

Возникновение противоречий в теории множеств Цермело–Френкеля при расширении базового языка рекурсивными функциями

А. В. Коганов^{1,а}

¹ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН,
117218, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 36, к. 1

E-mail: ^а koganow@niisi.msk.ru

Получено 21 июня 2009 г.,
после доработки 2 июля 2009 г.

Показано, что если в аксиоматике Цермело–Френкеля использовать расширение базового языка, которое допускает в формулах отношения на значениях рекурсивных функций от натурального аргумента, то в теории множеств возникают противоречивые конструкции на уровне арифметики.

Ключевые слова: теория Цермело–Френкеля, рекурсивные функции, теория множеств

Occurrence of contradictions in Zermelo–Fraenkel theory under extension of base language by recursion functions

A. V. Koganov¹

¹ *Scientific-Research Institute for System Studies, Russian Academy of Sciences (NIISI RAN),
Nakhimovskii av. 36-1, Moscow, 117218, Russia*

Abstract. — It is shown that the extension of base language in Zermelo–Fraenkel theory, which allows a relations on recursion function of natural argument, may lead in Set Theory to contradictive constructions on arithmetic level.

Key words: Zermelo–Fraenkel theory, recursion functions, set theory

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 367–380 (Russian).

1. Введение

Современная теория множеств базируется на совокупности аксиом, содержащей несколько схем аксиом. Основная часть этой аксиоматики предложена Э. Цермело (1908). В ней содержится фундаментальная идея ограничений, которые надо наложить на язык теории, если требуется работать с бесконечными совокупностями объектов (точнее говоря, с совокупностями математически определенных понятий), не допуская возникновения логических противоречий. Главное ограничение касается способов определения таких совокупностей. Позднее, к аксиоматике была добавлена аксиома, позволяющая реализовать идею Г. Кантора о построении неограниченной структуры бесконечных порядковых типов, обобщающих натуральный ряд чисел (Френкель А., 1922). Далее мы будем называть эту теорию множеств ЦФ-теорией (ZF-theory).

Непротиворечивость этой конструкции была доказана (К. Гедель — 1939, П. Коэн — 1963), исходя из непротиворечивости натуральной арифметики, определенной аксиомами Дж. Пиано (1889). Заметим, что логическое доказательство непротиворечивости теории, исходя из аксиом самой этой теории, невозможно, если только теория действительно непротиворечива [1–4, 8, 16].

В основе ЦФ-теории лежит специальный язык, на котором записываются все определения, необходимые для самой теории множеств и построения моделей других математических теорий. Предполагается, что все аксиоматические теории должны интерпретироваться моделями, построенными на этом языке. Поэтому в данной статье этот язык будет назван языком первого уровня (ЯПУ). Иногда его называют базовым языком ЦФ-теории. В классификации теории моделей он имеет структуру языка первого ранга без функциональных символов. Однако специфика ЦФ-теории позволяет определять функции как множества определенного вида. При этом предметные переменные языка (имена множеств) получают смысл функциональных переменных (имен функций). И сохраняется возможность строить произвольные формулы относительно этих имен. Такая операция переводит ЯПУ в язык второго и более высоких рангов по классификации теории моделей. Таким образом, модельный ранг ЯПУ фактически характеризует не язык, а способ его использования.

Схемы аксиом ЦФ-теории ссылаются на внешние для теории объекты логического типа — формулы языка первого уровня, и содержат ограничения на способы построения таких формул при определении математических множеств [11]. Поэтому данная теория не позволяет работать с совокупностями реальных (не определенных логически) предметов, как это было возможно в наивной теории множеств Г. Кантора. Например, вне ЦФ-теории оказываются даже конечные множества домов на некоторой улице или учеников некоторой школы. В рамках теории можно работать только с совокупностями их логических образов, например, с множеством номеров домов или множеством имен учеников. Это плата за право работать с бесконечными множествами. Можно сказать, что бесконечные множества могут быть только математическими, но не реальными, что вполне соответствует массовой интуиции. Однако в логических теориях и математических моделях бесконечные множества часто позволяют абстрагировать теорию от второстепенных крайних эффектов, перенося изучение последних в отдельный раздел теории.

Язык первого уровня позволяет записывать все те логические отношения принадлежности и включения между множествами (и через них — свойства элементов множеств), которые могут быть выражены конечным числом кванторов и логических операций над элементарными отношениями указанного вида. Возникает естественное желание расширить возможности теории множеств, добавив определения, использующие арифметические отношения и язык рекурсивных функций (алгоритмический язык) при определении некоторых переменных, входящих в формулы языка первого уровня (ЦФР-теория, ZFR-theory). На первый взгляд такое изменение не должно вызвать новых затруднений, поскольку теория множеств совместима с натуральной арифметикой [5, 6, 7, 9]. Но оказалось, что при этом возникают противоречия, связанные с возможностью использования диагонального процесса при построении определений подмножеств натурального ряда.

Глубинная причина возникновения этих противоречий связана с возможностью построения алгоритма, переводящего любой текст в натуральное число или восстанавливающего текст по соответствующему числу. Таким образом, определение множества в расширенном языке может содержать в себе свойства, характеризующие не отношения между множествами, а конструкции самого языка теории. Это та самая «смертельная петля», которая задушила наивную теорию множеств. Ниже будет показан один из механизмов возникновения таких противоречий.

