

## О модели ветрового движения двухслойной вязкой жидкости

Л. А. Компаниец<sup>1,a</sup>, Л. В. Гаврилова<sup>2</sup>, Т. В. Якубайлик<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
660036, г. Красноярск, Академгородок, ИВМ СО РАН

<sup>2</sup> Институт градостроительства, управления и региональной экономики,  
Сибирский федеральный университет,  
660041, г. Красноярск, Свободный проспект, д. 82

E-mail: <sup>a</sup>kla@icm.krasn.ru

Получено 28 июня 2009 г.

Найдено точное решение стационарной задачи ветрового движения вязкой двухслойной жидкости для двумерного в вертикальной плоскости течения и для дрейфовой составляющей трехмерного течения. На дне бассейна ставится условие проскальзывания, на вертикальных боковых стенках — условие непротекания. Приводятся примеры расчетов конкретных течений и сравнение полученных результатов с решениями аналогичной задачи по модели Экмана (без учета горизонтальной вязкости).

Ключевые слова: вязкая жидкость, ветровое движение жидкости, модель Экмана

## On a model of wind-induced flow of two layered viscous fluid

L. A. Kompaniets<sup>1</sup>, L. V. Gavrilova<sup>2</sup>, T. V. Yakubailik<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute of computational modeling SB RAS, ICM SB RAS, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russia

<sup>2</sup> Institute of town building, management and regional economics, Siberian Federal University,  
Svobodniy av. 82, Krasnoyarsk, 660041, Russia

**Abstract.** — Exact solution of the stationary problem of wind-induced flow of two-layered viscous fluid is found for two-dimensional in vertical plane current and for drift current in three-dimensional case. The condition of sliding is set on the bottom of a water body. The condition of nonpassage is set on the lateral surface. Results of some calculations are given in comparison with those obtained using Ekman's model (which does not take into account horizontal viscosity of the layer).

Key words: viscous fluid, wind-induced flow, Ekman's model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 381–390 (Russian).

## Введение

Проблема определения ветрового движения жидкости в замкнутом водоеме очень сложная, но практически важная задача [5]. В общей постановке она сводится к решению нестационарной начально-краевой задачи для системы нелинейных уравнений, решение которой возможно только численными методами.

Большую помощь при этом оказывают аналитические решения упрощенных задач, получающихся в результате правдоподобных предположений. При этом выстраивается некоторая иерархия используемых моделей: достаточно простые модели двумерного (в вертикальной плоскости) стационарного течения однородной жидкости без учета горизонтальной вязкости, модели с учетом горизонтальной вязкости, трехмерные течения без учета членов горизонтальной вязкости, с учетом этих членов, нестационарные течения [1–4]. Чем проще модель, тем больше аналитических решений удастся получить и проанализировать. Так, для первой из указанных моделей известно аналитическое решение для случая неровного дна и переменного коэффициента вертикального турбулентного обмена. Чем сложнее модель, тем аналитических результатов, как правило, меньше, и задача решается численными методами.

## Двумерный случай

Рассмотрим стационарное ветровое движение стратифицированной жидкости с учетом горизонтальной вязкости в замкнутом водоеме. Предположим, что нелинейными членами в уравнениях движения можно пренебречь; перенос массы через границу раздела слоев отсутствует; дно бассейна ровное; верхний и нижний слои однородны, но с разными плотностями; коэффициенты вертикального турбулентного обмена постоянны в каждом слое, но не равны между собой. Тогда уравнения, описывающие течения в верхнем и нижнем слоях водоема, имеют вид

$$g \frac{\partial \eta^I}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 u^I}{\partial x^2} + K_z^I \frac{\partial^2 u^I}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u^I}{\partial x} + \frac{\partial w^I}{\partial z} = 0, \quad -h \leq z \leq 0, \quad (2)$$

$$g \left( 1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}} \right) \frac{\partial \eta^{II}}{\partial x} + g \frac{\rho^I}{\rho^{II}} \frac{\partial \eta^I}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 u^{II}}{\partial x^2} + K_z^{II} \frac{\partial^2 u^{II}}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u^{II}}{\partial x} + \frac{\partial w^{II}}{\partial z} = 0, \quad -H \leq z \leq -h. \quad (4)$$

На поверхности водоема ( $z=0$ ), на дне ( $z=-H$ ) и между слоями ( $z=-h$ ) ставятся следующие граничные условия:

$$\rho^I K_z^I \frac{\partial u^I}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau(x), \quad (5)$$

$$\rho^I K_z^I \frac{\partial u^I}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial u^{II}}{\partial z} \Big|_{z=-h}, \quad (6)$$

$$u^I \Big|_{z=-h} = u^{II} \Big|_{z=-h}, \quad (7)$$

$$\rho^{\text{II}} K_z^{\text{II}} \frac{\partial u^{\text{II}}}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b u^{\text{II}}, \quad (8)$$

$$w^{\text{I}} \Big|_{z=0} = 0, \quad w^{\text{I}} \Big|_{z=-h} = 0, \quad w^{\text{II}} \Big|_{z=-h} = 0, \quad w^{\text{II}} \Big|_{z=-H} = 0. \quad (9)$$

