**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2009 Т. 1 № 2 С. 147−159**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Управляемые системы в форме Бруновского: симметрии, управляемость

Г. Н. Яковенко[1,a]

[1] Московский физико-технический институт (государственный университет),
141700, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский переулок, д. 9

E-mail: [a] yakovenko_g@mtu-net.ru

*Получено 18 апреля 2008 г.,
после доработки 4 июля 2008 г.*

Многие нелинейные системы с управлением неособенным преобразованием переменных {состояние-управление} приводятся к каноническому виду Бруновского. В каноническом виде решаются различные вопросы теории управления, затем обратной заменой переменных осуществляется возврат к исходным переменным. В работе на основе этой идеологии изучаются преобразования симметрии пространства {время-состояние-управление}.

Ключевые слова: теория управления, форма Бруновского, преобразование симметрии

Control systems in Brunovsky form: symmetries, controllability

G. N. Yakovenko[1]

[1] *Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii pereulok 9, 141700, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

Abstract. — Many nonlinear control systems by nonsingular transformation variable {condition-control} happen to canonical Brunovsky form. The different questions dare in canonical form to theories of control, then inverse change variable is realized return to source variable. In work on base this ideology are studied transformations to symmetries space {time-condition-control}.

Key words: theory of control, Brunovsky form, symmetry transformation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 2, pp. 147−159 (Russian).

1. Каноническая форма Бруновского

Определение 1 [11]. Система с управлением u_{ij} имеет *каноническую форму Бруновского,* если она представима в следующем виде ($x_{ij}^{(n_i)}$ — n_i-кратная производная по независимой переменной t):

$$x_{ij}^{(n_i)} = u_{ij}, \qquad i = \overline{1,q}, \qquad j = \overline{1,p_i}, \tag{1}$$

n_i-кратные интеграторы объединены в один блок номер i, в этом блоке p_i интеграторов; блоков q штук (рис. 1).

Для удобства исследования и формулировки результатов далее предполагается

$$n_1 > n_2 > \cdots > n_q. \tag{2}$$

Форму Бруновского (1) приведем к нормальному виду Коши ($\dot{x}_{ijk}$ — производная по t):

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_{ijk} & = & x_{ijk+1}, \qquad i = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,p_i}, \quad k = \overline{1,n_i - 1}, \\ \dot{x}_{ijn_i} & = & u_{ij}. \end{array} \tag{3}$$

Термин *система в канонической форме Бруновского* эквивалентен термину *статически линеаризуемая система*.

$$\begin{array}{cccccc} & j=1 & & j & & j=p_1 \\ i=1 & \boxed{x_{11}^{(n_1)} = u_{11}} & \cdots & \boxed{x_{1j}^{(n_1)} = u_{1j}} & \cdots & \boxed{x_{1p_1}^{(n_1)} = u_{1p_1}} \\ & j=1 & & j & & j=p_i \\ i & \boxed{x_{i1}^{(n_i)} = u_{i1}} & \cdots & \boxed{x_{ij}^{(n_i)} = u_{ij}} & \cdots & \boxed{x_{ip_i}^{(n_i)} = u_{ip_i}} \\ & j=1 & & j & & j=p_q \\ i=q & \boxed{x_{q1}^{(n_q)} = u_{q1}} & \cdots & \boxed{x_{qj}^{(n_q)} = u_{qj}} & \cdots & \boxed{x_{qp_q}^{(n_q)} = u_{qp_q}} \end{array}$$

Рис. 1. Каноническая форма Бруновского

Определение 2 [13]. Система с управлением v

$$\dot{y} = f(t,y,v), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad n = \sum_{i=1}^{q} n_i p_i, \quad m = \sum_{i=1}^{q} p_i \tag{4}$$

называется *статически линеаризуемой*, если существует взаимно-однозначная замена переменных

$$\begin{array}{rclrcll} y & = & y(t,x), & v & = & v(t,x,u) & \text{(прямая замена)}, \\ x & = & x(t,y), & u & = & u(t,y,v) & \text{(обратная замена)}, \end{array} \tag{5}$$

в результате которой система (4) переходит в систему Бруновского (3). Система (4) называется *динамически линеаризуемой*, если некоторым образом дополненная система (4)

$$\dot{y} = f(t,y,v), \quad \dot{\tilde{y}} = \tilde{f}(t,y,\tilde{y},v,\tilde{v})$$

статически линеаризуема[1].

[1] Здесь и далее предполагается: функции, участвующие в построениях, достаточно гладкие; рассуждения, определения, утверждения — локальны.

В [11] сформулированы условия, при которых системы (4) статически линеаризуема. Для того чтобы понять, насколько этот класс широк, укажем несколько примеров, приведенных в [1] и [2]. Предполагаем, что управления v существенно входят в правую часть системы (4): $\operatorname{rank}\|\partial f(t,y,v)/\partial v\| = m$. Предполагаем также, что у системы (4) отсутствуют нетривиальные первые интегралы: отсутствуют функции $w(t,y)$ $\left(\sum_i (\partial w/\partial y_i)^2 \neq 0\right)$, для которых на любом решении $y(t)$, $v(t)$ системы (4) выполняется $w(t,y(t)) \overset{t}{\equiv} \mathrm{const}$. Система (4) статически линеаризуема при $m=n$, $n=1$, $n=2$; $\dot y = Ay + Bv$ является линейной автономной. Последний пример оправдывает название *статическая линеаризуемость*: система (4) приводится заменой переменных (5) к форме Бруновского (3) тогда и только тогда, когда (4) заменой (5) приводится к линейному виду $\dot y = Ay + Bv$. При $n=3$ система (4) заменой (5) приводится к шести каноническим формам, из которых три являются каноническими формами Бруновского (3). Аналогично, при $m = n-1$ система (4) заменой (5) приводится к четырем каноническим формам, из которых одна каноническая форма Бруновского (3).

