Квазиклассические решения уравнения Гросса–Питаевского, локализованные в окрестности окружности

А. В. Борисов^{1,a}, А. Ю. Трифонов², А. В. Шаповалов^{1,2}

¹ Томский государственный университет,
634050, г. Томск, проспект Ленина, д. 36

² Томский политехнический университет,
факультет естественных наук и математики,
634050, г. Томск, проспект Ленина, д. 30

E-mail: ^aborisov@phys.tsu.ru

Получено 7 апреля 2009 г.

В квазиклассическом приближении показано, что для конденсата Бозе–Эйнштейна, моделируемого уравнением Гросса–Питаевского с притягивающей нелинейностью при специальной конфигурации внешнего поля магнитной ловушки, возможны неколлапсирующие солитоноподобные волновые функции.

Ключевые слова: уравнение Гросса–Питаевского, бозе–эйнштейновский конденсат, магнито-оптическая ловушка

Semiclassical solutions localized in a neighborhood of a circle for the Gross–Pitaevskii equation

A. V. Borisov¹, A. Yu. Trifonov², A. V. Shapovalov^{1,2}

¹ Tomsk State University, Lenin av. 36, Tomsk, 634050, Russia

² Tomsk Polytechnic University, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Lenin av. 30, 634050, Russia

Abstract. — Non-collapsing soliton-like wave functions are shown to exist in semiclassical approximation for the Bose–Einstein condensate model based on the Gross–Pitaevskii equation with attractive nonlinearity and external field of magnetic trap of special form.

Key words: Gross–Pitaevskii equation, Bose–Einstein condensate, magneto-optical trap

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 359–365 (Russian).

Введение

Уравнение Гросса–Питаевского (УГП), представляющее собой нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с потенциалом внешнего поля (переменными коэффициентами), описывает нелинейные волновые явления [8, 6, 10], а также состояния бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) [3, 11]. Особый интерес представляют солитоноподобные решения, которые имеют вид локализованных уединенных волн. Известно, что, согласно критерию Вахитова–Колмогорова [4], солитоноподобные решения НУШ неустойчивы в многомерном случае. Однако для УГП с ненулевым потенциалом численно либо учетом нелокального взаимодействия показано существование устойчивых солитонов, например, в работе [5]. Проблема построения аналитических решений подобного вида может быть исследована с помощью метода квазиклассических асимптотик [1, 2].

В данной работе построены параметрические семейства квазиклассических асимптотик уравнения Гросса–Питаевского в $(2+1)$ -мерном пространстве — времени с потенциалом гармонического осциллятора, локализованного в окрестности окружности. Рассмотрены случаи притягивающего и отталкивающего потенциалов. Построенные асимптотики можно рассматривать как глобальные приближенные решения НУШ в классе функций, имеющих конечную норму в $\mathbb{L}_2$.

Квазиклассические решения

Запишем уравнение Гросса–Питаевского в полярных координатах в следующем виде:

$$[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - U(r, \varphi, t) + g^2 |\Psi(r, \varphi, t, \hbar)|^2] \Psi(r, \varphi, t, \hbar) = 0. \quad (1)$$

Здесь r, φ — полярные координаты; t — время; $g = \sqrt{-4\pi\hbar^2 \mathfrak{a} / m}$ — вещественный параметр нелинейности; $\mathfrak{a}$ — амплитуда s -рассеяния медленных атомов друг на друге; $\hbar$ — постоянная Планка; вещественная гладкая функция $U(r, \varphi, t)$ — потенциал магнитооптической ловушки.

Введем класс функций, сосредоточенных в каждый момент времени t при $\hbar \rightarrow 0$ в окрестности некоторой замкнутой плоской кривой без самопересечений

$$\Gamma' = \{(r, \varphi) \mid r = R(\varphi, t)\}. \quad (2)$$

Кривая Γ' задается гладкой функцией $R(\varphi, t)$ аргументов (φ, t) .

