

Устойчивая оценка интенсивности источника загрязнения атмосферы на основе метода последовательной функциональной аппроксимации

А. А. Чубатов^{1,а}, В. Н. Кармазин¹

¹ Кубанский государственный университет,
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149

E-mail: ^а chaa@inbox.ru

Получено 30 июня 2009 г.,
после доработки 17 августа 2009 г.

В работе предлагается подход, позволяющий организовать оперативный контроль за интенсивностью действия источника выбросов в атмосферу. Восстановление неизвестной интенсивности источника загрязнения атмосферы производится по измерениям концентрации примеси в отдельных стационарных точках. Для решения обратной задачи использовались методы шаговой регуляризации и последовательной функциональной аппроксимации. Решение представлено в форме цифрового фильтра в смысле Хэмминга. Описан алгоритм выбора регуляризирующего параметра r для метода функциональной аппроксимации.

Работа продолжает исследования, представленные в [1, 2].

Ключевые слова: загрязнение атмосферы, цифровой фильтр

The stable estimation of intensity of atmospheric pollution source on the base of sequential function specification method

A. A. Chubатов¹, V. N. Karmazin¹

¹ *Kuban State University, Stavropolskaya str. 149, Krasnodar, 350040, Russia*

Abstract. — The approach given in this work helps to organize the operative control over action intensity of pollution emissions in atmosphere. The approach allows to sequential estimate of unknown intensity of atmospheric pollution source on the base of concentration measurements of impurity in several stationary control points is offered in the work. The inverse problem was solved by means of the step-by-step regularization and the sequential function specification method. The solution is presented in the form of the digital filter in terms of Hamming. The fitting algorithm of regularization parameter r for function specification method is described.

Key words: atmospheric pollution, digital filter

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 391–403 (Russian).

Введение

Наиболее универсальными моделями для получения количественных и качественных картин распределения загрязнений в атмосфере являются полуэмпирические модели [3]. Отсутствие исходных данных о мощностях источников выбросов, искажение граничных и начальных условий, неадекватный учет метеорологических характеристик атмосферы приводят к существенным расхождениям между расчетными и экспериментальными данными. В этой связи представляется целесообразным совместное решение прямых и обратных задач распространения примесей в атмосфере на основе данных о замерах концентрации примеси в стационарных или мобильных пунктах контроля. Такой подход позволяет рассчитывать на существенное повышение точности модельных расчетов на математических моделях приемлемой сложности.

1. Модель

Постановка задачи. В двумерной области $D=[0;1] \times [0;1]$ рассмотрим линейное полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии [3]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x \cdot q) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y \cdot q) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot \frac{\partial q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \cdot \frac{\partial q}{\partial y}\right) + F(x, y, t) \quad (1)$$

при следующих условиях: $q|_{t=0} = 0$, $q|_{\partial D} = 0$, где $q(x, y, t) = \int_0^H q(x, y, z, t) dz$ — интегральная по высоте концентрация примеси; (v_x, v_y) — вектор скорости ветра; (K_x, K_y) — вектор коэффициентов турбулентной диффузии; $F(x, y, t)$ — функция источника.

Предположим, что имеется один источник выбросов и функция источника представима в виде

$$F(x, y, t) = f(x, y) \cdot g(t), \quad (2)$$

где $f(x, y)$ — функция, определяющая пространственное расположение источника выбросов (в простейшем случае, в зоне действия источника функция равна 1, вне источника — 0); $g(t)$ — интенсивность действия источника.

Прямая задача состоит в определении поля концентрации $q(x, y, t)$ при известных (K_x, K_y) , (v_x, v_y) , $f(x, y)$, $g(t)$. Рассмотрим обратную задачу, состоящую в определении $g(t)$ по заданным (K_x, K_y) , (v_x, v_y) , $q(x, y, t)$, $f(x, y)$.

На практике при определении поля концентрации $q(x, y, t)$ возникает ряд проблем:

- измерения концентрации не проводятся во всей области;
- концентрация не может измеряться непрерывно по времени;
- существуют погрешности измерений.

Будем считать, что в точках (x_j, y_j) , $j=1, 2, \dots, J$, установлены датчики, которые измеряют интегральную концентрацию в дискретные моменты времени t_i . Предположим, что погрешности измерений аддитивны и некоррелированы

$$c_{ji} = q(x_j, y_j, t_i) + \delta \cdot \gamma, \quad (3)$$

где δ — среднеквадратичная ошибка измерений датчика; γ — нормальная случайная величина с единичной дисперсией и нулевым математическим ожиданием.

Также предположим, что $f(x_j, y_j) = 0$, т. е. замеры производятся вне зоны действия источника. Обратная задача в этом случае является некорректной (наблюдается неустойчивость решения — нет непрерывной зависимости решения от замеров концентрации).

Целью данной работы является создание устойчивого (к погрешностям замеров концентрации) алгоритма решения задачи последовательной идентификации интенсивности источника.

2. Решение обратной задачи

Теорема Дюамеля. Линейность задачи и условие (2) позволяют воспользоваться теоремой Дюамеля:

$$q(x, y, t) = \int_0^t g(\tau) \frac{\partial Q(x, y, t - \tau)}{\partial t} d\tau,$$

где $Q(x, y, t)$ — решение прямой задачи (1) при $g(t) = 1$ и однородных начальном и граничных условиях.

Рассмотрим функциональную форму, при которой $g(t)$ принимает на каждом временном промежутке $[t_{N-1}; t_N]$ постоянное значение g_N .