2. Симметрии систем в канонической форме Бруновского

Напомним применительно к системе (3) некоторые понятия, связанные с группами симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений [3, 4, 8].

Определение 3. *Однопараметрическая группа преобразований симметрии* системы (3) — это группа (a — групповой параметр)

$$\hat t = \hat t(t,x,a), \qquad \hat x_{ijk} = \hat x_{ijk}(t,x,a), \qquad \hat u_{ij} = \hat u_{ij}(t,x,u,a), \tag{6}$$

каждое преобразование которой переводит любое решение $x(t)$, $u(t)$ системы (3) в ее же решение $\hat x(\hat t)$, $\hat u(\hat t)$. Другими словами: замена переменных (6) в системе (3) должна приводить к системе

$$\begin{aligned} &\frac{d\hat x_{ijk}}{d\hat t} = \hat x_{ijk+1}, \qquad i=\overline{1,q}, \quad j=\overline{1,p_i}, \quad k=\overline{1,n_i-1}, \\ &\frac{d\hat x_{ijn_i}}{d\hat t} = \hat u_{ij} \end{aligned} \tag{7}$$

с такой же правой частью, что и у системы (3).

Группе (6) соответствует оператор симметрий (генератор)

$$Y = \xi\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j,k}\eta_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_{ijk}} + \sum_{i,j}\omega_{ij}\frac{\partial}{\partial u_{ij}}, \tag{8}$$

коэффициенты которого вычисляются по уравнениям группы (6) следующим образом:

$$\begin{gathered} \xi(t,x) = \left.\frac{\partial \hat t(t,x,a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \qquad \eta_{ijk}(t,x) = \left.\frac{\partial \hat x_{ijk}(t,x,a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \\ \omega_{ij}(t,x,u) = \left.\frac{\partial \hat u_{ij}(t,x,u,a)}{\partial a}\right|_{a=0}. \end{gathered} \tag{9}$$

Обратно, для вычисления группы симметрий (6) системы (3) по коэффициентам ξ, η_{ijk}, ω_{ij} оператора симметрий (8) следует составить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\hat t}{da} = \xi(\hat t,\hat x), \qquad \frac{d\hat x_{ijk}}{da} = \eta_{ijk}(\hat t,\hat x), \qquad \frac{d\hat u_{ij}}{da} = \omega_{ij}(\hat t,\hat x,\hat u) \tag{10}$$

и решить ее при начальных данных

$$\hat{t}(0)=t, \qquad \hat{x}_{ijk}(0)=x_{ijk}, \qquad \hat{u}_{ij}(0)=u_{ij}. \tag{11}$$

Отметим, что в уравнения для переменных $\hat{t}$ и $\hat{x}_{ijk}$ группы (6) не входят управления u. Для коэффициентов оператора симметрий (8), соответственно, выполняется

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial\eta_{ijk}}{\partial u}=0, \quad i=\overline{1,q}, \quad j=\overline{1,p_i}, \quad k=\overline{1,n_i}. \tag{12}$$

Запрет вызван тем, что для управления $u(t)$ типично иметь точки разрыва, а это влечет при наличии управления u в $\hat{t}$ и $\hat{x}$ к появлению разрывных траекторий $\hat{x}(\hat{t})$. Следует также иметь в виду, что управления $u_{ij}(t)$ могут быть недифференцируемыми функциями.

Для того чтобы связать коэффициенты (9) оператора симметрий (8) с правой частью системы (3), представим систему (7) в виде

$$\begin{aligned} d\hat{x}_{ijk} &= \hat{x}_{ijk+1}d\hat{t}, \qquad i=\overline{1,q}, \quad j=\overline{1,p_i}, \quad k=\overline{1,n_i-1}, \\ d\hat{x}_{ijn_i} &= \hat{u}_{ij}d\hat{t}, \end{aligned}$$

продифференцируем по a, положим $a=0$, с учетом (9) и (11) придем к равенствам

$$\begin{aligned} d\eta_{ijk} &= \eta_{ijk+1}dt + x_{ijk+1}d\xi, \quad i=\overline{1,q},\ j=\overline{1,p_i},\ k=\overline{1,n_i-1}, \\ d\eta_{ijn_i} &= \omega_{ij}dt + u_{ij}d\xi. \end{aligned}$$

Разделим каждое равенство на dt, получим определяющие уравнения для ξ, η_{ijk}, ω_{ij}

$$\begin{gathered} \frac{d\eta_{ijk}}{dt}=\eta_{ijk+1}+x_{ijk+1}\frac{d\xi}{dt}, \\ i=\overline{1,q}, \quad j=\overline{1,p_i}, \quad k=\overline{1,n_i-1}, \\ \frac{d\eta_{ijn_i}}{dt}=\omega_{ij}+u_{ij}\frac{d\xi}{dt} \end{gathered} \tag{13}$$

— производная d/dt вычисляется в силу системы (3).