На боковых стенках ставятся условия непротекания

$$u^{\text{I}} \Big|_{x=0} = u^{\text{I}} \Big|_{x=L} = 0, \quad u^{\text{II}} \Big|_{x=0} = u^{\text{II}} \Big|_{x=L} = 0. \quad (10)$$

Здесь индексы «I» относятся к верхнему, а «II» — к нижнему слою жидкости;  $u = u(x, z)$ ,  $w = w(x, z)$  — компоненты вектора скорости течения в направлениях  $x$  и  $z$  соответственно;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\tau$  — напряжение трения ветра;  $\eta^{\text{I}} = \eta^{\text{I}}(x)$  и  $\eta^{\text{II}} = \eta^{\text{II}}(x)$  — отклонение поверхности жидкости и линии раздела слоев от их равновесных положений  $z = 0$  и  $z = -h$  соответственно;  $\rho^{\text{I}}$  и  $\rho^{\text{II}}$  — постоянные плотности воды;  $K_z^{\text{I}}$  и  $K_z^{\text{II}}$  — заранее известные коэффициенты вертикального турбулентного обмена;  $K_x$  — коэффициент горизонтальной вязкости;  $k_b$  — коэффициент придонного трения;  $H$  — глубина водоема;  $L$  — длина водоема. Ось  $z$  направлена вертикально вверх.

Проинтегрировав (2) по  $z$  от  $-h$  до 0, с учетом граничных условий непротекания (10) получим

$$\left( \int_{-h}^0 u^{\text{I}} dz \right) \Big|_{x=0, x=L} = 0,$$

следовательно, при любых  $x \in (0; L)$  справедливо соотношение

$$\int_{-h}^0 u^{\text{I}} dz = 0. \quad (11)$$

Аналогично, интеграл (4) по  $z$  от  $-H$  до  $-h$  дает

$$\int_{-H}^{-h} u^{\text{II}} dz = 0. \quad (12)$$

Теперь проинтегрируем уравнение (1) по  $z$  от  $-h$  до 0, получим

$$hg \frac{\partial \eta^{\text{I}}}{\partial x} = \frac{\tau(x)}{\rho^{\text{I}}} - K_z^{\text{I}} \frac{\partial u^{\text{I}}}{\partial z} \Big|_{z=-h}. \quad (13)$$

Интегрируя (3) по  $z$  от  $-h$  до 0:

$$(H-h)g \left( 1 - \frac{\rho^{\text{I}}}{\rho^{\text{II}}} \right) \frac{\partial \eta^{\text{II}}}{\partial x} + (H-h)g \frac{\rho^{\text{I}}}{\rho^{\text{II}}} \frac{\partial \eta^{\text{I}}}{\partial x} = K_z^{\text{II}} \frac{\partial u^{\text{II}}}{\partial z} \Big|_{z=-h} - \frac{k_b}{\rho^{\text{II}}} \cdot u^{\text{II}} \Big|_{z=-H}. \quad (14)$$

Подставив (13) в (1), а (14) — в (3), исключим наклоны свободной поверхности из уравнений движения:

$$K_x \frac{\partial^2 u^{\text{I}}}{\partial x^2} + K_z^{\text{I}} \frac{\partial^2 u^{\text{I}}}{\partial z^2} = \frac{1}{h} \left( \frac{\tau(x)}{\rho^{\text{I}}} - K_z^{\text{I}} \frac{\partial u^{\text{I}}}{\partial z} \Big|_{z=-h} \right), \quad (15)$$

$$K_x \frac{\partial^2 u^{\text{II}}}{\partial x^2} + K_z^{\text{II}} \frac{\partial^2 u^{\text{II}}}{\partial z^2} = \frac{1}{H-h} \left( K_z^{\text{II}} \frac{\partial u^{\text{II}}}{\partial z} \Big|_{z=-h} - \frac{k_b}{\rho^{\text{II}}} \cdot u^{\text{II}} \Big|_{z=-H} \right). \quad (16)$$

Вид уравнений (15), (16) позволяет сделать предположение, что решение уравнений (1)–(4) можно искать в виде

$$u^I(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^I e^{\alpha_1 z} + B_n^I e^{-\alpha_1 z} + C_n^I) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

$$u^{II}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{II} e^{\alpha_2 z} + B_n^{II} e^{-\alpha_2 z} + C_n^{II}) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{K_x}{K_z^I}}, \quad \alpha_2 = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{K_x}{K_z^{II}}}.$$