Учитывая, что $\frac{\partial Q(x, y, t - \tau)}{\partial t} = -\frac{\partial Q(x, y, t - \tau)}{\partial \tau}$ и что $Q(x, y, t)$ — сеточная функция, запишем численный аналог теоремы Дюамеля:

$$q(x_j, y_j, t_i) = \sum_{n=1}^i g(\tau_n) \frac{Q(x_j, y_j, t_i - \tau_{n-1}) - Q(x_j, y_j, t_i - \tau_n)}{\tau_n - \tau_{n-1}} (\tau_n - \tau_{n-1}).$$

Будем использовать равные шаги по времени $\tau_n - \tau_{n-1} = \Delta t = \text{const}$, тогда $\tau_n = n\Delta t$ и $t_i = i\Delta t$, следовательно, $t_i - \tau_n = (i - n)\Delta t = t_{i-n}$. Отсюда:

$$q(x_j, y_j, t_i) = \sum_{n=1}^i g_n \cdot (Q(x_j, y_j, t_{i-n+1}) - Q(x_j, y_j, t_{i-n})).$$

Введем обозначения $q(x_j, y_j, t_i) = q_{ji}$, $Q(x_j, y_j, t_i) = \phi_{ji}$, $\phi_{j(i-n+1)} - \phi_{j(i-n)} = \Delta\phi_{j(i-n)}$, тогда расчетная концентрация будет равна

$$q_{ji} = \sum_{n=1}^i g_n \cdot \Delta\phi_{j(i-n)}. \quad (4)$$

Коэффициенты чувствительности. Величина ϕ_{ji} называется ступенчатым коэффициентом чувствительности (СКЧ), который представляет собой концентрацию примеси в точке расположения j -го датчика в момент времени t_i , при условии $g(t) = 1$, т. е. отклик (реакция) на единичное ступенчатое возмущение интенсивности действия источника, произошедшее в момент времени $t_0 = 0$.

Тогда величину $\phi_{j(i-n)}$ можно трактовать как концентрацию примеси в точке расположения j -го датчика в момент времени t_i , при условии, что единичное ступенчатое возмущение интенсивности действия источника произошло в момент времени t_n .

Величина $\Delta\phi_{j(i-n)}$ называется импульсным коэффициентом чувствительности (ИКЧ) и представляет собой приращение концентрации примеси в точке расположения j -го датчика в момент

времени t_i , при единичном импульсе (импульсном возмущении) интенсивности действия источника в течение промежутка времени $[t_{n-1}; t_n]$.

Графики функций чувствительности. Импульсная функция чувствительности ($\Delta\phi_j(t) = Q(x_j, y_j, t) - Q(x_j, y_j, t - \Delta t)$) представляет собой отклик (реакцию) на единичное импульсное (в течение времени Δt) возмущение интенсивности действия источника. На рис. 1 приведены графики функций чувствительности для трех различных датчиков. Графики этих функций имеют один максимум (в отдельных случаях функция может быть монотонно возрастающей). На рис. 1 датчик № 3 самый чувствительный: он быстрее (запаздывание меньше, чем у других датчиков) и сильнее (демпфирование меньше, чем у других датчиков) реагирует на изменение интенсивности источника.

Импульсные коэффициенты чувствительности для данного датчика являются дискретными отсчетами импульсной функции чувствительности этого датчика

$$\Delta\phi_{jk} = \phi_{j(k+1)} - \phi_{jk} = Q(x_j, y_j, (k+1) \cdot \Delta t) - Q(x_j, y_j, k \cdot \Delta t) = \Delta\phi_j((k+1) \cdot \Delta t).$$

Графики ступенчатого и импульсного коэффициентов чувствительности датчика № 1 приведены на рис. 2. Отметим, что коэффициенты чувствительности, как и функции чувствительности, зависят от шага Δt .

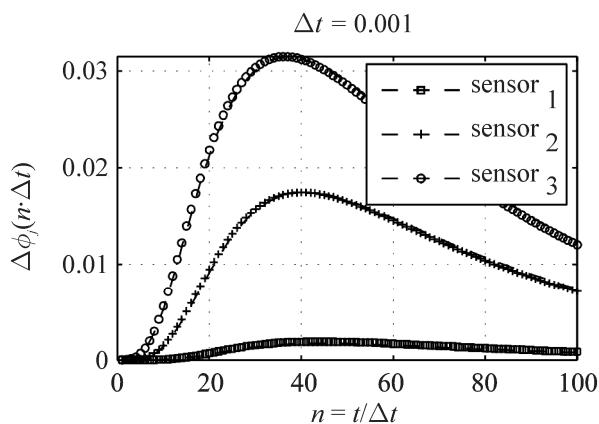


Рис. 1. Графики импульсных функций чувствительности ($\Delta t = 0.001$)

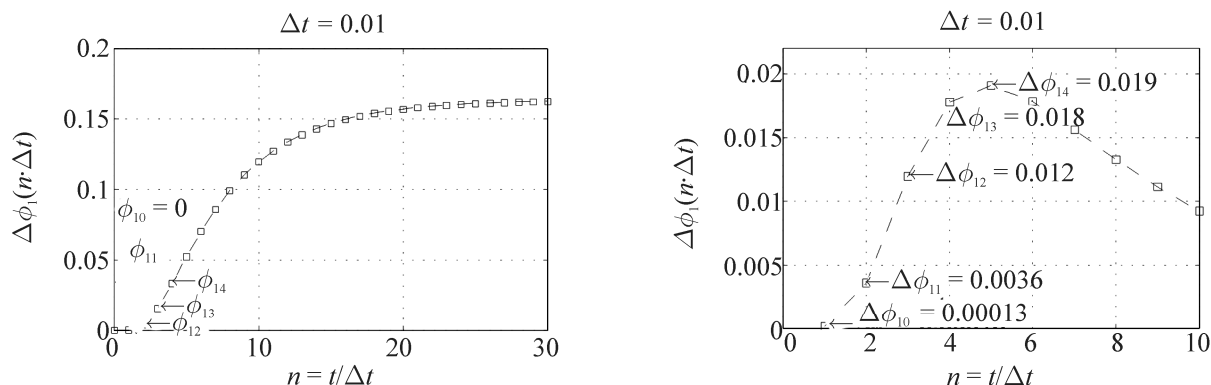


Рис. 2. Ступенчатые и импульсные коэффициенты чувствительности (при $\Delta t = 0.01$)