Замечание 1. Для решения системы (13) достаточно знать функции ξ, η_{ij1}, $i=\overline{1,q}$, $j=\overline{1,p_i}$. Остальные функции последовательно находятся из системы (13):

$$\begin{gathered} \eta_{ijk+1}=\frac{d\eta_{ijk}}{dt}-x_{ijk+1}\frac{d\xi}{dt}, \\ i=\overline{1,q}, \quad j=\overline{1,p_i}, \quad k=\overline{1,n_i-1}, \\ \omega_{ij}=\frac{d\eta_{ijn_i}}{dt}-u_{ij}\frac{d\xi}{dt} \end{gathered} \tag{14}$$

— производная d/dt вычисляется в силу системы (3). Функции ξ, η_{ij1}, $i=\overline{1,q}$, $j=\overline{1,p_i}$ далее будем называть *производящими функциями* однопараметрической группы симметрий (6).

Теорема. Производящие функции ξ, η_{ij1}, $i=\overline{1,q}$, $j=\overline{1,p_i}$ однопараметрических групп симметрий (6) канонической формы Бруновского (3) в зависимости от количества p_1 интеграторов на верхнем уровне ($i=1$, см. рис. 1) строятся следующим образом.

1. $i=1,\;\; p_1=1,\;\; j=1$ (на верхнем уровне один n_1-кратный интегратор):

$$\xi(t,x_{111},x_{112})=-\frac{\partial\mu(t,x_{111},x_{112})}{\partial x_{112}},$$
$$\eta_{111}(t,x_{111},x_{112})=\mu(t,x_{111},x_{112})-x_{112}\frac{\partial\mu(t,x_{111},x_{112})}{\partial x_{112}}; \tag{15}$$
$$\mu(t,x_{111},x_{112}),\eta_{ij1}(t,x_{\alpha\beta\gamma})$$

— произвольные функции указанных переменных

$$i=\overline{2,q},\quad j=\overline{1,p_i},\quad \alpha=\overline{1,i},$$
$$\beta=\overline{1,p_\alpha},\quad \gamma=\overline{1,n_\alpha-n_i+1}. \tag{16}$$

2. $i=1,\;\; p_1>1,\;\; j=\overline{1,p_1}$ (на верхнем уровне несколько n_1-кратных интеграторов):

$$\xi(t,x_{111},x_{121},\ldots,x_{1p_1 1}),\quad \eta_{ij1}(t,x_{\alpha\beta\gamma})$$

— произвольные функции указанных переменных

$$i=\overline{1,q},\quad j=\overline{1,p_i},\quad \alpha=\overline{1,i},$$
$$\beta=\overline{1,p_\alpha},\quad \gamma=\overline{1,n_\alpha-n_i+1}. \tag{17}$$

□ Рассмотрим i-й уровень формы Бруновского (см. рис. 1). В уравнениях (13) сделаем замену переменных

$$\eta_{ijk}=\theta_{ijk}+x_{ijk+1}\xi,\quad j=\overline{1,p_i},\quad k=\overline{1,n_i-1}. \tag{18}$$

При $k=\overline{1,n_i-2}$ уравнения в системе (13) примут вид

$$\frac{d\theta_{ij1}}{dt}=\theta_{ij2},\quad \frac{d\theta_{ij2}}{dt}=\theta_{ij3},\ldots,$$
$$\frac{d\theta_{ijn_i-3}}{dt}=\theta_{ijn_i-2},\quad \frac{d\theta_{ijn_i-2}}{dt}=\theta_{ijn_i-1},\; j=\overline{1,p_i}. \tag{19}$$

Из условия (12) и связи (18) следует равенство

$$\frac{\partial\theta_{ijk}}{\partial u}=0,\quad j=\overline{1,p_i},\quad k=\overline{1,n_i-1}. \tag{20}$$

Зависимость от управлений $u_{\alpha\beta}$ в функциях θ_{ijn_i-1} может появиться только от переменных $x_{\alpha\beta\gamma}$, соответствующих $\alpha\beta$-му интегратору, и их производных (см. рис. 1 и (3)). Проследим за переменными $x_{\alpha\beta\gamma}$, $x_{\mu\nu\lambda}$, определяющими состояния двух интеграторов: $\alpha\beta$, $1\le\alpha\le i$, и $\mu\nu$, $\mu>i$. Вследствие (2) выполняются неравенства

$$n_\alpha\ge n_i,\qquad n_\mu<n_i. \tag{21}$$

Пусть для переменных $x_{\alpha\beta\gamma}$, $x_{\mu\nu\lambda}$, от которых зависит функция $\theta_{ij1}(\ldots,x_{\alpha\beta\gamma},x_{\mu\nu\lambda},\ldots)$, выполняется условие $\gamma\le g$, $\lambda\le l$, причем от переменных $x_{\alpha\beta g}$, $x_{\mu\nu l}$ с наибольшими индексами g и l функция θ_{ij1} зависит явно:

$$\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\alpha\beta g}}\ne 0,\qquad \frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\mu\nu l}}\ne 0.$$