В работах [12–14] автор исследовал методы достижения однозначности в математических теориях и некоторые источники противоречий, связанные с понятием бесконечных множеств [10]. В данной работе исследуются подводные камни на пути сближения конструктивной и абстрактной математики с точки зрения логики. Гипотезу о том, что введение в язык первого уровня рекуррентных последовательностей формул не совместимо с несчетными кардиналами, высказал Н. В. Белякин (2005). Но автору не известно, имеется ли строгое доказательство этого факта. В данной работе строго доказывается, что расширение формул языка первого уровня отношениями на значениях рекурсивных функций несовместимо даже со счетными множествами в аксиоматике Цермело–Френкеля. Учитывая неожиданность такого результата и его семантическую важность для связи абстрактной и прикладной математики, автор счел правильным включить в статью изложение аксиом Пеано и ЦФ-теории, а также определение рекурсивной функции. Это изложение, занимающее значительную часть текста, сопровождается комментариями, существенными для понимания механизма возникающего противоречия. Читатель, хорошо знакомый с этой тематикой, может сразу перейти к разделу 4, где изложена формальная конструкция расширения языка и парадокса.

2. Классическая аксиоматика Цермело–Френкеля

В этом разделе будут приведены аксиомы современной ЦФ-теории множеств в их стандартной форме [11]. Особое внимание будет уделено содержательной интерпретации аксиом и языка первого уровня. Это необходимо для понимания дальнейших построений расширения языка с помощью рекурсивных функций до ЦФР-теории.

2.1. Язык первого уровня

Конструкция языка первого уровня (ЯПУ) специально предназначена для описания логических выражений над отношениями принадлежности и включения между множествами. При этом объектами теории являются только множества. В частности, элементы множеств тоже описаны как множества и не выделяются как особые объекты. Это важное семантическое отличие ЦФ-теории от наивной теории множеств. Другое принципиальное отличие — это запрет, в рамках ЦФ-теории, использовать какие-либо утверждения о множествах, не выражимые на языке первого уровня. Это главный механизм избегания противоречий. Термин «первый уровень» в названии языка означает, что специальный язык любой математической теории, основанной на теории множеств, в качестве начальных понятий использует только конструкции, описанные на этом языке.

Символика ЯПУ содержит алфавит, например, латинский, который служит для обозначения переменных или объектов теории буквами, словами из букв, допускаются имена с числовыми или буквенными индексами. Кроме того, имеется специальный алфавит для обозначения вторичных отношений, определяемых в языке.

Элементарные отношения между именами задаются двухместными предикатными символами.

Символ *принадлежности* \in , который задает отношение $X \in Y$, интерпретируемое как принадлежность множества с именем X в качестве элемента множеству Y .

Символ *равенства* $=$, который означает фактическое совпадение множеств, имеющих разные обозначения или определения.

ЯПУ содержит внутренние логические символы для описания составных отношений.

Символ *импликации* \supset , который означает, что отношение, записанное слева от символа, влечет отношение, записанное справа от символа. Часто этот символ используется в форме \Rightarrow , чтобы отличить его от похожего знака отношения на множествах. Однако в последнем случае этот знак надо отличать от соответствующего знака в базовой логике, которая не входит в саму ЦФ-теорию.

Замечание 2.1.1. В этой статье мы, для определенности, будем для базовой логики использовать символ импликации \rightarrow и символ выводимости утверждения $\rightarrow\rightarrow$.

$A\rightarrow B$ означает, что утверждение B следует из утверждения A .

$A\rightarrow\rightarrow B$ означает, что утверждение или набор утверждений B выводим из набора утверждений A .

$[A\rightarrow\rightarrow B]$ означает цепь вывода набора утверждений B из набора утверждений A , которая интерпретируется как последовательность импликаций, образующих доказательство B из A . Для краткости такие цепи вывода будем называть *выкладками*.

Запись $X\equiv H$ будет означать, что выражение X по определению эквивалентно выражению H или является его обозначением.

Эти обозначения относятся к метатеории по отношению к ЦФ-теории и не входят в нее. \square

Символ *эквивалентности* отношений \equiv означает двустороннюю импликацию.

Символ *дизъюнкции* \vee означает формирование нового отношения $A\vee B$ из двух отношений A, B , которое выполняется, если выполняется хотя бы одно из двух исходных отношений. Соответствует разговорному союзу «или».

Символ *конъюнкции* $\&$ означает формирование нового отношения $A\&B$ из двух отношений A, B , которое выполняется, если выполняются оба исходных отношения. Соответствует разговорному союзу «и».

Знак *отрицания* отношения (одноместный) \neg , выражение $\neg A$ означает, что верно отрицание утверждения A .

Квантор *общности* \forall применяется к имени переменной. Выражение $\forall x A$ означает, что при любом значении переменной x верно утверждение A . Этот квантор используется для введения новой переменной в выражение.

Квантор *существования* \exists применяется к имени переменной. Выражение $\exists x A$ означает, что при некотором значении переменной x верно утверждение A .

Скобки $()$ используются в обычном смысле: выражение, стоящее в скобках, является одним из аргументов функции или одним из операндов операции, указанной во внешнем выражении на соответствующем по формату месте. Используются в тех случаях, когда полное выражение допускает несколько неэквивалентных группировок членов, для указания правильной группировки.

Формулами называются все элементарные выражения $X\in Y, X=Y$ и выражения вида $(A\&B), (A\vee B), (\neg A), (A\equiv B), (A\Rightarrow B), (\forall xA), (\exists xA)$, где A и B — ранее полученные выражения. Интерпретация этих формул соответствует описанным выше правилам.