Тогда граничные условия (10) будут удовлетворены автоматически, а остальные граничные условия учтем следующим образом. Пусть

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Тогда из (11), (12) и граничных условий (5)–(8) получаем следующую систему шести уравнений для нахождения шести неизвестных  $A_n^I, B_n^I, C_n^I, A_n^{II}, B_n^{II}, C_n^{II}$ :

$$\frac{A_n^I}{\alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 h}) - \frac{B_n^I}{\alpha_1} (1 - e^{\alpha_1 h}) + C_n^I \cdot h = 0,$$

$$\frac{A_n^{II}}{\alpha_2} (e^{-\alpha_2 h} - e^{-\alpha_2 H}) - \frac{B_n^{II}}{\alpha_2} (e^{\alpha_2 h} - e^{\alpha_2 H}) + C_n^{II} \cdot (H - h) = 0,$$

$$\rho^I K_z^I (A_n^I \alpha_1 - B_n^I \alpha_1) = \tau^n,$$

$$\rho^I K_z^I (A_n^I \alpha_1 e^{-\alpha_1 h} - B_n^I \alpha_1 e^{\alpha_1 h}) = \rho^{II} K_z^{II} (A_n^{II} \alpha_2 e^{-\alpha_2 h} - B_n^{II} \alpha_2 e^{\alpha_2 h}),$$

$$A_n^I e^{-\alpha_1 h} + B_n^I e^{\alpha_1 h} + C_n^I = A_n^{II} e^{-\alpha_2 h} + B_n^{II} e^{\alpha_2 h} + C_n^{II},$$

$$\rho^{II} K_z^{II} (A_n^{II} \alpha_2 e^{-\alpha_2 H} - B_n^{II} \alpha_2 e^{\alpha_2 H}) = k_b (A_n^{II} e^{-\alpha_2 H} + B_n^{II} e^{\alpha_2 H} + C_n^{II}).$$

Решая эту систему, найдем коэффициенты, которые полностью определяют точное решение стационарной задачи ветрового движения двухслойной жидкости с учетом горизонтальной вязкости.

Заметим, что распространение этих результатов на случай  $n$ -слойной жидкости не представляет труда.

Приведем примеры некоторых модельных расчетов. Рассматривались водоемы длиной 1 000 и 10 000 м, скорость ветра 5 м/с, глубина верхнего слоя  $h = 15$  м, глубина водоема  $H = 28$  м. Плотности в нижнем и верхнем слоях жидкости рассчитывались из уравнения состояния пресной воды

$$\rho(T) = \rho_0 (1 - 0,68 \cdot 10^{-6} (T - 4)^2),$$

при этом температура верхнего слоя бралась  $15$  °С, а нижнего —  $5$  °С. Коэффициент придонного трения  $k_b = 0,001 \text{ кг} \cdot (\text{м}^2 \cdot \text{с})^{-1}$ . Коэффициенты турбулентного обмена  $K_z^I = 0,02 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $K_z^{II} = 0,002 \text{ м}^2/\text{с}$ . Коэффициент горизонтальной вязкости  $K_x = 20$  и  $200 \text{ м}^2/\text{с}$ .

На рис. 1–4 представлено распределение горизонтальной составляющей вектора скорости течения по глубине в нескольких сечениях водоема, сплошной линией показано решение с уче-

том горизонтальной вязкости, пунктирной — без учета горизонтальной вязкости. Рис. 1, 2 соответствуют водоему длиной  $L = 1\,000$  м, рис. 3, 4 — водоему длиной  $L = 10\,000$  м.

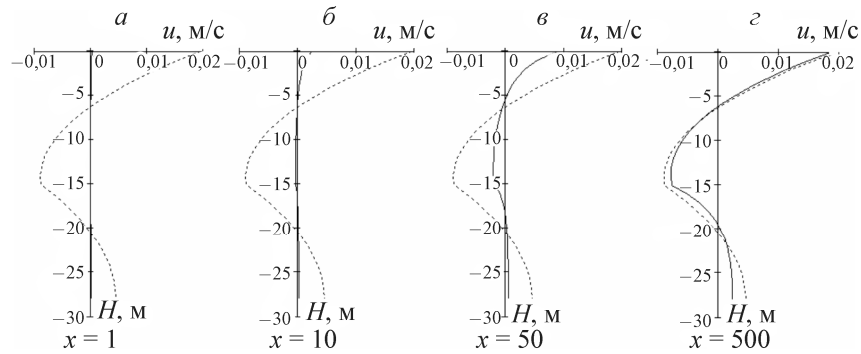


Рис. 1. Распределение скоростей при  $K_x = 20$  м<sup>2</sup>/с,  $L = 1\,000$  м