Определим структуру общего элемента данного класса функций в следующем виде:

$$\Psi(r, \varphi, t, \hbar) = \Phi(\theta, \varphi, t, \hbar) \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(S^0(\varphi, t) + P(\varphi, t) \Delta r + \frac{1}{2} Q(\varphi, t) \Delta r^2 + \hbar S^1(\varphi, t) \right) \right\}. \quad (3)$$

Предположим, что функция $\Psi(r, \varphi, t, \hbar)$ зависит лишь от одной «быстрой» переменной (при $\hbar \rightarrow 0$)

$$\theta = \frac{1}{\hbar} \sigma, \quad (4)$$

где

$$\sigma = \frac{\Delta r}{R(\varphi, t)} + \hbar \sigma^1(\varphi, t), \quad \Delta r = r - R(\varphi, t). \quad (5)$$

Вещественные функции $R(\varphi, t)$, $Q(\varphi, t)$, $S^0(\varphi, t)$, $P(\varphi, t)$, $S^1(\varphi, t)$, $\sigma^1(\varphi, t)$ гладко зависят от своих аргументов, гладкая вещественная функция $\Phi(\theta, \varphi, t, \hbar)$ убывает при $|\theta| \rightarrow \infty$ и регулярна по $\hbar$.

Для операторов $(\Delta r$ и $\hat{\Delta p})$ справедливы оценки

$$\Delta r = O(\hbar), \quad \theta - \sigma^1 = O(1), \quad \hat{\Delta p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r} - R(\varphi, t) = O(1). \quad (6)$$

В уравнении (1) в функциях $1/r$, $1/r^2$, $U(r, \varphi, t)$ положим $r = R(\varphi, t) + \Delta r$ и разложим полученные выражения в ряд по степеням Δr , получим

$$\left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{H} - g^2 |\Psi|^2 \right\} \Psi(r, \varphi, t, \hbar) = O(\Delta r^3). \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R} - \frac{\Delta r}{R^2} + \frac{\Delta r^2}{R^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{2\Delta r}{R^3} + \frac{3\Delta r^2}{R^4} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \\ & + U(R, \varphi, t) + U_1(R, \varphi, t)\Delta r + U_2(R, \varphi, t)\Delta r^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $U_1(R, \varphi, t) = (\partial U(r, \varphi, t) / \partial r)|_{r=R(\varphi, t)}$, $U_2(R, \varphi, t) = 2^{-1}(\partial^2 U(r, \varphi, t) / \partial r^2)|_{r=R(\varphi, t)}$.

Подставим выражение (3) в уравнение (7). Левую часть полученного уравнения с учетом оценок (6) можно рассматривать как ряд по неотрицательным степеням асимптотического параметра $\hbar$. Приравняв нулю вещественную и мнимую части нулевого члена ряда (коэффициент при $\hbar^0$), получим следующие уравнения для функций $R(\varphi, t)$, $P(\varphi, t)$, $S^0(\varphi, t)$, $\Phi(\theta, \varphi, t)$:

$$mR_{,t} = P - \frac{R_{,\varphi}}{R^2} (S_{,\varphi}^0 - PR_{,\varphi}), \quad (9)$$

$$\tilde{a}^2 \Phi_{,\theta\theta} + g^2 \Phi^3 = \tilde{b}, \quad (10)$$

где обозначено

$$\tilde{a}^2 = \frac{1}{2mR^2} \left(1 + \frac{R_{,\varphi}^2}{R^2} \right), \quad \tilde{b} = S_{,t}^0 - \left(1 + \frac{R_{,\varphi}^2}{R^2} \right) \frac{P^2}{2m} + \frac{(S_{,\varphi}^0)^2}{2mR^2} + U(R, \varphi, t), \quad (11)$$

$R_{,t} = \partial R / \partial t$. Коэффициенты $\tilde{a} = \tilde{a}(\varphi, t, \hbar)$, $\tilde{b} = \tilde{b}(\varphi, t, \hbar)$ в уравнении (10) не зависят от θ . Решение уравнения (10) по переменной θ , убывающее при $\theta \rightarrow \infty$ и $\tilde{b} \geq 0$, можно записать в виде

$$\Phi = \frac{\sqrt{2\tilde{b}}}{g} \cosh^{-1} \left[\frac{\sqrt{\tilde{b}}}{\tilde{a}} \theta \right].$$