Решение обратной задачи. Рассмотрим простейший случай: восстановление интенсивности источника по показаниям одного датчика. Обратная задача состоит в нахождении g_n из (4) при

известных c_{1n} и $\Delta\phi_{1(N-n)}$, где $n=1, 2, \dots, N$. В последовательном алгоритме идентификации необходимо найти g_N , считая g_1, g_2, \dots, g_{N-1} известными величинами, вычисленными на предыдущих шагах. Запишем формулу (4) для рассчитанной концентрации в момент времени t_N в виде

$$q_{1N} = \sum_{n=1}^{N-1} g_n \Delta\phi_{1(N-n)} + g_N \Delta\phi_{10}. \quad (5)$$

Введем обозначение $\sum_{n=1}^{N-1} g_n \Delta\phi_{1(N-n)} = q_{1N}|_{g_N=0}$ — концентрация в момент времени t_N в случае, если $g_N = 0$.

Приравняем рассчитанные и измеренные значения концентрации $q_{1n} = c_{1n}$ (способ точной подгонки — метод Штольца), тогда решением уравнения (5) будет

$$g_N = \frac{c_{1N} - \sum_{n=1}^{N-1} g_n \Delta\phi_{1(N-n)}}{\Delta\phi_{10}}. \quad (6)$$

Неустойчивость решения. Импульсный коэффициент чувствительности $\Delta\phi_{10}$ может быть довольно малой величиной, что делает решение (6) очень чувствительным к погрешностям замеров концентрации. В частности, для примера, приведенного на рис. 2, $\Delta\phi_{10} = 0.00013$. Ясно, что при среднеквадратичной погрешности замеров концентрации $\delta = 0.001$ решение (6) будет неустойчивым.

Обратные задачи характеризуются неустойчивостью решения к погрешностям исходных данных и требуют специальных методов решения. Такими методами могут быть прямые методы (шаговая регуляризация) [4], метод регуляризации А. Н. Тихонова [5] и метод функциональной аппроксимации [6].

Для достижения устойчивости решения (6) нужно увеличить $\Delta\phi_{10}$. Это можно сделать одним из способов:

- увеличить шаг по времени Δt , но это не всегда возможно и оправдано, т. к. приводит к загромождению решения;
- расположить датчик в «более чувствительной» точке, где $\Delta\phi_{10} > \Delta\phi_{10}$, но это не всегда возможно;
- использовать не один, а несколько датчиков.

Для каждого датчика существует критический шаг $\Delta t_{st[1]}$ такой, что при шаге решения обратной задачи $\Delta t > \Delta t_{st[1]}$ [4] и единственном датчике решение устойчиво к погрешностям замеров концентрации, т. е. имеет место эффект шаговой регуляризации. Возможности шаговой регуляризации ограничены, т. к. для некоторых датчиков $\Delta t_{st[1]}$ может быть довольно большим (больше шага решения обратной задачи). В случае $\Delta t < \Delta t_{st[1]}$ решение (6) обратной задачи будет неустойчивым.

Если использовать не один, а несколько датчиков, то преобладающее влияние имеет датчик с большим ИКЧ $\Delta\phi_{j0}$, т. е. при добавлении датчиков с ИКЧ $\Delta\phi_{j0} < \Delta\phi_{10}$ устойчивость решения не улучшается. Вместо нескольких датчиков можно использовать датчик с большим $\Delta\phi_{j0}$.

Ситуацию могут исправить специальные способы решения обратной задачи.

Физические причины неустойчивости. Для обратной задачи атмосферной диффузии характерно как запаздывание, так и демпфирование. Запаздывание выражается в том, что при возмущении интенсивности источника максимум возмущения концентрации (отклика концентрации

на возмущение интенсивности) в точке расположения датчика (датчик находится вне зоны действия источника) будет достигнут только через некоторое время. Демпфирование проявляется в том, что возмущение концентрации в датчике меньше, чем в источнике.

О величине запаздывания и демпфирования можно судить по импульсным коэффициентам чувствительности. Рассмотрим пример: пусть импульс интенсивности единичной величины действовал в течение времени $[t_0; t_1] = [0; \Delta t] = [0; 0.01]$. Из рис. 2 видно, что отклик концентрации на импульс интенсивности почти не проявляется в конце первого промежутка времени (в момент времени $t_1 = 0.01$ отклик $\Delta\phi_0 \approx 0.00013$). В моменты времени $t_2 = 0.02$, $t_3 = 0.03$, $t_4 = 0.04$ отклики, соответственно, равны $\Delta\phi_1 \approx 0.0036$ (в 28 раз больше $\Delta\phi_0$), $\Delta\phi_2 \approx 0.012$ (в 3 раза больше $\Delta\phi_1$), $\Delta\phi_3 \approx 0.018$ (в 1,5 раза больше $\Delta\phi_2$). Максимальный отклик в датчике достигается в момент времени $t_5 = 0.05$ и его величина равна $\Delta\phi_4 \approx 0.019$. В этом случае $\Delta t_{st[1]} \approx 0.05 = 5 \cdot \Delta t$.