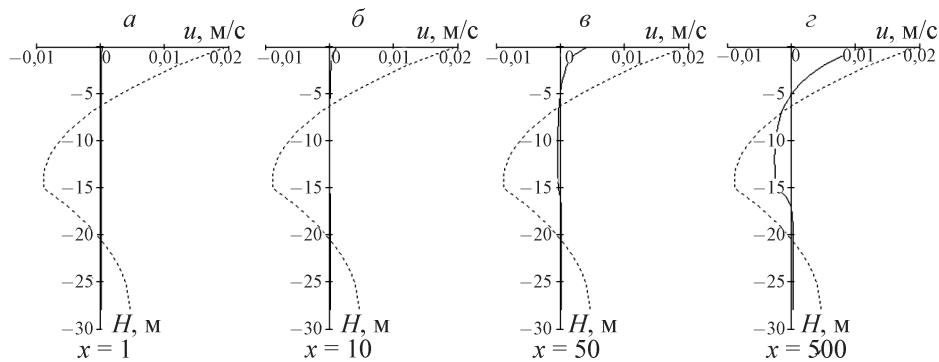


Рис. 2. Распределение скоростей при  $K_x = 200$  м<sup>2</sup>/с,  $L = 1\,000$  м

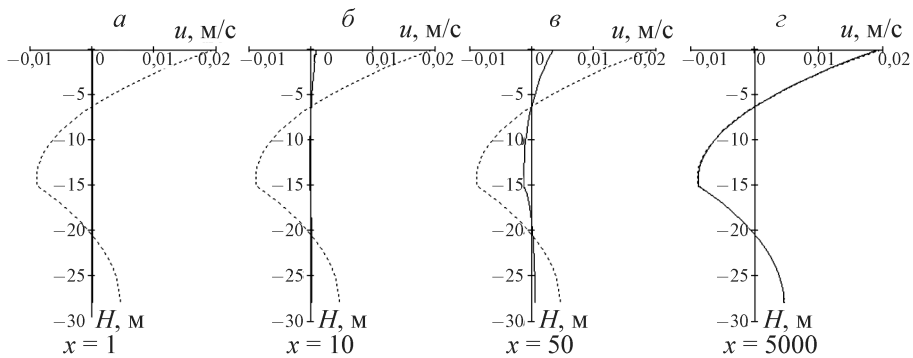


Рис. 3. Распределение скоростей при  $K_x = 20$  м<sup>2</sup>/с,  $L = 10\,000$  м

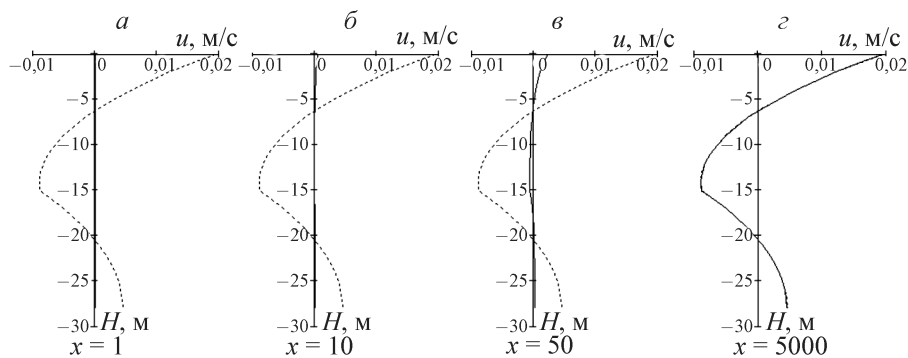


Рис. 4. Распределение скоростей при  $K_x = 200$  м<sup>2</sup>/с,  $L = 10\,000$  м

Видно, что для бассейна большой длины решения с учетом и без учета горизонтальной вязкости (приближение Экмана) в области, достаточно удаленной от берегов, совпадают. На расстоянии 50 м от берега при  $K_x = 20 \text{ м}^2/\text{с}$  решение задачи (1)–(10) в 6 раз меньше, чем решение, полученной по модели Экмана; при  $K_x = 200 \text{ м}^2/\text{с}$  решения различаются в 10 раз. Для водоема меньшей длины на расстоянии 50 м от берега при  $K_x = 20 \text{ м}^2/\text{с}$  решение задачи (1)–(10) в 2 раза меньше, чем решение, полученной по модели Экмана; при  $K_x = 200 \text{ м}^2/\text{с}$  решения различаются в 5 раз.