Пронаблюдаем увеличение индексов γ, λ у переменных $x_{\alpha\beta\gamma}$, $x_{\mu\nu\lambda}$, входящих в функции θ_{ijk}. Из уравнений (19) следуют равенства (производная d/dt вычисляется в силу системы (3))

$$\begin{gathered}
\theta_{ij2}(\ldots,x_{\alpha\beta g+1},x_{\mu\nu l+1},\ldots)=\frac{d\theta_{ij1}}{dt}=\\
=\cdots+\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\alpha\beta g}}x_{\alpha\beta g+1}+\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\mu\nu l}}x_{\mu\nu l+1}+\cdots,\\
\vdots\\
\theta_{ijs}(\ldots,x_{\alpha\beta g+s-1},x_{\mu\nu l+s-1},\ldots)=\frac{d\theta_{ijs-1}}{dt}=\\
=\cdots+\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\alpha\beta g}}x_{\alpha\beta g+s-1}+\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\mu\nu l}}x_{\mu\nu l+s-1}+\cdots,\\
\vdots\\
\theta_{ijn_i-1}(\ldots,x_{\alpha\beta g+n_i-2},x_{\mu\nu l+n_i-2},\ldots)=\frac{d\theta_{ijn_i-2}}{dt}=\\
=\cdots+\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\alpha\beta g}}x_{\alpha\beta g+n_i-2}+\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\mu\nu l}}x_{\mu\nu l+n_i-2}+\cdots.
\end{gathered}\tag{22}$$

Для того чтобы у функции θ_{ijn_i-1} не появилась зависимость от управлений, требуется для индексов у переменных $x_{\alpha\beta g+n_i-2}$, $x_{\mu\nu l+n_i-2}$ выполнения условий $g+n_i-2\le n_\alpha$, $l+n_i-2\le n_\mu$, что эквивалентно ограничениям

$$g\le 2+n_\alpha-n_i,\qquad l\le 2-(n_i-n_\mu)\tag{23}$$

для наибольших индексов у переменных $x_{\alpha\beta g}$, $x_{\mu\nu l}$, от которых может зависеть функция θ_{ij1}. Вследствие (21) справедливо неравенство $n_i-n_\mu\ge 1$, поэтому второе ограничение в (23) принимает вид $l\le 1$, т. е. вклад интегратора $\mu\nu$ в функцию θ_{ij1} возможен только при помощи переменной $x_{\mu\nu 1}$:

$$\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\mu\nu\lambda}}=0,\qquad \mu>i,\quad \nu=\overline{1,p_\mu},\quad \lambda>1.\tag{24}$$

Таким образом, функция θ_{ij1} допускает следующую зависимость от переменных, связанных с интеграторами $\alpha\beta$ и $\mu\nu$:

$$\theta_{ij1}(\ldots,x_{\alpha\beta 2+n_\alpha-n_i},x_{\mu\nu 1},\ldots),\tag{25}$$

переменные $x_{\alpha\beta\gamma}$ при $\gamma<2+n_\alpha-n_i$ опущены. Функция θ_{ijn_i-1} допускает следующую зависимость от переменных, связанных с интеграторами $\alpha\beta$ и $\mu\nu$ (см. (22)):

$$\begin{gathered}
\theta_{ijn_i-1}(\ldots,x_{\alpha\beta n_\alpha},x_{\mu\nu n_\mu},\ldots)=\\
=\cdots+\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\alpha\beta 2+n_\alpha-n_i}}x_{\alpha\beta n_\alpha}+\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\mu\nu 1}}x_{\mu\nu n_\mu}+\cdots,
\end{gathered}$$

слагаемые с переменными $x_{\alpha\beta\gamma}$, $\gamma < n_\alpha$, и $x_{\mu\nu\lambda}$, $\lambda < n_\mu$, опущены. Из последнего выражения и формулы (18) следует зависимость (опущенные слагаемые содержат связанные с интеграторами $\alpha\beta$ и $\mu\nu$ переменные $x_{\alpha\beta\gamma}$, $\gamma < n_\alpha$, и $x_{\mu\nu\lambda}$, $\lambda < n_\mu$)

$$\begin{gathered}\eta_{ijn_i-1} = \theta_{ijn_i-1} + x_{ijn_i}\xi = \\ = \cdots + \frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\alpha\beta 2+n_\alpha-n_i}} x_{\alpha\beta n_\alpha} + \frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\mu\nu 1}} x_{\mu\nu n_\mu} + \cdots + x_{ijn_i}\xi.\end{gathered} \tag{26}$$

Из (26) и (14) получаем результат

$$\begin{gathered}\eta_{ijn_i} = \frac{d\eta_{ijn_i-1}}{dt} - x_{ijn_i}\frac{d\xi}{dt} = \\ = \cdots + \frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\alpha\beta 2+n_\alpha-n_i}} u_{\alpha\beta} + \frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\mu\nu 1}} u_{\mu\nu} + \cdots + \\ + \cdots + u_{ij}\xi + x_{ijn_i}\frac{d\xi}{dt} - x_{ijn_i}\frac{d\xi}{dt} = \\ = \cdots + \left(\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\alpha\beta 2+n_\alpha-n_i}} + \delta_{\alpha i}\delta_{\beta j}\xi\right) u_{\alpha\beta} + \frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\mu\nu 1}} u_{\mu\nu}\end{gathered} \tag{27}$$

(опущенные слагаемые не содержат управлений $u_{\alpha\beta}$, $u_{\mu\nu}$). Для того чтобы функция η_{ijn_i} не зависела от управлений нижнего уровня $u_{\mu\nu}$, должно выполняться равенство

$$\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\mu\nu 1}} = 0 \tag{28}$$

— не допускается зависимость функции θ_{ij1} от переменной $x_{\mu\nu 1}$. Равенства (25) и (28) приводят к выводу: функции θ_{ij1} не зависят от переменных $x_{\mu\nu\lambda}$, связанных с интеграторами нижних уровней:

$$\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\mu\nu\lambda}} = 0, \quad \mu > i, \quad \nu = \overline{1, p_\mu}, \quad \lambda = \overline{1, n_\mu}. \tag{29}$$