Таким образом, бóльшую информацию об импульсе интенсивности несут 3-й и 4-й отклики ($\Delta\phi_3$ и $\Delta\phi_4$), в то время как $\Delta\phi_0$ (0-й отклик) может оказаться меньше величины погрешности измерений. Следовательно, для получения устойчивых оценок интенсивности необходимо использовать информацию о замерах концентрации в последующие моменты времени.

Рассмотрим случай $\Delta t = \Delta t_{st[1]} \approx 0.05$. На рис. 3. слева показаны импульсные коэффициенты чувствительности, а справа приведены восстановленная и истинная интенсивности (видно, что при данном шаге решение обратной задачи устойчиво).

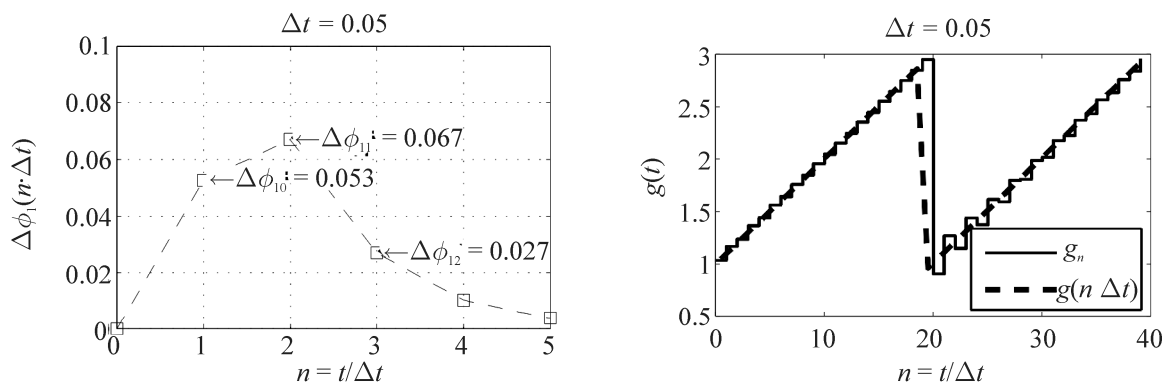


Рис. 3. Импульсные коэффициенты чувствительности, восстановленная и истинная интенсивности (при $\Delta t = 0.05$)

Использование последующих измерений. Для придания устойчивости решению обратной задачи (при шаге $\Delta t < \Delta t_{st[1]}$) рассмотрим замеры концентрации в r последующих (по отношению к t_N) моментах времени. Для примера, приведенного выше, $r = 4; 5$ (отклик в момент времени t_{N+r-1} должен быть близок к максимуму, но не обязательно достигать максимума).

Будем одновременно искать $g_N, g_{N+1}, \dots, g_{N+r-1}$, используя информацию о замерах $c_{jN}, c_{j(N+1)}, \dots, c_{j(N+r-1)}$. Как отмечалось выше (в силу запаздывания и демпфирования), замер $c_{j(N+r-1)}$ не несет практически никакой информации о g_{N+r-1} . Предположим, что r такое, что замеры $c_{jN}, c_{j(N+1)}, \dots, c_{j(N+r-1)}$ несут достоверную информацию только о g_N , поэтому сохраним только g_N , а остальные интенсивности отбросим и перейдем к следующему шагу (оценке g_{N+1}).

Используя (4), запишем систему уравнений для рассчитанных концентраций в моменты времени $t_N, t_{N+1}, \dots, t_{N+r-1}$:

$$q_{j(N+k-1)} = \sum_{n=1}^{N-1} g_n \cdot \Delta\phi_{j(N-n+k-1)} + \sum_{m=1}^k g_{N+m-1} \cdot \Delta\phi_{j(0+k-m)}, \quad j=1, 2, \dots, J, \quad k=1, 2, \dots, r. \quad (7)$$

Введем обозначения $\sum_{n=1}^{N-1} g_n \cdot \Delta\phi_{j(N-n+k-1)} = q_{j(N+k-1)} \Big|_{g_N=\dots=g_{N+k-1}=0} = q_{j(N+k-1)} \Big|_{g=0}$ — концентрация примеси в момент времени t_{N+k-1} в случае, если $g_N = \dots = g_{N+k-1} = 0$. Тогда систему уравнений (7) можно записать в матричном виде:

$$Q = Q \Big|_{g=0} + \Phi \cdot G, \quad (8)$$

где $Q_{N+k-1}, Q_{N+k-1} \Big|_{g=0} \in \mathbb{R}^J$, $Q, Q \Big|_{g=0} \in \mathbb{R}^{r \cdot J}$, $\Phi_{k-1} \in \mathbb{R}^J$, $\Phi \in \mathbb{R}^{r \cdot J \times r}$, $G \in \mathbb{R}^r$,

$$Q = \begin{bmatrix} Q_N \\ \dots \\ Q_{N+r-1} \end{bmatrix}, \quad Q_{N+k-1} = \begin{bmatrix} q_{1(N+k-1)} \\ \dots \\ q_{J(N+k-1)} \end{bmatrix}, \quad Q \Big|_{g=0} = \begin{bmatrix} Q_N \Big|_{g=0} \\ \dots \\ Q_{N+r-1} \Big|_{g=0} \end{bmatrix}, \quad Q_{N+k-1} \Big|_{g=0} = \begin{bmatrix} q_{1(N+k-1)} \Big|_{g=0} \\ \dots \\ q_{J(N+k-1)} \Big|_{g=0} \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_1 & \Phi_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{r-1} & \Phi_{r-2} & \dots & \Phi_0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{k-1} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_{1(k-1)} \\ \dots \\ \Delta\phi_{J(k-1)} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_N \\ \dots \\ g_{N+r-1} \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение (8) представляет собой переопределенную систему из $J \cdot r$ уравнений с r неизвестными, которая решается с использованием метода наименьших квадратов. Решением этой системы будет некая оценка интенсивности (при $r=1$ получаем точное решение — несмещенная оценка, при $r>1$ получается смещенная оценка).