Замечание 2.1.2. Здесь надо отметить, что не все содержательно возможные процедуры построения множеств можно описать на таком языке. Например, рекурсивное порождение множества F всех формул, описанное в предыдущем абзаце, не описывается формулой. Но его можно имитировать формулой

$$\begin{aligned} &(((X\in Y)\in F)\&((X=Y)\in F))\& \\ &(\forall A\forall B(((A\in F)\&(B\in F))\Rightarrow \\ &(((A\&B)\in F)\&((A\vee B)\in F)\&((\neg A)\in F)\&((A\equiv B)\in F)\& \\ &((A\Rightarrow B)\in F)\&((\forall xA)\in F)\&((\exists xA)\in F)))) \end{aligned}$$

Эта формула настораживает несколькими своими особенностями. Ясно, что количество и глубина скобок по строгому синтаксису языка первого уровня растет очень быстро. Но гораздо опаснее то, что в качестве элементов множества мы использовали не множества, а объекты метатеории — формулы — которые не допустимы в элементарных формулах в качестве переменной. Поэтому язык первого уровня такой формулы не содержит. Это важное свойство ЯПУ, не позволяющее в качестве множеств использовать совокупности или последовательности своих собственных выражений. Эти выражения относятся к метатеории множеств. В частности, теория множеств не может работать с множествами определений своих объектов (множеств). Это исключает целый класс парадоксов, основанный на возможности порождать новое определение, используя множество ранее сделанных определений. Наиболее известный из таких парадоксов — парадокс Ришара (1906) [10]. Этот пример иллюстрирует главное средство исключения антиномий из ЦФ-теории: их просто нельзя сформулировать в этой теории. □

При этом удастся сохранить все свойства теории множеств, существенные для содержательных математических теорий базирования на понятии множества и имеющих прикладное значение. Это достигается введением системы аксиом, позволяющих расширить возможности языка первого уровня в порождении множеств. Здесь надо отметить два обстоятельства. Во-первых, порождение множеств в ЦФ-теории осуществляется не путем их поэлементного построения, а путем доказательства существования множества с заданными свойствами элементов. И, во-вторых, главное, сами аксиомы ЦФ не принадлежат языку первого уровня, а только используют его в своих конструкциях. Сами аксиомы принадлежат метатеории. Поэтому более точно их называют *схемами аксиом*, т. е. утверждениями, которые связывают объекты теории и объекты, внешние для теории. Внутри теории множеств эти аксиомы позволяют определять множества и делать логический вывод в рамках интерпретации языка первого уровня. Но синтаксический анализ логического вывода возможен только в объемлющей метатеории, поскольку некоторые объекты, входящие в аксиомы, не являются объектами теории множеств. Таким образом, защитный барьер между логикой и теорией множеств, указанный в замечании 2.1.2, еще усиливается отказом от внутренней аксиоматики теории.

2.2. Определяемые обозначения ЦФ-теории

В отличие от языка первого уровня собственный язык теории множеств ориентирован на построение математических теорий и моделей. Для этого в нем вводятся вторичные отношения между множествами, позволяющие интерпретировать естественную или общепринятую логику. Приведем наиболее распространенные из них.

Отношение X является *подмножеством* Y : $X \subseteq Y \equiv \forall z(z \in X \Rightarrow z \in Y)$.

Множество Y *всех подмножеств* множества X : $Y \equiv 2^X \equiv \forall z(z \in Y \equiv z \subseteq X)$.

Пустое множество: $x = \emptyset \equiv \forall y(\neg y \in x)$.

Одноэлементное множество $Y = \{X\} \equiv \forall z(z \in Y \equiv z = X)$.

Неупорядоченная пара (Z — двухэлементное множество, состоящее из X и Y):

$$Z = \{X; Y\} \equiv \forall V(V \in Z \Rightarrow V = X \vee V = Y).$$

Аналогично можно определить множество, состоящее из любого конечного числа элементов, если эти элементы являются ранее определенными множествами. Но совокупность таких определений является внешней схемой (не множеством) в ЦФ-теории.

Упорядоченная пара (кортеж) двух элементов: $Z = \langle X, Y \rangle \equiv Z = \{X; \{X; Y\}\}$.

В этом определении использована подстановка ранее введенных обозначений, которая является операцией логики, но не ЦФ-теории. Можно построить кортежи любого конечного числа элементов, если это ранее определенные множества, путем добавления в это определение справа обозначений конечных множеств с растущим числом элементов. Как и выше, совокупность этих определений является логической схемой, но не множеством в ЦФ-теории. В этой схеме опреде-

лений интересен способ введения упорядоченности элементов. Каждый элемент кортежа в определении заменяется множеством всех элементов, которые ему предшествуют в упорядоченности.

Операция *объединения* двух множеств: $Z = X \cup Y \equiv \forall u (u \in Z \equiv (u \in X \vee u \in Y))$.

Операция *пересечения* двух множеств: $Z = X \cap Y \equiv \forall u (u \in Z \equiv (u \in X \& u \in Y))$.

Объединение (как множеств) *всех элементов* из множества:

$$Y = \cup X \equiv \forall z (z \in Y \equiv \exists u (u \in X \& z \in u)).$$

Пересечение (как множеств) *всех элементов* из множества:

$$Y = \cap X \equiv \forall z (z \in Y \equiv \forall u (u \in X \Rightarrow z \in u)).$$

Операции пересечения могут дать пустой результат даже при непустых операндах.