## Трехмерный случай

Выпишем систему уравнений, описывающую движение двухслойной жидкости в бассейне прямоугольной формы с ровным дном с условиями равенства скоростей и потоков между слоями:

$$\begin{cases} -lv^I + g \frac{\partial \eta^I}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z^I \frac{\partial u^I}{\partial z} \right) + K_x \frac{\partial^2 u^I}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 u^I}{\partial y^2}, \\ lu^I + g \frac{\partial \eta^I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z^I \frac{\partial v^I}{\partial z} \right) + K_x \frac{\partial^2 v^I}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 v^I}{\partial y^2}, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} -lv^{II} + g \left( 1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}} \right) \frac{\partial \eta^{II}}{\partial x} + g \frac{\rho^I}{\rho^{II}} \frac{\partial \eta^I}{\partial x} = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z^{II} \frac{\partial u^{II}}{\partial z} \right) + K_x \frac{\partial^2 u^{II}}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 u^{II}}{\partial y^2}, \\ lu^{II} + g \left( 1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}} \right) \frac{\partial \eta^{II}}{\partial y} + g \frac{\rho^I}{\rho^{II}} \frac{\partial \eta^I}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z^{II} \frac{\partial v^{II}}{\partial z} \right) + K_x \frac{\partial^2 v^{II}}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 v^{II}}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (18)$$

Система уравнений (17) решается в области  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h \leq z \leq 0$ , а система уравнений (18) — в области  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-H \leq z \leq -h$ .

Для системы (17), (18) ставятся следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \rho^I K_z^I \frac{\partial u^I}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \tau_x, & \rho^I K_z^I \frac{\partial v^I}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \tau_y, & w^I \Big|_{z=0} &= 0, \\ \rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial u^{II}}{\partial z} \Big|_{z=-H} &= k_b u^{II} \Big|_{z=-H}, & \rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial v^{II}}{\partial z} \Big|_{z=-H} &= k_b v^{II} \Big|_{z=-H}, & w^{II} \Big|_{z=-H} &= 0, \\ w^I \Big|_{z=-h} &= 0, & w^{II} \Big|_{z=-h} &= 0, \end{aligned}$$

первый тип граничных условий между слоями

$$\begin{aligned} \rho^I K_z^I \frac{\partial u^I}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= \rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial u^{II}}{\partial z} \Big|_{z=-h}, & \rho^I K_z^I \frac{\partial v^I}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= \rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial v^{II}}{\partial z} \Big|_{z=-h}, \\ u^I \Big|_{z=-h} &= u^{II} \Big|_{z=-h}, & v^I \Big|_{z=-h} &= v^{II} \Big|_{z=-h}, \end{aligned}$$

второй тип граничных условий между слоями

$$\begin{aligned} \rho^I K_z^I \frac{\partial u^I}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= \rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial u^{II}}{\partial z} \Big|_{z=-h} = K^{I,II} (u^I - u^{II}), \\ \rho^I K_z^I \frac{\partial v^I}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= \rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial v^{II}}{\partial z} \Big|_{z=-h} = K^{I,II} (v^I - v^{II}). \end{aligned}$$

На вертикальных стенках бассейна ставятся условия прилипания.

Здесь  $l$  — параметр Кориолиса,  $a$  — длина водоема,  $b$  — ширина,  $K^{I,II}$  — коэффициент трения между слоями, остальные обозначения аналогичны двумерному случаю.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} W^I &= u^I + iv^I, \quad W^{II} = u^{II} + iv^{II}, \quad \tau^W = \tau_x + i\tau_y, \\ \frac{\partial \eta^I}{\partial n} &= \frac{\partial \eta^I}{\partial x} + i \frac{\partial \eta^I}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta^{II}}{\partial n} = \frac{\partial \eta^{II}}{\partial x} + i \frac{\partial \eta^{II}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Если предположить, что градиенты отклонения свободной поверхности малы и ими можно пренебречь, то уравнения для дрейфовой составляющей скорости будут иметь вид

$$\begin{cases} -i l W^I + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z^I \frac{\partial W^I}{\partial z} \right) + K_x \frac{\partial^2 W^I}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 W^I}{\partial y^2} = 0, \\ -i l W^{II} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z^{II} \frac{\partial W^{II}}{\partial z} \right) + K_x \frac{\partial^2 W^{II}}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 W^{II}}{\partial y^2} = 0, \end{cases}$$

а граничные условия переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho^I K_z^I \frac{\partial W^I}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \tau^W, \\ \rho^I K_z^I \frac{\partial W^I}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= \rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial W^{II}}{\partial z} \Big|_{z=-h}, \\ W^I \Big|_{z=-h} &= W^{II} \Big|_{z=-h}, \\ \rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial W^{II}}{\partial z} \Big|_{z=-H} &= k_b W^{II} \Big|_{z=-H}. \end{aligned}$$

Предположим, что  $K_x = K_y$ , и будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} W^I &= \left( C_{nm}^1 e^{\sqrt{\alpha_1} z} + C_{nm}^2 e^{-\sqrt{\alpha_1} z} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ W^{II} &= \left( \tilde{C}_{nm}^1 e^{\sqrt{\alpha_2} z} + \tilde{C}_{nm}^2 e^{-\sqrt{\alpha_2} z} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \end{aligned}$$