Минимизируем сумму квадратов разности между измеренными C и рассчитанными Q значениями концентрации:

$$S = (C - Q)^T \cdot (C - Q) \rightarrow \min_G,$$

где $C_{N+k-1} \in \mathbb{R}^J$, $C \in \mathbb{R}^{r \cdot J}$,

$$C = \begin{bmatrix} C_N \\ \dots \\ C_{N+r-1} \end{bmatrix}, \quad C_{N+k-1} = \begin{bmatrix} c_{1(N+k-1)} \\ \dots \\ c_{J(N+k-1)} \end{bmatrix}.$$

К решению системы (8) можно подойти двумя способами:

- решать систему с r неизвестными $g_N, g_{N+1}, \dots, g_{N+r-1}$ и оставить только g_N ;
- сократить число неизвестных (что придаст системе дополнительную устойчивость), предположив, что интенсивности $g_N, g_{N+1}, \dots, g_{N+r-1}$ связаны некоторой функциональной зависимостью (метод функциональной аппроксимации [6]).

Последовательная функциональная аппроксимация. В методе последовательной функциональной аппроксимации предполагается, что r последующих (по отношению к g_N) интенсивностей связаны некоторой функциональной зависимостью. Предположим, что $g_{N+1}, \dots, g_{N+r-1}$ зависят от g_N (искомая величина) и g_{N-1} (уже вычислена)

$$G = \begin{bmatrix} g_N \\ \dots \\ g_{N+r-1} \end{bmatrix} = A \cdot g_N + B \cdot g_{N-1},$$

где $A, B \in \mathbb{R}^r$ — некоторые векторы-столбцы, описывающие функциональную зависимость $g_{N+1}, \dots, g_{N+r-1}$ от g_N и g_{N-1} . Для обеспечения условия $G_1 = g_N$ при любом виде функциональной зависимости $A_1 = 1, B_1 = 0$.

Простейшими случаями функциональной зависимости являются:

- предположение постоянства $g(t)$ в течение r последующих промежутков времени (случай постоянной зависимости):

$$g_{N+1} = \dots = g_{N+r-1} = g_N, \quad (9)$$

- случай линейной зависимости между $g_{N-1}, g_N, g_{N+1}, \dots, g_{N+r-1}$:

$$g_{N+i-1} = g_N + (i-1) \cdot (g_N - g_{N-1}) = i \cdot g_N + (1-i) \cdot g_{N-1}. \quad (10)$$

Оценка интенсивности g_N , минимизирующая S , находится по формуле

$$g_N = \left((\Phi \cdot A)^T \cdot \Phi \cdot A \right)^{-1} \cdot (\Phi \cdot A)^T \cdot \left(C - Q|_{g=0} - \Phi \cdot B \cdot g_{N-1} \right). \quad (11)$$

Представление решения в форме цифрового фильтра. Решение (11) является линейной функцией измеренных концентраций c_{ji} и его можно представить в форме цифрового фильтра [7]:

$$g_N = \sum_{i=1}^{N+r-1} \sum_{j=1}^J f_{j(N-i)} \cdot c_{ji},$$

где коэффициенты цифрового фильтра $f_{j(i-r)} = G_{ji}, i = 1, \dots, M+r-1, G_{ji}$ — решение обратной задачи при $c_{jr} = 1, c_{ji} = 0, i \neq r$ (коэффициенты чувствительности обратной задачи — отклики интенсивности на импульс концентрации).

Решение в форме цифрового фильтра в вычислительном отношении эффективнее других форм, т. к. коэффициенты фильтра f_{jk} вычисляются один раз.

3. Вычислительные эксперименты

Безразмерный вид задачи. Представим уравнение (1) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial q^+}{\partial t^+} + Pe \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^+} (v_x^+ q^+) + \frac{\partial}{\partial y^+} (v_y^+ q^+) \right) = \frac{\partial}{\partial x^+} \left(K_x^+ \frac{\partial q^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left(K_y^+ \frac{\partial q^+}{\partial y^+} \right) + Os \cdot f(x^+, y^+) \cdot g(t^+),$$

где l^*, q^*, v^*, K^* — масштабы длины, концентрации, скорости и коэффициентов турбулентной диффузии; $q = q^* \cdot q^+, x = l^* \cdot x^+, y = l^* \cdot y^+, t = t^* \cdot t^+, K_x = K^* \cdot K_x^+, K_y = K^* \cdot K_y^+, v_x = v^* \cdot v_x^+, v_y = v^* \cdot v_y^+, t^* = l^{*2}/K^*$ — масштаб времени (число Фурье), $Pe = v^* \cdot l^*/K^*$ — число Пекле, $Os = l^{*2}/(K^* \cdot q^*)$ — число Остроградского.

Параметризация задачи. Масштаб длины $l^* = 1000$ м. В качестве масштаба концентрации возьмем величину $q^* = 1$ г/м². Масштаб скорости $v^* = 1$ м/с. Масштаб коэффициентов турбулентной диффузии примем равным $K^* = 100$ м²/с. Тогда $t^* = 10^4$ с, $Os = 10^4$ м²с/г, $Pe = 10$. Промежуток времени между замерами концентрации (шаг решения обратной задачи) выберем равным $\Delta t = 100$ с, тогда безразмерный шаг $\Delta t^+ = 0.01$.