Декартово произведение двух множеств:

$$Z = A \times B \equiv \forall u (u \in Z \equiv \exists x \exists y (x \in A \& y \in B \& u = \langle x, y \rangle)).$$

Имеется внешняя для ЦФ-теории схема определений декартова произведения любого числа множеств. В ней увеличивается число кванторов существования и соответствующих конъюнкций, а также длина кортежа.

Для *упрощения записи* часто используют следующие обозначения.

$\forall x \in A P \equiv \forall x (x \in A \Rightarrow P)$, где P — некоторая формула ЯПУ. (Ограниченный квантор общности.)

$\exists x \in A P \equiv \exists x (x \in A \& P)$, где P — некоторая формула ЯПУ. (Ограниченный квантор существования.)

$P(Q) \equiv \forall x (x = Q \Rightarrow P(x))$, где Q — определяемое обозначение некоторого множества, а P — формула ЯПУ с вхождением переменной. (Подстановка обозначения множества.) При этом считается, что неявно вводимые переменные при подстановке обозначений не совпадают ни с одним из явных переменных выражения и с неявными переменными других подстановок.

$\exists! x \in Z P \equiv \exists x (x \in Z \& P \& \forall y ((y \in Z \& P) \Rightarrow y = x))$, где P — некоторая формула ЯПУ. (Существование единственного элемента.)

Эти обозначения не являются определениями в ЯПУ, поскольку содержат такие объекты, как формулы и определяемые обозначения в качестве операндов. Эффективность таких внешних обозначений видна на примере определений отношения и функции в ЦФ-теории. Прямые определения значительно длиннее и менее выразительны.

Множество u суть *бинарное отношение* на элементах двух (возможно совпадающих) множеств: $\text{Rel}(u) \equiv \exists A \exists B (u \subseteq A \times B)$.

Множество u суть *функция* (однозначное отображение) из одного множества в другое (возможно совпадающее с первым) множество:

$$\text{Fnc}(u) \equiv \exists A \exists B (u \subseteq A \times B \& \forall x \in A \exists! y \in B \langle x, y \rangle \in u).$$

Значение функции при данном значении аргумента (подстановка обозначений):

$$y = W | x \equiv \text{Fnc}(W) \& (\langle x, y \rangle \in W).$$

Формула A является однозначным бинарным отношением на элементах множества X :

$$\text{Ubr}(A, X) \equiv \forall y \forall z \forall v (y \in X \& A(y, z) \& A(y, v) \Rightarrow z = v).$$

(Если для элемента множества X есть подходящая по формуле A пара, то она единственная.)

Следующая формула в ЦФ-теории считается определением *стандартного бесконечного множества*. $\text{Inf}(z) \equiv \forall x (x = \emptyset \Rightarrow x \in z) \& \forall y (y \in z \Rightarrow (y \cup \{y\}) \in z)$, где во второй скобке использована подстановка обозначения.

Замечание 2.2.1. Эта формула не дает определение множества внутри ЦФ-теории, поскольку она содержит вхождение определяемого множества. Таким образом, это внешнее определение,

а принадлежность стандартного бесконечного множества к теории множеств приходится постулировать.

При использовании определяемых и внешних обозначений надо помнить, что соответствующая формула ЯПУ получается литеральной подстановкой правых частей определений этих обозначений вместо каждого обозначения.

2.3. Схемы аксиом Цермело–Френкеля

Аксиомы приводятся со стандартной нумерацией, наименованием и обозначениями. При интерпретации аксиом, в частности, указываются внешние для теории множеств объекты. Наличие этих объектов делает невозможным текстуальный анализ логического вывода внутри ЦФ-теории. Другое важное отличие данной аксиоматики от наивной теории множеств состоит в ограничении действия кванторов. Многие общие утверждения разрешается делать только относительно элементов или подмножеств некоторого ранее определенного множества. Цель этих ограничений — не допустить формулировку высказываний, из которых можно получить противоречие. Правила вывода соответствуют логике предикатов. Собственные аксиомы ЦФ-теории следующие.

Z1. Аксиома объемности: $\forall z(z \in x \equiv z \in y) \Rightarrow x = y$.

Множества определены с точностью до содержащихся в них элементов.

Z2. Аксиома пары: $\exists z(z = \{x, y\})$.

Из двух множеств можно построить пару. Отсюда следует, что для них существует также упорядоченная пара.

Z3. Аксиома суммы: $\exists y(y = \cup x)$.

Для каждого множества существует объединение всех его элементов как множеств.

Z4. Аксиома степени: $\exists y(y = 2^x)$.

У каждого множества существует множество всех его подмножеств.

Z5. Аксиома выделения: $\exists y \forall z(z \in y \equiv (z \in x \& A))$, где символ A обозначает внешний для теории объект — формула, которая не содержит переменную y .

Каждое множество содержит подмножество, возможно, пустое, состоящее из всех элементов, удовлетворяющих заданной формуле, если эта формула не ссылается на это подмножество. Последнее требование исключает возникновение определений подмножеств, содержащее ссылку на себя.

Z6. Аксиома бесконечности: $\exists x \text{Inf}(x)$.

Имеется стандартное бесконечное множество.

Z7. Аксиома выбора: $\forall z \exists w(\text{Func}(w) \& \forall x(x \in z \& -x = \emptyset \Rightarrow \exists u(u = w|x \& u \in x)))$.

Для произвольного множества существует функция, которая отображает каждое непустое его подмножество в один из элементов этого подмножества.