Из (27) также следует: для того чтобы функция η_{ijn_i} не зависела от управлений $u_{\alpha\beta}$, должна быть справедливой связь

$$\begin{gathered}\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\alpha\beta 2+n_\alpha-n_i}} = -\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j}\xi, \\ i = \overline{1,q},\ j = \overline{1,p_i},\ \alpha = \overline{1,i},\ \beta = \overline{1,p_\alpha}.\end{gathered} \tag{30}$$

Рассмотрим верхний уровень формы Бруновского (рис. 1, $i = 1$). Функции θ_{1j1} от переменных нижних уровней не зависят (см. (29)), а с учетом $n_\alpha - n_i = n_1 - n_1 = 0$ возможна зависимость только от следующих переменных (см. (25)):

$$\theta_{1j1}(t, x_{111}, x_{121}, \ldots, x_{1p_1 1}, x_{112}, x_{122}, \ldots, x_{1p_1 2}). \tag{31}$$

Изучим связь (30) в двух случаях, упомянутых в формулировке теоремы.

1. $i=1,\ \ p_1=1,\ \ j=1$. В этом случае в (30) $i=\alpha=1,\ \ j=\beta=1$ и формула (30) принимает требуемый теоремой вид (первая формула в (15))

$$\xi(t,x_{111},x_{112})=-\frac{\partial\theta_{111}(t,x_{111},x_{112})}{\partial x_{112}}=-\frac{\partial\mu(t,x_{111},x_{112})}{\partial x_{112}}, \tag{32}$$

введено обозначение

$$\mu(t,x_{111},x_{112})=\theta_{111}(t,x_{111},x_{112}). \tag{33}$$

Вторая формула в (15) — следствие соотношений (18), (32) и обозначения (33):

$$\eta_{111}(t,x_{111},x_{112})\overset{(18)}{=}\theta_{111}+x_{112}\xi\overset{(32),(33)}{=}$$
$$\overset{(32),(33)}{=}\mu(t,x_{111},x_{112})-x_{112}\frac{\partial\mu(t,x_{111},x_{112})}{\partial x_{112}}.$$

2. $i=1,\ \ p_1>1,\ \ j=\overline{1,p_1}$. Связь (30) влечет соотношения

$$\xi=-\frac{\partial\theta_{1j1}}{\partial x_{1j2}}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial\theta_{1j1}}{\partial x_{1\beta2}}=0,\quad \beta\neq j. \tag{35}$$

Из (31) и (34) следует, что у функции ξ возможна зависимость от следующих переменных $\xi(t,x_{111},x_{121},\ldots,x_{1p_11},x_{112},x_{122},\ldots,x_{1p_12})$. Продифференцируем (34) по $x_{1\beta2}$ при $\beta\neq j$, с учетом (35) получим

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_{1\beta2}}=-\frac{\partial}{\partial x_{1\beta2}}\frac{\partial\theta_{1j1}}{\partial x_{1j2}}=-\frac{\partial}{\partial x_{1j2}}\frac{\partial\theta_{1j1}}{\partial x_{1\beta2}}=0,$$

т. е. функция ξ ввиду произвольности индексов β и j $(\beta\neq j)$ не зависит от переменных $x_{112},x_{122},\ldots,x_{1p_12}$ и имеет доказываемый вид $\xi(t,x_{111},x_{121},\ldots,x_{1p_11})$ (см. (17)). Из (34) находится возможная зависимость функций θ_{1j1} от переменных x_{1jk}:

$$\begin{gathered}\theta_{1j1}=-x_{1j2}\xi(t,x_{111},x_{121},\ldots,x_{1p_11})+\\ +\nu_j(t,x_{111},x_{121},\ldots,x_{1p_11}),\end{gathered} \tag{36}$$

где $\nu_j(t,x_{111},x_{121},\ldots,x_{1p_11})$ — некоторые функции указанных переменных. Учет этих соотношений в формуле (18) приводит к результату

$$\eta_{1j1}=\theta_{1j1}+x_{1j2}\xi=-x_{1j2}\xi+\nu_j(t,x_{111},x_{121},\ldots,x_{1p_11})+x_{1j2}\xi=$$
$$=\nu_j(t,x_{111},x_{121},\ldots,x_{1n1}),$$

т. е. функции ν_j в (36) и коэффициенты η_{1j1} оператора симметрий (8) совпадают, следовательно, функции η_{1j1} и ν_j имеют одинаковую возможную зависимость от переменных x_{1jk}: $\eta_{1j1}(t,x_{111},$ $x_{121},\ldots,x_{1p_11})$. Как и утверждается в формулировке теоремы, коэффициенты $\xi(t,x_{11},x_{121},\ldots,x_{1p_11})$

и $\eta_{1j1}(t,x_{111},x_{121},\ldots,x_{1p_{11}})$ оператора симметрий (8) могут быть выбраны произвольно. Утверждения (15) и (17) теоремы для верхнего уровня ($i=1$ на рис. 1 и в (13)) доказаны.