Вычислительные эксперименты. Для решения обратной задачи необходимо знать коэффициенты чувствительности, которые являются решением прямой задачи при $g(t^+) = 1$. Прямая зада-

ча решается с помощью программы, написанной на языке Fortran. Прямая задача решалась при шаге по времени $\Delta t_{direct}^+ = 0.001$ и прямоугольной сетке с шагами по координатам $\Delta x^+ = \Delta y^+ = 0.01$. Количество шагов по времени 2 000, т. е. $t^+ \in [0; 2]$. Для моделирования измерений концентрации решается прямая задача при известной функции интенсивности действия источника. Решение обратной задачи и визуализация расчетов реализованы в математическом пакете MatLab.

Пример численного эксперимента. Рассмотрим простейшую модельную обратную задачу. Пусть $K_x^+ = K_y^+ = 1$, $v_x^+ = v_y^+ = 1$, функция источника имеет вид

$$f(x^+, y^+) = \begin{cases} 1, & (x^+ - 0.5)^2 + (y^+ - 0.5)^2 \leq 0.1^2, \\ 0. & \end{cases}$$

Тогда безразмерное уравнение примет вид

$$\frac{\partial q^+}{\partial t^+} + 10 \cdot \left(\frac{\partial q^+}{\partial x^+} + \frac{\partial q^+}{\partial y^+} \right) = \frac{\partial^2 q^+}{\partial (x^+)^2} + \frac{\partial^2 q^+}{\partial (y^+)^2} + 10^4 \cdot f(x^+, y^+) \cdot g(t^+).$$

4. Результаты и обсуждение

Результаты вычислительных экспериментов. На ряде модельных задач проводились вычислительные эксперименты: по известной функции интенсивности $g(t)$ рассчитывались концентрации $q(x_j, y_j, t_i)$, в них вносилась ошибка ($\delta/q_{max} = 0.01 \div 0.03$) и по приближенным замерам c_{ji} вычислялась устойчивая оценка интенсивности g_N .

Для оценки точности восстановления интенсивности использовалось среднеквадратичное отклонение (усреднение проводится по всему временному ансамблю)

$$\sigma_G = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N (g_n - g(t_n))^2},$$

где g_n — оценка интенсивности, $g(t_n)$ — истинная интенсивность.

Для каждого датчика существует критический шаг $\Delta t_{st[1]}$, такой, что при шаге решения обратной задачи $\Delta t > \Delta t_{st[1]}$ решение устойчиво при $r = 1$ (шаговая регуляризация). С возрастанием Δt наблюдается ослабление зависимости величины σ_G от параметра δ (см. рис. 4).

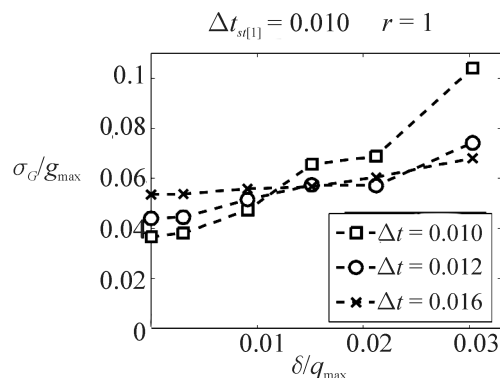


Рис. 4. Зависимость σ_G от параметра δ при $r = 1$

При использовании нескольких датчиков ($J > 1$) датчик с меньшим $\Delta t_{st[1]}$ имеет преобладающее влияние (если добавить датчик с бóльшим $\Delta t_{st[1]}$, то результат практически не улучшится). Использование двух датчиков с одинаковыми $\Delta t_{st[1]}$ немного улучшает результат по сравнению с одним датчиком.

Желание повысить точность восстановления интенсивности, уменьшая шаг по времени, приводит к неустойчивости решения обратной задачи. Использование функциональной аппроксимации с несколькими последовательными шагами по времени ($r > 1$) позволяет получать устойчивые оценки интенсивности при $\Delta t < \Delta t_{st[1]}$ (см. табл. 1). Например, для шага по времени $\Delta t = \Delta t_{st[1]}/4$ приемлемые результаты получаются при $r = 3$ (см. рис. 5).

Таблица 1

Примерные значения $\Delta t_{st[r]}$ для некоторых r

r	1	2	3	4	6
$\Delta t_{st[r]}$	$\Delta t_{st[1]}$	$\Delta t_{st[2]} = \Delta t_{st[1]}/3$	$\Delta t_{st[3]} = \Delta t_{st[1]}/4$	$\Delta t_{st[4]} = \Delta t_{st[1]}/6$	$\Delta t_{st[6]} = \Delta t_{st[1]}/10$

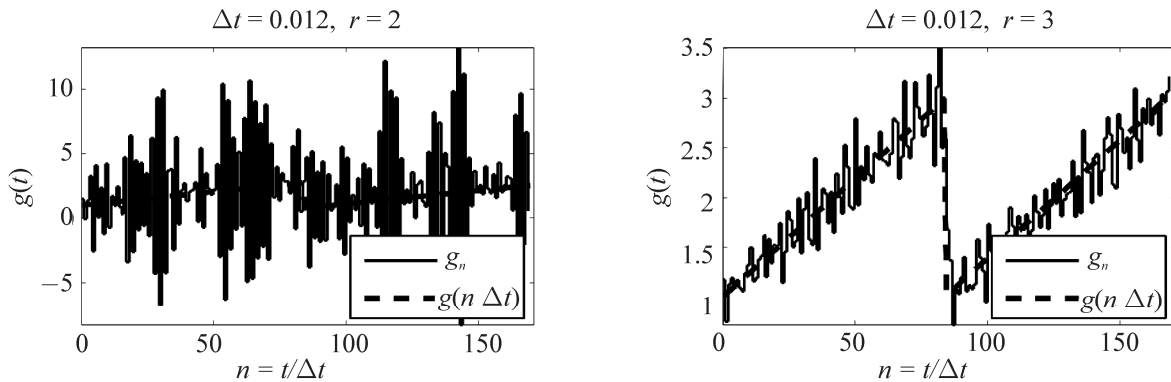


Рис. 5. Восстановленная и истинная интенсивности для $\Delta t = \Delta t_{st[1]}/4 = 0.012$ при $r = 2; 3$