Z8. Аксиома фундирования: $\forall x((\exists y(y \in x)) \Rightarrow \exists z((z \in x) \& ((z \cap x) = \emptyset)))$.

Каждое непустое множество содержит элемент, не имеющий с этим множеством общих элементов. В частности, одноэлементное множество не совпадает, как объект ЦФ-теории, со своим единственным элементом — его можно рассматривать как ссылку на этот элемент.

ZF9. Аксиома подстановки: $\text{Ubr}(A, x) \Rightarrow \exists r \forall s(s \in r \equiv \exists t(t \in x \& A(t, s)))$, где A — произвольная формула. Каждому бинарному отношению A , однозначному на множестве x , соответствует множество r образов элементов из x . Эта аксиома была предложена А. Френкелем для построения теории кардинальных чисел, аналогичной теории Г. Кантора в наивной теории множеств. Надо отметить, что однозначное бинарное отношение, заданное формулой A , не является функцией, определенной на некотором подмножестве множества x , поскольку формула, как математический объект, не является подмножеством прямого произведения, в отличие от функций в ЦФ-теории. В этой аксиоме снова проявляется наличие нескольких уровней теории, причем сама теория множеств занимает только один уровень, а остальные уровни относятся к логике и внешним определениям.

3. Связь рекурсивных функций и теории Цермело–Френкеля

Ниже будет приведено определение рекурсивных функций, принятое в конструктивной математике, и указаны связи этого понятия с теорией множеств.

3.1. Понятие рекурсивной функции

Понятие рекурсивной функции возникло из понятия алгоритма, которое было известно математикам со времен древнего Вавилона. Само слово «алгоритм» имеет средневековое арабское происхождение (от Аль Хорезми — арабский математик девятого века) и получило европейскую прописку вместе с позиционной арифметикой. Это слово означает использование правил проведения расчетов или геометрических построений, приводящих от исходных данных к нужному результату за конечное число шагов. И это понятие восходит к античности. В XX веке был обнаружен эмпирический факт, что все такие правила можно свести к стандартной форме, причем многими способами. Теоретики назвали такие правила универсальными алгоритмами, а их техническая реализация широко известна как универсальная вычислительная машина. Теория алгоритмов первоначально была развита в работах А. Тьюринга, А. Н. Колмогорова, А. А. Маркова, А. Черча. Под универсальностью в этой теории понимается возможность алгоритма выполнить любую работу по преобразованию двоичных текстов, которую может выполнить произвольный конечный автомат за произвольное конечное время (число тактов), имеющий адресуемый двоичными целыми числами доступ к бесконечной памяти. Начальное заполнение памяти предполагается содержащим конечное число единиц и называется программой алгоритма. Постулат о том, что других правил в математике люди не могут придумать, принадлежит А. Черчу и пока не опровергнут. Все универсальные алгоритмы эквивалентны по своим возможностям порождать новый конечный текст из исходного конечного текста. Для того чтобы избавить математиков от подробностей и разнообразия конструкций конкретных вычислительных устройств, было введено понятие рекурсивной функции, которое задает стандартный универсальный алгоритм на языке преобразования функций, отображающих несколько натуральных аргументов в натуральное число. Однако в прикладной математике большее распространение получили специальные алгоритмические языки, обладающие выразительностью математического текста и позволяющие переложить на машину реальное распределение памяти под решение задачи. Первым примером такого языка был Алгол. Но теория алгоритмов построена на языке рекурсивных функций. Теория множеств, состоящих из текстов, и их отображений, которые можно построить алгоритмами, называется конструктивной математикой. Аксиоматика конструктивной математики состоит из определения рекурсивных функций и аксиом натуральных чисел.

3.2. Аксиомы натуральной арифметики (Дж. Пеано, 1889)

P1. Имеется натуральное число 1.

P2. У каждого натурального числа есть следующее за ним натуральное число.

P3. Число 1 не является следующим для натурального числа.

P4. Каждое натуральное число, кроме 1, является следующим ровно для одного натурального числа.

P5 (аксиома полной индукции). Если некоторое утверждение верно для 1, и из допущения, что оно верно для некоторого числа, следует, что оно верно для следующего числа, то оно верно для всех натуральных чисел. *У этой аксиомы есть еще одна формулировка, не использующая внешнее для арифметики понятие утверждения о числах.* Если совокупность натуральных чисел содержит 1, и вместе с каждым своим числом содержит следующее число, то она содержит все натуральные числа.

Аксиомы Пеано не содержат в себе стандартной интерпретации натуральных чисел через счет предметов, а вводят числа как абстрактный логический объект. В этом смысле вопрос об адек-

ватности этих чисел практическому счету остается вне теории чисел, также как вопрос о реальной интерпретации множеств остается вне теории множеств. Для связи теории множеств и арифметики обычно используется «трансляционная аксиома» об эквивалентности стандартного бесконечного множества и совокупности натуральных чисел. Замечание 2.2.1 остается верным и для индуктивного определения натурального числа, поскольку формула, выражающая конъюнкцию аксиом Пеано, содержит вхождение имени множества этих чисел. Поэтому возможность такого отождествления нельзя доказать в рамках теории множеств. Строго говоря, ее нельзя доказать и во внешней логике, поскольку до установления эквивалентности в ЦФ-теории нельзя пользоваться аксиомой индукции. Доказательство непротиворечивости объединенной аксиоматики проводится в метатеории, куда произвольно включают теорию Пеано, предполагая ее непротиворечивость.