Рассмотрим функцию θ_{ij1} при $i>1.$ Для нее из (30) следуют равенства

$$\xi(t,x^*) = -\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{ij2}}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial\theta_{ij1}}{\partial x_{\alpha\beta 2+n_\alpha - n_i}} = 0, \ \ \{\alpha\beta\}\neq\{ij\}, \tag{38}$$

для краткости обозначены переменные верхнего уровня

$$x^* = \begin{cases} x_{111}, x_{112}, & \text{если } p_1 = 1, \\ x_{111}, x_{121}, \ldots, x_{1p_1 1}, & \text{если } p_1 > 1, \end{cases} \tag{39}$$

от которых может зависеть функция $\xi.$ Из равенства (38) следует, что функция θ_{ij1} не зависит от переменных $x_{\alpha\beta 2+n_\alpha - n_i}$, связанных с «чужим» интегратором ($\{\alpha\beta\}\neq\{ij\}$). Напомним, что $2+n_\alpha - n_i$ — максимальный индекс γ, с которым переменные $x_{\alpha\beta\gamma}$ могут являться аргументами функции θ_{ij1} (см. (23), (25)), т. е. функция θ_{ij1} допускает следующую зависимость от переменных, связанных с разными интеграторами:

$$\begin{gathered}\theta_{ij1}(t,x_{ij1},x_{ij2},x_{\alpha\beta\gamma}),\\ \alpha=\overline{1,i}, \quad \beta=\overline{1,p_\alpha}, \quad \gamma=\overline{1,1+n_\alpha-n_i}, \quad \{\alpha\beta\}\neq\{ij\}.\end{gathered} \tag{40}$$

Сделаем в равенстве (37) замену переменных

$$\theta_{ij1}(t,x_{ij1},x_{ij2},x_{\alpha\beta 1+n_\alpha - n_i}) = -x_{ij2}\xi(t,x^*) + \nu_{ij}. \tag{41}$$

Подстановка (41) в (37) с учетом (39) приводит к результату

$$\frac{\partial\nu_{ij}}{\partial x_{ij2}} = 0, \tag{42}$$

т. е. функция ν_{ij} допускает следующую зависимость от переменных:

$$\nu_{ij}(t,x_{\alpha\beta\gamma}), \qquad \alpha=\overline{1,i}, \quad \beta=\overline{1,p_\alpha}, \quad \gamma=\overline{1,1+n_\alpha-n_i}, \tag{43}$$

набор переменных $x_{\alpha\beta\gamma}$ включает в себя переменные x_{ij1} и x^* (см. (39)). Учет соотношений (41) и (43) в формуле (18) приводит к результату

$$\eta_{ij1} = \theta_{ij1} + x_{ij2}\xi = -x_{ij2}\xi + \nu_{ij}(t,x_{\alpha\beta\gamma}) + x_{ij2}\xi = \nu_{ij}(t,x_{\alpha\beta\gamma}),$$

т. е. то есть функции ν_{ij} в (41) и коэффициенты η_{ij1} оператора симметрий (8) совпадают, следовательно, функции η_{ij1} и ν_{ij} имеют одинаковую возможную зависимость от переменных x_{ijk} : $\eta_{ij1}(t,x_{\alpha\beta\gamma}).$ Как и утверждается в формулировке теоремы, производящие функции

$$\xi(t,x^*), \ \ \eta_{ij1}(t,x_{\alpha\beta\gamma}), \ \ \alpha=\overline{1,i}, \ \ \beta=\overline{1,p_\alpha}, \ \ \gamma=\overline{1,1+n_\alpha-n_i},$$

(x^* определены в (39)) могут быть выбраны произвольно. ■

Следствие. Если независимая переменная t однопараметрической группой симметрий (6) канонической формы Бруновского (3) не преобразуется $(\hat{t}=t,\ \ \xi\equiv 0)$, то производящие функции η_{ij1} есть произвольные функции указанных переменных:

$$\eta_{ij1}(t,x_{\alpha\beta\gamma}),$$
$$i=\overline{1,q},\ j=\overline{1,p_i},\ \alpha=\overline{1,i},\ \beta=\overline{1,p_\alpha},\ \gamma=\overline{1,n_\alpha-n_i+1}.$$

□ При $\xi\equiv 0$ случаи 1 и 2 в формулировке теоремы совпадают (см. (15)):

$$\frac{\partial\mu(t,x_{111},x_{112})}{\partial x_{112}}=0,\qquad \eta_{111}(t,x_{111})=\mu(t,x_{111}).$$

Утверждение следствия с учетом $\xi\equiv 0$ совпадает с утверждением 2 теоремы. ■

Исследование симметрий (6) в случае

$$\hat{t}=t,\qquad \frac{\partial\hat{x}_{ijk}(t,x,a)}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial\hat{u}_{ij}(t,x,u,a)}{\partial t}=0$$

поддается методике, разработанной в [2]. Применение этой методики к системе (3) приводит к результату, совпадающему с утверждением следствия. В рассмотренных далее примерах или независимая переменная t преобразуется, или функции $\hat{x}_{ijk}(t,x,a),\ \hat{u}_{ij}(t,x,u,a)$ зависят от t.

3. Изучение управляемости с учетом симметрий

По определению 1 преобразования симметрии «тиражируют» решения. Одно известное решение $x_{ijk}(t),\ u_{ij}(t)$ может быть «растиражировано» в достаточно полную совокупность управляемых процессов. Система (3) в форме Бруновского достаточно сложный многомерный объект. Частные случаи использования симметрий для решения разных задач управляемости были изучены ранее: [5] (в (1) и на рис. 1 $q=1$, $n_1=2$, $p_1=1$ — один 2-кратный интегратор); [6] (в (1) и на рис. 1 $q=1$, $n_1=3$, $p_1=1$ — один 3-кратный интегратор); [7] (в (1) и на рис. 1 $q=1$, $\forall n_1$, $p_1=1$ — один n_1-кратный интегратор); [9] (в (1) и на рис. 1 $q=2$, $\forall n_1$, $p_1=1$, $n_2=1$, $\forall p_2$ — один n_1-кратный интегратор, p_2 однократных интегратора); [10] (в (1) и на рис. 1 $q=2$, $n_1=3$, $p_1=1$, $n_2=2$, $p_2=2$ — один 3-кратный интегратор, два 2-кратных интегратора).