При $\Delta t = \text{const}$ с увеличением r влияние δ на величину σ_G ослабевает и при определенном r величина σ_G практически не зависит от $\delta/q_{\text{max}} < 0.03$ (см. рис. 6). Значение параметра регуляризации $r = 5$ является оптимальным в том смысле, что σ_G практически не зависит от δ , а при дальнейшем увеличении r отклонение σ_G начинает возрастать.

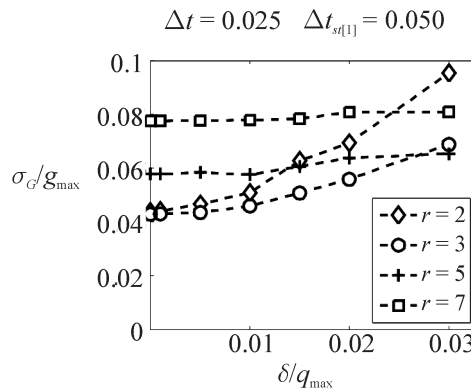


Рис. 6. Зависимость σ_G от δ и r при $\Delta t = \text{const} = \Delta t_{st[1]}/2$

В рамках проведенных экспериментов не обнаружено существенных различий между постоянной (9) и линейной (10) формами функциональных зависимостей.

Анализ результатов численных экспериментов позволяет сделать вывод, что для пары чисел $(\Delta t/\Delta t_{st[1]}, \delta)$, $\Delta t/\Delta t_{st[1]} \in [0.1; 1]$, $\delta \in [0; 0.03] \cdot q_{\max}$ можно подобрать r , при котором погрешность восстановления интенсивности σ_G минимальна.

В этой связи актуальна разработка алгоритмических методов выбора параметра r , обеспечивающего получение устойчивых оценок интенсивности.

5. Выбор параметра регуляризации r

Для вычисления σ_G необходимо знать истинную интенсивность $g(t)$, которая не известна в реальных задачах. Поэтому необходим способ теоретической оценки сверху $\bar{\sigma}_G$ для отклонения σ_G .

Пусть имеется один датчик и известны ступенчатые коэффициенты чувствительности $\phi_i = Q(x_1, y_1, t_i)$ (т. е. решение прямой задачи (1) при $g(t) = 1$ в точке (x_1, y_1)), а также задан шаг между замерами Δt . Необходимо подобрать оптимальное r , при котором $\bar{\sigma}_G$ минимальна.

Вместо σ_G рассмотрим среднеквадратичную погрешность σ_{g_N} восстановления g_N (усреднение проводится в момент времени t_N)

$$\sigma_{g_N} = \sqrt{M\left((g_N - g(t_N))^2\right)} = \sqrt{(g(t_N) - M(g_N))^2 + M\left((M(g_N) - g_N)^2\right)} = \sqrt{D^2 + V}.$$

Среднеквадратичная погрешность σ_{g_N} состоит из детерминированного смещения D , обусловленного погрешностью аппроксимации, и дисперсии V , зависящей от погрешности замеров концентрации $\Delta c_{ji} = c_{ji} - q(x_j, y_j, t_i)$ [6]. Вычислительные эксперименты подтверждают теоретическое предположение о том, что с увеличением параметра r дисперсия V уменьшается, а детерминированное смещение D увеличивается.

Оценка точности восстановления импульса интенсивности. Для оценки погрешности аппроксимации рассмотрим базовый пример с импульсом интенсивности без учета случайных ошибок ($\delta = 0$). Пусть интенсивность претерпевает единичный импульс на промежутке времени с номером r , тогда $g_{(imp)i} = 0$ при $i \neq r$ и $g_{(imp)r} = 1$. Тогда рассчитанные по формуле (4) концентрации равны $q_{ii} = 0$ при $i < r$ и $q_{ii} = \Delta\phi_{1(i-r)}$ при $i \geq r$. При этих значениях q_{ii} решаем обратную задачу, используя формулу (11), и в результате получаем отклики $\delta g_i / \delta g_{(imp)r}$ на импульсное изменение интенсивности.

Верхняя оценка D вычисляется по формуле $D_{\max} = \max_i \left| \delta g_i / \delta g_{(imp)r} - g_{(imp)i} \right|$.

Отклик интенсивности на импульс концентрации $\delta g_i / \delta c_{1r}$. Для оценки погрешности случайных ошибок рассмотрим базовый пример с импульсом концентрации. Будем моделировать случайные погрешности с помощью единичного импульса концентрации. Пусть $c_{1i} = 0$ при $i \neq r$ и $c_{1r} = 1$. Для этих значений c_{1i} решаем обратную задачу и в результате получаем отклики $\delta g_i / \delta c_{1r}$ на импульсное изменение концентрации. Отклики $\delta g_i / \delta c_{1r}$ представляют собой коэффициенты цифрового фильтра $\delta g_i / \delta c_{1r} = f_{1(i-r)}$, $i = 1, \dots, M + r - 1$.