3.3. Определение класса рекурсивных функций

Структура определения рекурсивных функций аналогична определениям натуральных чисел и стандартного бесконечного множества [15]. Вначале определяется конечный набор элементарных объектов, потом — конечный набор преобразований этих объектов в новые объекты, и далее, эти операции распространяются на все порожденные объекты. Класс порожденных так объектов имеет структуру по уровню порождения объекта, которую иногда интерпретируют как структуру сложности. Это минимальная совокупность объектов, которая содержит все исходные объекты и замкнута относительно применения операций порождения. В теории рекурсивных функций совокупность натуральных чисел расширяется числом 0 (ноль). Это расширение далее подразумевается.

3.3.1. *Исходные рекурсивные функции* определены на натуральных значениях всех своих аргументов и имеют натуральные значения.

$$O(x)=0;$$

$$S(x)=x+1;$$

$$I_m^n(x_1, \dots, x_n)=x_m.$$

3.3.2. *Операторы* на функциях. При записи оператора слева указываются в фигурных скобках исходные операнды, а справа, после стрелки, результат оператора.

Подстановка:

$$\{f(x_1, \dots, x_n), g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)\} \rightarrow h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Примитивная рекурсия:

$$\{f(x_1, \dots, x_n), g(x_1, \dots, x_n, y, z)\} \rightarrow h(x_1, \dots, x_n, y), \text{ где}$$

$$h(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n);$$

$$h(x_1, \dots, x_n, y+1) = g(x_1, \dots, x_n, y, h(x_1, \dots, x_n, y)) \text{ для } y=0, 1, \dots$$

Минимизация:

$$\{f(x_1, \dots, x_n, y)\} \rightarrow h(x_1, \dots, x_n) = y, \text{ где}$$

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \ \& \ f(x_1, \dots, x_n, y') \neq 0, \ 0 \leq y' \leq y-1.$$

Если для данных x_1, \dots, x_n при всех значениях y $f(x_1, \dots, x_n, y) \neq 0$, то $h(x_1, \dots, x_n)$ не определена на этих x_1, \dots, x_n . Стандартное обозначение этого оператора

$$h(x_1, \dots, x_n) = \mu y (f(x_1, \dots, x_n, y) = 0).$$

3.3.3. *Рекурсивные функции* — это минимальная совокупность функций, которая содержит все исходные рекурсивные функции и замкнута относительно операторов порождения.

Это определение можно записать на языке первого уровня в форме конъюнкций формул, выражающих тот факт, что для каждого оператора вместе с любым полным набором его операндов множество содержит и результат оператора. Однако при этом начинает действовать замечание 2.2.1, и автоматического включения множества рекурсивных функций в ЦФ-теорию не произойдет.

Важно понимать, что если исходные объекты не определены в ЦФ-теории как множества, и-или операторы порождения не являются операциями на множествах, определенными в рамках ЦФ-теории, то вопрос о принадлежности порожденного класса к множествам решается только дополнительными аксиомами. При этом надо доказывать непротиворечивость этих аксиом с ЦФ-аксиомами.

Если использовать отождествление стандартного бесконечного множества и совокупности натуральных чисел, то все рекурсивные функции получают статус функций в теории множеств. Это означает, что для рекурсивной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ истинна формула $\text{Func}(f)$. Но определения множества всех этих объектов мы не получаем, хотя можно определить любые конечные совокупности таких функций, как ЦФ-множества. Определить множество всех рекурсивных функций можно, если предварительно дать определение функции h , отображающей натуральный ряд \mathbb{N} в конечные множества рекурсивных функций

$$h(n) = \bigvee h(n-1) \cup h(n-1), \quad (3.1)$$

где $\bigvee A$ — преобразование множества функций A операторами п. 3.3.2,

$h(0)$ — множество начальных рекурсивных функций п. 3.3.1.

Тогда множество рекурсивных функций определяется как

$$\text{Rec} = \forall x (x \in \text{Rec} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} (x \in h(n))). \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. *Если отождествить натуральные числа, заданные аксиомами Пеано, со стандартным бесконечным множеством, то в ЦФ-теории существует множество всех рекурсивных функций. (Доказательство дано выше: (3.1, 3.2).)*

3.4. Геделева нумерация алгоритмов

Для целей данной статьи не требуется формировать какое-то особое описание алгоритмов. Существенна только возможность сопоставить каждому алгоритму натуральное число, по которому он однозначно восстанавливается. Такое сопоставление имеет несколько названий, эквивалентных по основному смыслу, но отражающих разные направления применения алгоритмов. Приведем некоторые из них.

Программа алгоритма на универсальной машине (информатика, электроника).

Нумерация Геделя на классе рекурсивных функций (конструктивная математика).

Начальное состояние универсального алгоритма (теория автоматов).

Описание алгоритма на универсальном алгоритмическом языке (прикладное программирование). В этом случае число получается поэлементным перекодированием текста описания, например, в машинном коде букв.

Из перечисленных способов нумерации пояснения требует только геделева нумерация рекурсивных функций. Но для понимания дальнейшего материала можно использовать любую из этих нумераций, исходя из личной интуиции. Очевидность существования программы у алгоритмов и упомянутая теорема функциональной эквивалентности теории рекурсивных функций и любого другого универсального алгоритма делает почти очевидными следующие факты. Они будут приведены без доказательств.

Определение 3.4.1. Рекурсивная функция называется примитивной (ПРФ), если она получена из начальных функций без применения оператора минимизации.