предполагая, что

$$\tau^W = \sum_{n,m} \tau_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Четыре уравнения (19)–(22) позволяют определить четыре неизвестные функции  $C_{nm}^1$ ,  $C_{nm}^2$ ,  $\tilde{C}_{nm}^1$ ,  $\tilde{C}_{nm}^2$ .

$$K_z^I \left( C_{nm}^1 \sqrt{\alpha_1} - C_{nm}^2 \sqrt{\alpha_1} \right) = \frac{\tau_{mn}}{\rho_0}, \tag{19}$$

$$\rho^I K_z^I \left( -C_{nm}^1 \sqrt{\alpha_1} e^{-\sqrt{\alpha_1} h} + C_{nm}^2 \sqrt{\alpha_1} e^{\sqrt{\alpha_1} h} \right) = \rho^{II} K_z^{II} \left( -\tilde{C}_{nm}^1 \sqrt{\alpha_2} e^{-\sqrt{\alpha_2} h} + \tilde{C}_{nm}^2 \sqrt{\alpha_2} e^{\sqrt{\alpha_2} h} \right), \quad (20)$$

$$C_{nm}^1 e^{-\sqrt{\alpha_1} h} + C_{nm}^2 e^{\sqrt{\alpha_1} h} = \tilde{C}_{nm}^1 e^{-\sqrt{\alpha_2} h} + \tilde{C}_{nm}^2 e^{\sqrt{\alpha_2} h}, \quad (21)$$

$$\rho^{II} K_z^{II} \left( -\tilde{C}_{nm}^1 \sqrt{\alpha_2} e^{-\sqrt{\alpha_2} H} + \tilde{C}_{nm}^2 \sqrt{\alpha_2} e^{\sqrt{\alpha_2} H} \right) = k_b \left( \tilde{C}_{nm}^1 e^{-\sqrt{\alpha_2} H} + \tilde{C}_{nm}^2 e^{\sqrt{\alpha_2} H} \right). \quad (22)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{K_x \left( \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right) + il}{K_z^I}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{K_x \left( \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right) + il}{K_z^{II}}}.$$

Если членами горизонтальной вязкости пренебречь (модель экмановского типа), то решение выписывается в виде

$$W^I = D_1 e^{\sqrt{\frac{il}{K_z^I}} z} + D_2 e^{-\sqrt{\frac{il}{K_z^I}} z} + \frac{ig}{l} \frac{\partial \eta^I}{\partial n},$$

$$W^{II} = D_3 e^{\sqrt{\frac{il}{K_z^{II}}}} z + D_4 e^{-\sqrt{\frac{il}{K_z^{II}}}} z + \frac{ig}{l} \left( \frac{\rho^I}{\rho^{II}} \frac{\partial \eta^I}{\partial n} + \left( 1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}} \right) \frac{\partial \eta^{II}}{\partial n} \right),$$

а коэффициенты  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  для определения дрейфовой составляющей определяются из системы

$$\begin{cases} \beta_1 (D_1 - D_2) = \tau^W, \\ \beta_1 (D_1 e^{-\alpha_1 h} - D_2 e^{\alpha_1 h}) = K^{I,II} [D_1 e^{-\alpha_1 h} + D_2 e^{\alpha_1 h} + S_1 - D_3 e^{-\alpha_2 h} - D_4 e^{\alpha_2 h} - S_2], \\ \beta_2 (D_3 e^{-\alpha_2 h} - D_4 e^{\alpha_2 h}) = \beta_1 (D_1 e^{-\alpha_1 h} - D_2 e^{\alpha_1 h}), \\ D_3 e^{-\alpha_2 H} + D_4 e^{\alpha_2 H} + S_2 = 0, \end{cases}$$

$$\beta_1 = \rho^I K_z^I \alpha_1, \quad \beta_2 = \rho^{II} K_z^{II} \alpha_2,$$

где  $K^{I,II}$  — коэффициент трения между слоями.

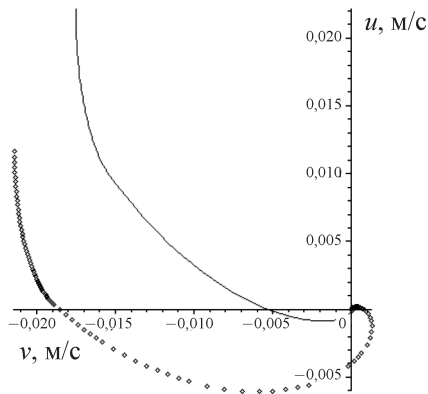
Были проведены расчеты при следующих значениях параметров:  $H = 50$  м,  $h = 10$  м,  $\tau = 0,03828$  кг/(м·с<sup>2</sup>),  $\rho_1 = \rho_2 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $K_z^I = 0,02$  м<sup>2</sup>/с,  $K_z^{II} = 0,002$  м<sup>2</sup>/с,  $k_b = 2$  кг/(м<sup>2</sup>·с),  $l = 0,00015$  с<sup>-1</sup>. Во всех расчетах ветер направлен по оси  $Ox$ .

