полученная система уравнений совпадает с системой (2.11) с точностью до членов с  $y$ . Матрицу этой системы обозначим  $A = \{a_{lk}^{ij}\}$ . Введем обозначение  $z = S(r, \varphi) - \tilde{S}(r, \varphi) = \sum_{i,j} (u_{ij} - v_{ij}) C_i(\varphi) D_j(r)$ . Вычтем из полученной системы систему (2.11), тогда получим систему

$$\sum_{i,j} a_{lk}^{ij} (u_{ij} - v_{ij}) = y_{lk}, \text{ или } A\bar{z} = \bar{y}.$$

$$\text{Здесь } \bar{z} = \{z_{ij} \mid z_{ij} = u_{ij} - v_{ij}\}, \text{ а } \bar{y} = \left\{ y_{lk} \mid y_{lk} = \sum_{p,q} \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} \Delta y(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) dr d\varphi \right\}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{p,q} \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} \Delta y(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) dr d\varphi &\leq \sum_{p,q} \left| \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} \Delta y(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) dr d\varphi \right| \\ &\leq \sup |\Delta y| \sum_{p,q} \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} |C_l(\varphi) D_k(r) r^2| dr d\varphi. \end{aligned}$$

$$\text{Обозначим } c_{p,l} = \sup_{\varphi \in [\Phi_p, \Phi_{p+1}]} |C_l(\varphi)|, \quad d_{q,k} = \sup_{r \in [R_q, R_{q+1}]} |D_k(r) r^2|.$$

Тогда в силу теоремы 5, примененной к  $y$  и ее производным, получим

$$\begin{aligned} \sup |\Delta y| \sum_{p,q} \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} |C_l(\varphi) D_k(r) r^2| dr d\varphi &\leq Ch^2 \sum_{p,q} c_{p,l} d_{q,k} H_1 H_2 \leq \\ &\leq Cm_1 m_2 h^4 \sum_{p,q} c_{p,l} d_{q,k} = Cm_1 m_2 h^4 \left( \sum_p c_{p,l} \right) \left( \sum_q d_{q,k} \right). \end{aligned}$$

Теперь покажем, что получившиеся суммы ограничены суммой сходящейся геометрической прогрессии. Для этого нам потребуется лемма 3 для периодического и непериодического случаев, доказательство которых приведено в [1] и [2]. Из этих лемм, в частности, следует, что отклонение приближения фундаментальными сплайнами от начальных данных удовлетворяет соотношению  $z_n = |C_l(nH_1) - \delta_{l,m_1 n}| \leq \lambda^{n-1} z_1$ , где  $\delta_{l,m_1 n}$  — символы Кронекера,  $\lambda = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные значения матрицы  $U$  (1.9). Аналогичные соотношения имеют место и для фундаментальных сплайнов по  $r$ . Тогда элементы сумм, стоящих в скобках, ограничены по модулю членами сходящейся геометрической прогрессии, следовательно, их сумма ограничена суммой бесконечной сходящейся прогрессии, причем эта сумма не зависит от шагов  $h_1$  и  $h_2$ , что и требовалось доказать.

В силу единственности  $S$ -сплайнов фундаментальные сплайны будут линейно независимыми, а, следовательно, матрица системы  $A$  является обратимой, значит:

$$\bar{z} = A^{-1} \bar{y} \text{ и } \|\bar{z}\| \leq \|A^{-1}\| \|\bar{y}\| \Rightarrow |z_{ij}| \leq \|A^{-1}\| \max_{l,k} |y_{lk}| \leq C_2 h^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |S(r, \varphi) - \tilde{S}(r, \varphi)| \leq C_2 h^4 \text{ (следует из теоремы 5).}$$

$$|u(r, \varphi) - S(r, \varphi)| \leq |u(r, \varphi) - \tilde{S}(r, \varphi)| + |\tilde{S}(r, \varphi) - S(r, \varphi)| < C_1 h^4 + C_2 h^4 = Ch^4. \text{ Теорема доказана. } \blacksquare$$

## 2.5. Результаты численных расчетов

Методом, описанным выше, решалась задача:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 2, & r \in (0,1), \varphi \in (0, 2\pi), \\ u(r, \varphi)|_{r=1} = \sin^2(\varphi). \end{cases}$$

Ниже представлена таблица точности, полученной при разном количестве точек на отрезке путем сравнения с точным аналитическим решением. В соответствии с теоремой, коэффициент увеличения точности при уменьшении шага в 1,5 раза должен составлять  $1,5^4 = 5,0625$ .

Таблица 1

Кол-во полиномов по $r$ или по $\varphi$	Точность	Коэффициент увеличения точности
2	$1,99746 \cdot 10^{-2}$	
4	$8,608 \cdot 10^{-3}$	2,32
6	$1,791 \cdot 10^{-3}$	4,804
9	$5,46 \cdot 10^{-4}$	3,28
14	$1,01 \cdot 10^{-4}$	5,45
21	$2,14 \cdot 10^{-5}$	4,66

Решение уравнения Пуассона на круге

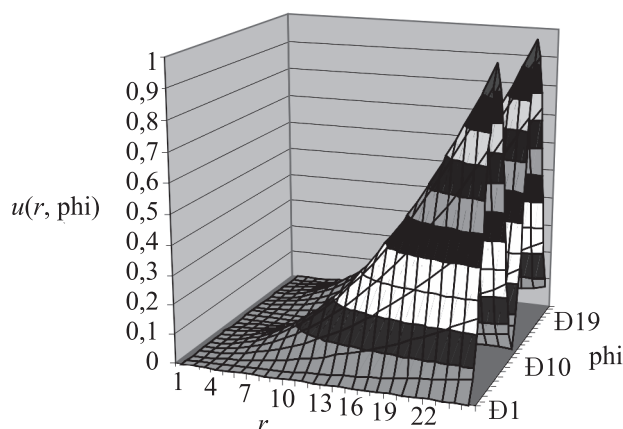


Рис. 3

## Список литературы

1. Силаев Д. А., Якушина Г. И. Приближение S-сплайнами гладких функций // В кн.: Труды семинара имени И. Г. Петровского. Вып. 10. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 197.
2. Амилуценко А. В., Лукьянов А. И., Силаев Д. А. Применение сплайна для приближения гладких периодических функций // Вестник московского университета. № 6, 1996 г. Материалы международной конференции и Чебышевских чтений, посвященные 175-летию Чебышева. Т. 1. С. 22–25.