Замечание 3.4.1. При программной реализации алгоритмов примитивность означает отсутствие циклов неопределенной длины. Ситуация, когда оператор минимизации дает неопределенную функцию, соответствует появлению бесконечного цикла в программе при таких исходных данных.

Теорема 3.2. (С. Клини) *Существуют ПРФ U от одной переменной и последовательность ПРФ T_n от $n+1$ переменной, $n=0,1,\dots$, такие, что для любой рекурсивной функции f от n переменных существует такое натуральное число k (геделев номер f), что в области определения f*

$$f(x_1,\dots,x_n) = U(\mu y(T_n(k, x_1,\dots,x_n, y))=0).$$

Замечание 3.4.2. В теории программирования из этой теоремы, в частности, следует, что любой алгоритм можно запрограммировать не более чем с одним циклом неопределенной длины. Геделев номер в этом случае можно интерпретировать как двоичный код программы. Набор ПРФ $\langle U, T_1, T_2, \dots \rangle$ можно интерпретировать как стандартную универсальную вычислительную машину, на которой программируют все алгоритмы.

Наличие потенциально неограниченного цикла в некоторых программах (применение минимизации при построении рекурсивной функции) делает алгоритмически неразрешимой задачу определения по произвольному натуральному числу, является ли оно геделевым номером некоторой рекурсивной функции [9].

4. Расширение языка первого уровня добавлением рекурсивных функций

В этом разделе будет построен язык, формулы в котором могут совмещать рекурсивные функции и синтаксис языка первого уровня. Конструктивная математика и ЦФ-теория взаимно дополнительны в том смысле, что объектами конструктивной математики являются тексты и их преобразования, а в теории множеств значения переменных интерпретируются как множества, а все текстовые логические объекты (например, формулы) относятся к внешней метатеории. Ниже исследуется попытка соединения выразительных возможностей этих теорий.

В соответствии с теоремой 3.2 выберем стандартную универсальную машину (УМ)

$$\langle U, T_1, T_2, \dots \rangle. \quad (4.1)$$

Обозначение одноместного отношения

$$\text{Rec}(x) ::= ((x = \langle k, n \rangle) \& (U(\mu y(T_n(k, x_1, \dots, x_n, y)) = 0) \in \text{Rec})) \quad (4.2)$$

со ссылкой на обозначение (3.2) означает, что x является программой некоторой рекурсивной функции. Формула $\neg \text{Rec}(x)$ означает, что x либо не кортеж двух натуральных чисел, либо кортеж, который не является программой алгоритма (задает в УМ бесконечный цикл). Строго говоря, по теореме 3.2 программа задается двумя числами $\langle k, n \rangle$, где первое число интерпретируется как программа, а второе — как размерность исходных данных программы (число числовых регистров на входе в терминах информатики).

Следующее обозначение для алгоритма, порожденного программой, позволяет ввести рекурсивные функции в формулы языка первого уровня:

$$F[k, n](x_1, \dots, x_n) ::= \text{Rec}(k, n) \& U(\mu y(T_n(k, x_1, \dots, x_n, y)) = 0). \quad (4.3)$$

Заметим, что отношение $\text{Rec}(k)$ не вычислимо рекурсивно, а второй член выражает значение рекурсивной функции. Это позволяет ввести обозначение

$$F[k, n](x_1, \dots, x_n) = z ::= z = U(\mu y(T_n(k, x_1, \dots, x_n, y)) = 0). \quad (4.4)$$

Условие $\text{Rec}(k, n)$ можно опустить, поскольку наличие значения z означает не только это отношение, но еще и попадание кортежа аргументов $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ в область определения соответствующей рекурсивной функции. Последнее отношение обозначим

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \text{Dom}(F[k, n]) \iff \exists z (F[k, n](x_1, \dots, x_n) = z). \quad (4.5)$$

Обозначим стандартное бесконечное множество, отождествленное с натуральным рядом чисел символом N .

Расширенный язык первого уровня обозначим ЯПУР. У каждой формулы языка первого уровня, включающей в общем случае и выражения с рекурсивными функциями, имеется однозначно определенный геделев номер, по которому эту формулу можно однозначно восстановить. Нумерацию Геделя можно определить многими способами. Для определенности можно считать, что каждый символ ЯПУ имеет уникальный конечный двоичный код, длины кодов одинаковы для всех символов, и тексту формулы сопоставлено натуральное число, составленное из этих кодов в порядке вхождения символов в текст. Обратное соответствие очевидно. Формула в этом случае отождествляется с кортежем кодов своих символов. Это отождествление происходит на уровне метатеории.

Обозначим номер формулы $\text{Gn}(A)$, где A суть формула ЯПУР, а формулу, которая соответствует номеру $x \in N$, обозначим $A[x]$. Заметим, что обе функции примитивно рекурсивные. Для подстановок значений аргументов в формулу будем использовать стандартные обозначения с круглыми скобками, в которых перечисляются значения в том порядке, в котором формула содержит соответствующие параметры. Функция $A[x]$ может выдавать в общем случае произвольный текст в алфавите теории.