Проведем сравнение полученного решения с решением для модели экмановского типа.

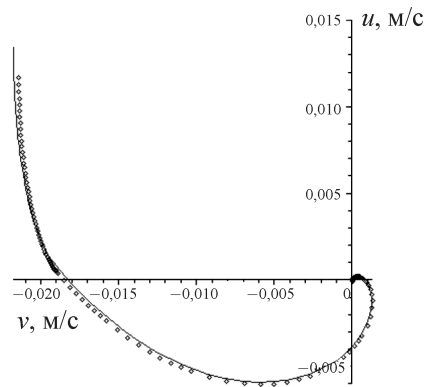
Рис. 5–8 демонстрируют поведение годографа скорости для первой постановки граничных условий между слоями, рис. 9–10 для случая, когда между слоями ставится условие проскальзывания. На всех рисунках сплошной чертой изображено решение по модели с учетом горизонтальной вязкости, прерывистой — по модели Экмана.

Рис. 5–8 показывают влияние величины коэффициента горизонтальной вязкости, длины и ширины бассейна на поведение скорости. Как и следовало ожидать, уменьшение коэффициента горизонтального турбулентного обмена или увеличение размеров области приводит к тому, что в середине области значения скорости, полученной по модели Экмана и по модели с учетом горизонтальной вязкости, становятся близкими (рис. 6), оставаясь различными вблизи берегов (рис. 8). При увеличении коэффициента трения между слоями (рис. 10) решения при второй постановке граничных условий между слоями сводятся к решению при первой постановке.

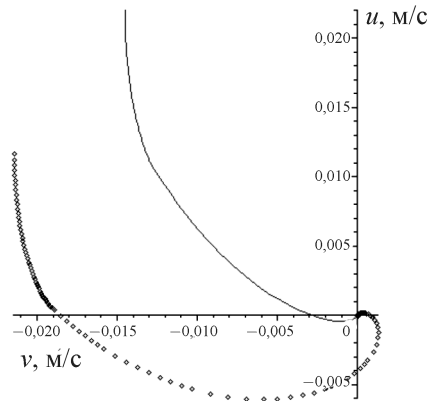




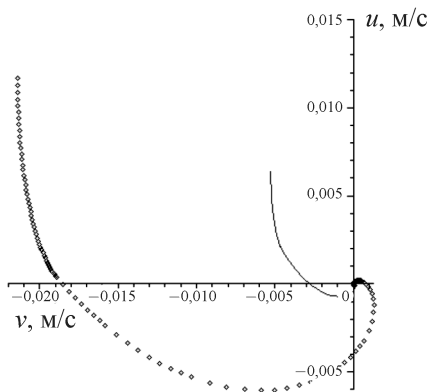
**Рис. 5.**  $a = b = 1\,250$  м,  
 $K_x = K_y = 10$  м<sup>2</sup>/с,  
 $x = 625$  м,  $y = 625$  м



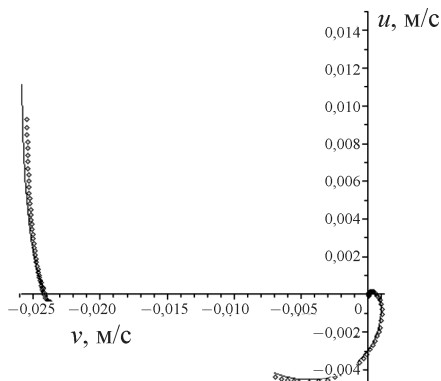
**Рис. 6.**  $a = b = 5\,000$  м,  
 $K_x = K_y = 10$  м<sup>2</sup>/с,  
 $x = 2\,500$  м,  $y = 2\,500$  м



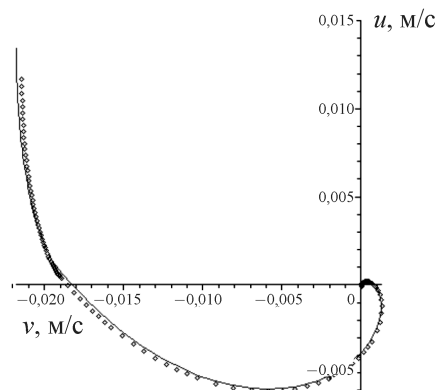
**Рис. 7.**  $a = b = 5\,000$  м,  
 $K_x = K_y = 200$  м<sup>2</sup>/с,  
 $x = 2\,500$  м,  $y = 2\,500$  м