Рассмотрим для общего случая системы Бруновского (3) задачу нахождения управления, при помощи которого заданное начальное состояние переходит в начало координат (нуль-управляемость). Введем некоторые симметрии, помогающие решить эту задачу. Система (3) состоит из n_i-кратных интеграторов. Изучим вначале случай, когда ненулевые компоненты начального состояния принадлежат одному и тому же интегратору, и переход в начало координат происходит при изменении только переменных, описывающих поведение этого интегратора:

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= x_{k+1}, && k=\overline{1,n-1},\\ \dot{x}_n &= u, && |u|\le 1,\end{aligned}\tag{44}$$

введено ограничение $|u|\le 1$ на значения управления.

В качестве решения, которое будет «тиражироваться» преобразованиями симметрии, примем тривиальное решение

$$x(t)\equiv 0,\qquad u(t)\equiv 0.\tag{45}$$

Рассмотрим несколько групп симметрий, решающих задачу нуль-управляемости.

а) Группа симметрий с производящими функциями (см. замечание 1)

$$\xi \equiv 0, \qquad \eta_1 = \frac{1}{m!}(1-t)^n t^m, \quad m \le n-1. \tag{46}$$

Вычисления по формулам (14) приводят к результатам

$$\begin{aligned}
&\xi = 0,\\
\eta_1 &= \frac{1}{m!}(1-t)^n t^m,\\
\eta_2 &= (1-t)^{n-1}\left(a_0^2 t^m + \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}\right),\\
\eta_3 &= (1-t)^{n-2}\left(a_0^3 t^m + a_1^3 t^{m-1} + \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2}\right),\\
&\vdots\\
\eta_m &= (1-t)^{n-m+1}\left(a_0^m t^m + a_1^m t^{m-1} + \dots + t\right),\\
\eta_{m+1} &= (1-t)^{n-m}\left(a_0^{m+1} t^m + a_1^{m+1} t^{m-1} + \dots + 1\right),\\
&\vdots\\
\eta_n &= (1-t)\left(a_0^n t^m + a_1^n t^{m-1} + \dots + a_m^n\right),\\
\omega &= \left(a_0^{n+1} t^m + a_1^{n+1} t^{m-1} + \dots + a_m^{n+1}\right),
\end{aligned} \tag{47}$$

где a_i^j — некоторые коэффициенты. Группа симметрий (6) вычисляется по формулам (10), (11). Подстановка в уравнения группы опорного решения (45) определяет решения

$$\begin{aligned}
x_1 &= a\frac{1}{m!}(1-t)^n t^m,\\
x_2 &= a(1-t)^{n-1}\left(a_0^2 t^m + \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}\right),\\
x_3 &= a(1-t)^{n-2}\left(a_0^3 t^m + a_1^3 t^{m-1} + \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2}\right),\\
&\vdots\\
x_m &= a(1-t)^{n-m+1}\left(a_0^m t^m + a_1^m t^{m-1} + \dots + t\right),\\
x_{m+1} &= a(1-t)^{n-m}\left(a_0^{m+1} t^m + a_1^{m+1} t^{m-1} + \dots + 1\right),\\
&\vdots\\
x_n &= a(1-t)\left(a_0^n t^m + a_1^n t^{m-1} + \dots + a_m^n\right),\\
u &= a\left(a_0^{n+1} t^m + a_1^{n+1} t^{m-1} + \dots + a_m^{n+1}\right),
\end{aligned} \tag{48}$$

обладающие следующим свойством: на интервале $t \in [0,1]$ начальное положение $(a \ne 0)$

$$\begin{gathered}
x_1(0) = 0, \dots, x_m(0) = 0, \; x_{m+1}(0) = a, \; x_{m+2}(0) = aa_m^{m+2}, \dots\\
\dots x_n(0) = aa_m^n
\end{gathered} \tag{49}$$

переводится в начало координат $x_k(1) = 0, \; k = \overline{1,n}.$

б) Управление $u(t)$, соответствующее процессу (48) при фиксированном значении группового параметра a, может выходить за дозволенные пределы (см. (44)):

$$\max_{t\in[0,1]} |u(t)| = u_0 > 1. \tag{50}$$

Для введения управления в нужные рамки используем группу симметрий с производящими функциями

$$\xi = t, \qquad \eta_1 = mx_1.$$

Вычисления по формулам (14) приводят к результатам

$$\xi = t, \quad \eta_1 = mx_1, \quad \eta_2 = (m-1)x_2, \ldots, \eta_m = x_m, \quad \eta_{m+1} = 0,$$
$$\eta_{m+2} = -x_{m+2}, \ldots, \eta_n = -(n-m-1)x_n, \quad \omega = -(n-m)u$$

и по формулам (10), (11) к группе симметрий (b — групповой параметр)

$$\begin{gathered} \hat{t} = te^b, \quad \hat{x}_1 = x_1 e^{mb}, \quad \hat{x}_2 = x_2 e^{(m-1)b}, \ldots, \hat{x}_m = x_2 e^b, \\ \hat{x}_{m+1} = x_{m+1}, \quad \hat{x}_{m+2} = x_{m+2} e^{-b}, \ldots, \hat{x}_n = x_n e^{-(n-m-1)b}, \\ \hat{u} = ue^{-(n-m)b}. \end{gathered} \tag{51}$$

Так как выполняется $n-m>0$ (см. (46)), при $e^{(n-m)b} = u_0$ (см. (50)) управление войдет в требуемые рамки $|u(t)| \le 1$, время процесса увеличится, начальное состояние останется в гиперплоскости

$$x_1(0) = 0, \ldots, x_m(0) = 0, \ x_{m+1}(0) = a,$$

конечным положением будет по-прежнему начало координат.