Теорема 4.1. *Введение рекурсивных функций в язык первого уровня делает аксиоматику Цермело–Френкеля противоречивой.*

Доказательство. Определим множество следующей формулой:

$$Y \iff \forall x \in N (x \in Y \Rightarrow (\forall p (\forall z \in N (z \in p \Rightarrow A[x](z))) \Rightarrow \neg x \in p)). \quad (4.6)$$

Рассмотрим формулу

$$A_0 \iff (\forall p (\forall z \in N (z \in p \Rightarrow A[x](z))) \Rightarrow \neg x \in p), \quad (4.7)$$

которая совпадает с определяющей формулой множества Y . Рассмотрим

$$x = \text{Gn}(A_0). \quad (4.8)$$

Тогда $A[x] = A_0$. Переменная p из (4.6) получает определение

$$p \iff \forall z \in N (z \in p \Rightarrow A_0(z)),$$

которое совпадает с определением Y при замене переменной z на x . Поэтому, при данном значении переменной x из определения (4.6) следует противоречие $x \in Y \Rightarrow \neg x \in Y$. \square

Пояснение 1. В определении множества (4) возможна ситуация, когда формула $A[x]$ является текстом, который не соответствует правильной формуле ЯПУР. В этом случае множество p пусто, и переменная x не входит в него, а значит должна входить как элемент в Y . Формула $A[x]$ из ЯПУР может содержать в себе общерекурсивную функцию в качестве параметра формулы ЯПУ. Переменная x может входить в число переменных этой функции, но не входить в область ее определения. Тогда значение $A[x]$ не определено, хотя текст формулы вычислим. В этом случае, как и выше, p пусто. Если же переменная z входит в аргумент рекурсивной функции, но не входит в область ее определения (она может быть даже не числовой), то z не входит в p . Эта интерпретация содержится в модели языка ЯПУР: неопределенная формула считается ложной.

Пояснение 2. Символ Y определен как совокупность всех натуральных чисел, каждое из которых не входит в множество, определенное формулой, геделев номер которой совпадает с дан-

ным числом. Возникающее противоречие аналогично парадоксу Б. Рассела в наивной теории множеств.

Пояснение 3. Формулу, определяющую множество Y , можно записать проще, если ввести определение для отрицания результата работы алгоритма $A[x](z)$:

$$\neg A[x](f) \equiv \exists p \forall z (z \in p \Rightarrow A[x](z)) \& \neg (f \in p), \quad (4.9)$$

которое означает, что результат рекурсивной функции $A[x]$ является формулой ЯПУР и эта формула не выполняется для аргумента f .

Тогда определение множества Y можно дать в компактной форме:

$$Y \equiv \forall x \in N (x \in Y \Rightarrow \neg Ax). \quad (4.10)$$

Замечание 4.1. Противоречивость ЯПУР возникла в результате следующих допущений, сделанных на уровне метатеории ради объединения конструктивной математики и ЦФ-теории.

a1. Стандартное бесконечное множество отождествлялось с совокупностью натуральных чисел.

a2. Текст программы рекурсивной функции отождествлялся с самой этой функцией.

a3. Текст в алфавите ЯПУР отождествлялся с его числовой кодировкой.

Отказ от любого из этих допущений делает невозможным введение рекурсивных функций в язык первого уровня. Но для введения рекурсивных функций в теорию множеств в качестве ее объектов достаточно одного допущения a1. При этом не возникает противоречий.

Замечание 4.2. Противоречие, полученное в ЯПУР, получено на подмножестве натурального ряда. Если ограничиться только конечными множествами, то противоречий не возникает. В этом случае, любая рекурсивная функция определена на конечном множестве кортежей. Поэтому ее можно заменить обычной конечной формулой логики предикатов, и не происходит выхода за пределы ЯПУ. Тогда условная непротиворечивость ЦФ-теории, доказанная П. Коэном (1963), распространяется на этот случай. Это доказывает следующее утверждение.

Теорема 4.2. *На классе всех конечных множеств ЯПУР можно сузить до ЯПУ без потери общности. При этом ЯПУР получает непротиворечивую интерпретацию на классе конечных множеств, и этот класс не может быть расширен.*

Иными словами, конструктивная математика совместима с абстрактной теорией множеств только на конечных множествах.

Список литературы

1. Кантор Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. 430 с.
2. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 367 с.
3. Успенский В. А. Теорема Геделя о неполноте. М.: Наука, 1982. 111 с.
4. Коэн П. Теория множеств и континуум гипотеза. М.: Мир, 1969. 347 с.
5. Карри Х. Основания математической логики. М.: Мир, 1969. 568 с.
6. Деппман И. Я. История арифметики. М.: Учпедгиз, 1965. 423 с.
7. Кушнер Б. А. Лекции по конструктивному математическому анализу. М.: Наука, 1973. 447 с.
8. Russel B. Introduction to Mathematical philosophy. L.–N. Y., 1930. 208 p.
9. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое. М.: Советское радио, 1979. 167 с.

10. Математический энциклопедический словарь. Антиномия. М.: Советская энциклопедия, 1988. С. 73–75.
11. Математический энциклопедический словарь. Аксиоматическая теория множеств. М.: Советская энциклопедия, 1988. С. 44–45.
12. Коганов А. В. Эталонные основы математического языка // Интегральная геометрия. Математические модели. Понимание изображений: Сб. М., 2001. С. 52–80.
13. Коганов А. В. Парадокс аксиомы композиции // Математика. Образование. Экология. Гендерные проблемы: Сб. тр. Междунар. конфер. Воронеж, 26–30.05.03 г., Прогресс–Традиция М. 2003. С. 46–54.
14. Коганов А. В. Эмпирико-эталонные основы математических теорий // Математика и опыт: Сб. М.: МГУ, 2003. С. 317–340.
15. Математический энциклопедический словарь. Рекурсивная функция. М.: Советская энциклопедия, 1988. С. 525–526.
16. Черч А. Введение в математическую логику. М.: Иностранная литература, 1969. 485 с.