**Рис. 8.**  $a = b = 5\,000$  м,  
 $K_x = K_y = 10$  м<sup>2</sup>/с,  
 $x = 100$  м,  $y = 2\,500$  м



**Рис. 9.**  $a = b = 5\,000$  м,  
 $K_x = K_y = 10$  м<sup>2</sup>/с,  
 $K^{I,II} = 0,26$  кг/(м<sup>2</sup>·с),  
 $x = y = 2\,500$  м



**Рис. 10.**  $a = b = 5\,000$  м,  
 $K_x = K_y = 10$  м<sup>2</sup>/с,  
 $K^{I,II} = 260$  кг/(м<sup>2</sup>·с),  
 $x = y = 2\,500$  м

Следующая серия рисунков иллюстрирует поведение решения в случае, когда длина бассейна не равна его ширине.

Рис. 11 показывает направление скорости течения на поверхности для модели Экмана, которое не зависит от геометрии бассейна. Рис. 12, 13 иллюстрируют поведение скорости на поверхности и в точке  $x = 625$  м,  $y = 625$  м для модели с учетом горизонтальной вязкости в случае бассейна, вытянутого по направлению оси  $Oy$ . Рассматривалась первая постановка граничных условий между слоями.

В заключение отметим, что полученные решения позволяют уточнить известный результат для модели Экмана, в соответствии с которым дрейфовая составляющая вектора скорости на поверхности глубокого бассейна отклоняется от направления ветра на  $45^\circ$  вправо в северном полушарии и влево в южном и учесть течения вдоль берегов.

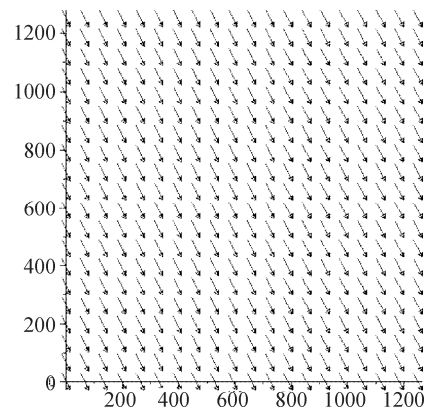


Рис. 11.  $a = 5\,000$ ,  $b = 1\,250$  м

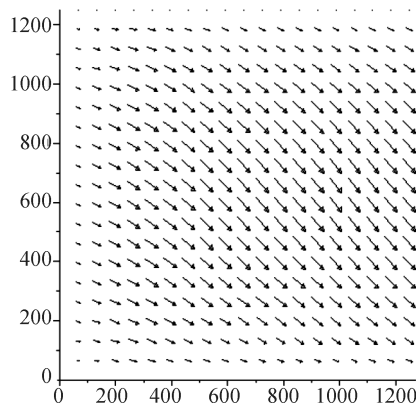


Рис. 12.  $a = 5\,000$ ,  $b = 1\,250$  м,  
 $K_x = K_y = 10$  м<sup>2</sup>/с

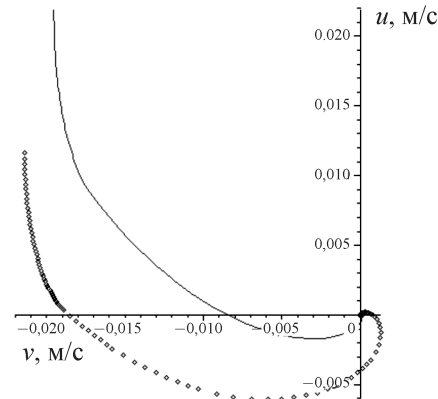


Рис. 13.  $a = 5\,000$ ,  $b = 1\,250$  м,  
 $K_x = K_y = 10$  м<sup>2</sup>/с,  $x = y = 625$  м

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 07-01-00153.

## Список литературы

1. Гапеева Т. В., Гуревич К. Ю., Компаниец Л. А. Аналитическое решение одной модели движения двухслойной жидкости (3-d случай) // Вестник КрасГУ. 2006. Т. 4. С. 43–49.
2. Дмитриев Н. В. Математическое моделирование вертикального турбулентного обмена в верхнем слое океана. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1993. С. 156.
3. Компаниец Л. А., Якубайлик Т. В., Гаврилова Л. В., Гуревич К. Ю. Модели экмановского типа в задачах гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2007. С. 156.
4. Корявов П. П. Многослойная модель экмановского типа для расчета ветровых течений. Сообщения по прикладной математике. М.: Вычисл. центр АН СССР, 1991. С. 26.
5. Марчук Г. И., Саркисян А. С. Математические модели циркуляции в океане. Новосибирск: Наука, 1980. С. 340.