Верхняя оценка дисперсии V определяется по формуле $V_{\max} = \delta^2 \cdot \sum_{i=1}^{M+r-1} (\delta g_i / \delta c_{1r})^2$.

Таким образом $\bar{\sigma}_G = \sqrt{D_{\max}^2 + V_{\max}}$.

Пример. Для шага по времени $\Delta t = \Delta t_{st[1]}/4$ форма импульса интенсивности восстанавливается достаточно хорошо (см. рис. 7) при $r = 2; 3$, но с возрастанием параметра r смещение D увеличивается.

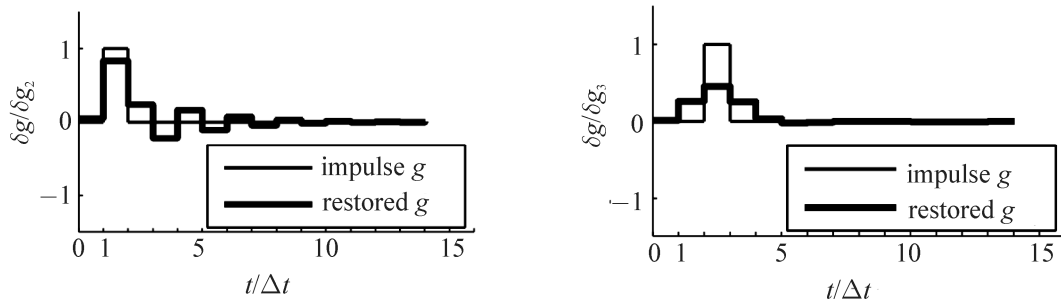


Рис. 7. Восстановление формы единичного импульса интенсивности

Для отклика интенсивности на импульс концентрации $\delta g_i / \delta c_{1r}$ результат представлен на рис. 8. Для $\Delta t = \Delta t_{st[1]}/4$ при $r = 2$ влияние случайного возмущения в датчике наблюдается дольше и сильнее, чем при $r = 3$. Таким образом, с увеличением r влияние случайных погрешностей уменьшается.

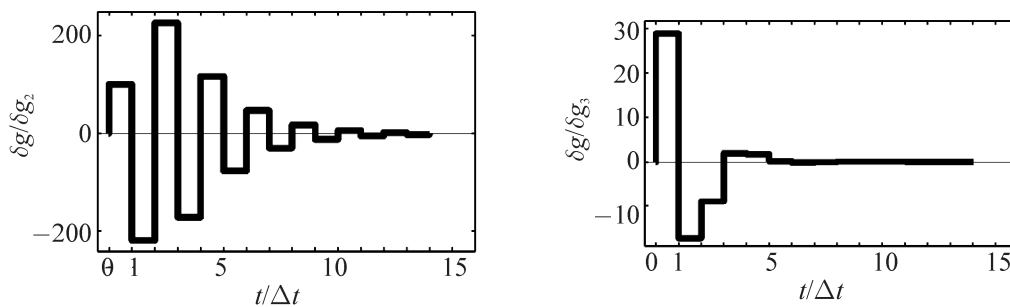


Рис. 8. Отклик интенсивности на импульс концентрации $\delta g_i / \delta c_{1r}$

В результате при шаге $\Delta t = \Delta t_{st[1]}/4$ значение параметра $r = 3$ является оптимальным в том смысле, что восстановленная интенсивность устойчива к погрешностям замеров концентрации, детерминированное смещение не слишком велико и верхняя оценка $\sigma_{G \max}$ минимальна.

Заключение

На ряде методических задач проведены многочисленные квазиреальные эксперименты. Построены устойчивые численные приближения к искомым интенсивностям для источников различных типов (точечных, линейных, площадных, распределенных), в том числе и при наличии ошибок измерений в датчиках ($\delta \in [0; 0.03] \cdot q_{\max}$). Если $\Delta t > \Delta t_{st[1]}$, то имеет место эффект шаговой регуляризации. Желание повысить точность восстановления интенсивности, уменьшая шаг по времени, приводит к неустойчивости решения обратной задачи. В этом случае ($\Delta t < \Delta t_{st[1]}$), при использовании функциональной аппроксимации с несколькими последовательными шагами по времени, достигается устойчивость решения.

Анализ информации о коэффициентах чувствительности (точность восстановления импульса интенсивности, отклики интенсивности на импульс концентрации) позволяет (для заданного ша-

га Δt ($\Delta t / \Delta t_{ст(1)} \in [0; 0.1]$) и уровня погрешности замеров концентрации $\delta \leq 0.03 \cdot q_{\max}$) подобрать значение параметра регуляризации r , обеспечивающего устойчивую оценку интенсивности $g(t)$.

В рассмотренном методе информация о замерах концентрации поступает с датчиков последовательно, что позволяет организовать on-line контроль за выбросами загрязнений из источника в атмосферу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Краснодарского края (грант № 09-01-96506, «Разработка экспрессных методов мониторинга источников загрязнения атмосферы»).

Список литературы

1. Чубатов А. А., Кармазин В. Н. Оперативный контроль за источником загрязнения атмосферы на основе метода последовательной функциональной аппроксимации // Математика. Компьютер. Образование: Сб. науч. тр. Т. 2 / Под ред. Г. Ю. Ризниченко и А. Б. Рубина. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. С. 172–182.
2. Чубатов А. А., Кармазин В. Н. Экспресс-контроль за источником загрязнения атмосферы на основе метода последовательной функциональной аппроксимации // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2008. № 2(17). С. 210–214.
3. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
4. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
6. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч., мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Пер. с англ. М.: Мир, 1989.
7. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры / Пер. с англ. М.: Советское радио, 1980.