Группы а) и б) для каждой гиперплоскости

$$x_{m,1}(0) = 0, \ldots, x_{m,m}(0) = 0, \ x_{m,m+1}(0) = a_m, \quad a_m \ne 0, \tag{52}$$

строят допустимый ($|u_m(t)| \le 1$) нуль-управляемый процесс. Векторы $\mathbf{r}_m^0$, проведенные из начала координат к начальным точкам этих процессов, линейно независимы:

$$\det \| \mathbf{r}_0^0 \cdots \mathbf{r}_{n-1}^0 \| = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & * & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ & * & * & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix} = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} \ne 0,$$

т. е. при любых значениях $a_m \ne 0$ векторы $\mathbf{r}_0^0, \ldots, \mathbf{r}_{n-1}^0$ есть базис в пространстве состояний. Для любой начальной точки $\mathbf{r}^0$ найдутся такие числа $a_m \ne 0$, что точка $\mathbf{r}^0$ является выпуклой комбинацией базисных векторов:

$$\mathbf{r}^0 = \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_m \mathbf{r}_m^0, \qquad 0 \le \lambda_m \le 1, \qquad \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_m = 1. \tag{53}$$

Коэффициенты λ_m используем для построения нужного решения:

$$x_k(t) = \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_m x_{m,k}(t), \qquad u(t) = \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_m u_m(t), \tag{54}$$

где $x_{m,k}(t)$, $u_m(t)$ — решения, соответствующие базисным начальным данным (52). Функции (54) — линейные комбинации решений линейной системы (44), поэтому являются решением (44). Решение (54) по построению (53) имеет нужные начальную точку $\mathbf{r}^0$ и конечную $\mathbf{r}=0$. Наконец, в силу условий на λ_m (см. (53)) и $u_m(t)$ (см. (44)) управление $u(t)$ является допустимым:

$$|u(t)|=\left|\sum_{m=0}^{n-1}\lambda_m u_m(t)\right|\le\sum_{m=0}^{n-1}\lambda_m\left|u_m(t)\right|\le\sum_{m=0}^{n-1}\lambda_m\le 1.$$

Решение задачи нуль-управляемости, для наглядности проведенное для одного интегратора, почти дословно может быть использовано для формы Бруновского (3) в общем случае.

Список литературы

1. *Елкин В. А.* Редукция нелинейных управляемых систем: Дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, Физматлит, 1997. 320 с.
2. *Елкин В. И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Симметрии и классификация. М.: Фазис, 2006. 240 с.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
4. *Павловский Ю. Н., Яковенко Г. Н.* Группы, допускаемые динамическими системами // Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск: Наука, 1982. С. 155−189.
5. *Яковенко Г. Н.* Решение задачи управляемости с использованием симметрии // Прикладная механика и процессы управления: Межвед. сб. науч. тр. / МФТИ. М., 1991. С. 17−31.
6. *Яковенко Г. Н.* Дифференциальные уравнения с управлением: нуль-управляемость, симметрии // Актуальные проблемы обучения математики (к 155-летию со дня рождения А. П. Киселева): Тр. Всерос. науч.-прак. конф. Орел: Изд-во ОГУ, Полиграфическая фирма «Картуш», 2007а. С. 495−499.
7. *Яковенко Г. Н.* Симметрии многократного интегратора // Симметрии: теоретический и методический аспекты: Сб. науч. тр. II Междунар. семинара / Науч. ред.: Н. В. Аммосова, И. Б. Коваленко. Астрахань: Изд-во ОГОУ ДПО АИПКП, 2007б. С. 75−80.
8. *Яковенко Г. Н.* Теория управления регулярными системами. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2008а. 264 с.
9. *Яковенко Г. Н.* Симметрии управляемых систем в форме Бруновского // Математика. Компьютер. Образование: Сб. науч. тр. Том 2 / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. М.−Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008б. С. 99−105.
10. *Яковенко Г. Н.* Системы в канонической форме Бруновского: симметрии, управляемость // Устойчивость, управление и динамика твердого тела: Тез. докл. X Междунар. конфер. (5−10 июня 2008 года). Донецк: Ин-т прикл. математики и механики НАНУ, 2008в. С. 104.
11. *Brunovsky P. A.* A classification of linear controllable systems // Kybernetika. 1970. Vol. 6. P. 176−188.
12. *Martin Ph., Murray R. M., Rouchon P.* Flat Systems // Mathematical Control Theory (A. A. Agrachev ed.). Trieste: ICTP Lecture Notes, 2002. P. 705−768.
13. *Respondek W.* Introduction to Geometric Nonlinear Control; Linearization, Observability, Decoupling // Mathematical Control Theory (A. A. Agrachev ed.). Trieste: ICTP Lecture Notes, 2002. P. 169−222.