Предполагая, что функция Φ зависит лишь от одной «быстрой» переменной θ вида (4), положим $\tilde{b} = \tilde{a}^2$, тогда $\Phi = \frac{\sqrt{2\tilde{a}}}{g \cosh \theta}$. С учетом (11) имеем

$$S_{,t}^0 - \left(1 + \frac{R_{,\varphi}^2}{R^2} \right) \frac{P^2}{2m} + \frac{(S_{,\varphi}^0)^2}{2mR^2} + U(R, \varphi, t) = \frac{1}{2mR^2} \left(1 + \frac{R_{,\varphi}^2}{R^2} \right). \quad (12)$$

Запишем общий элемент класса функций, сосредоточенных в окрестности замкнутой кривой Γ' вида (2) с точностью $O(\hbar^2)$ достаточной для построения главного члена асимптотики, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi(r, \varphi, t, \hbar) = & \frac{1}{gR} \sqrt{\frac{1}{m} \left(1 + \frac{R_{,\varphi}^2}{R^2} \right)} \frac{1}{\cosh(\theta)} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(S^0(\varphi, t) + P(\varphi, t)\Delta r + \frac{1}{2} Q(\varphi, t)\Delta r^2 + \hbar S^1(\varphi, t) \right) \right\} \times \\ & \times \{ 1 + \hbar \cosh(\theta) u(\theta, \vec{x}, t, \hbar) + i\hbar \cosh(\theta) v(\theta, \vec{x}, t, \hbar) \} + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Функциональные параметры $R(\varphi, t)$, $P(\varphi, t)$, $Q(\varphi, t)$, $S^0(\varphi, t)$, $S^1(\varphi, t)$, $\sigma^1(\varphi, t)$ определяются при построении решения уравнения (1). Функции $u(\theta, \vec{x}, t, \hbar)$, $v(\theta, \vec{x}, t, \hbar)$ убывают при $|\theta| \rightarrow \infty$ и также подлежат определению.

Подставим (13) в (7), (8) и разложим полученное выражение по Δr и $\hbar$, получим систему уравнений (9), (10) и

$$Q = -\frac{-R^2 m R_{,t} - R R_{,\varphi} P_{,\varphi} - R_{,\varphi}^2 P + R_{,\varphi} S_{,\varphi}^0}{R(R^2 + R_{,\varphi}^2)}, \quad (14)$$

$$P_{,t} = \frac{-R^3 m U_1 - P_{,\varphi} (-R_{,\varphi} P + S_{,\varphi}^0) R + (-R_{,\varphi} P + S_{,\varphi}^0)^2}{R^3 m}. \quad (15)$$

$$S_{,t}^1 = \frac{1}{2} \left((-1 + 2S_{,\varphi}^1 R_{,\varphi} P - 2S_{,\varphi}^0 S_{,\varphi}^1) R^4 + (-2\sigma_{,\varphi}^1 R_{,\varphi} + R_{,\varphi\varphi}) R^3 + \right. \\ \left. + (2R_{,\varphi}^3 S_{,\varphi}^1 P + (-5 - 2S_{,\varphi}^0 S_{,\varphi}^1) R_{,\varphi}^2) R^2 + \right. \\ \left. + (-2R_{,\varphi}^3 \sigma_{,\varphi}^1 + 3R_{,\varphi}^2 R_{,\varphi\varphi}) R - 6R_{,\varphi}^4 \right) \times (R^2 + R_{,\varphi}^2) R^4 m)^{-1}, \quad (16)$$

$$\sigma_{,t}^1 = \frac{1}{2} \left\{ [(-P_{,\varphi} + 2m R_{,t}) R_{,\varphi} + S_{,\varphi\varphi}^0 - R_{,\varphi\varphi} P] R^3 - 2R_{,\varphi} S_{,\varphi}^0 R^2 + \right. \\ \left. + [-P_{,\varphi} R_{,\varphi}^3 + (S_{,\varphi\varphi}^0 - 3R_{,\varphi\varphi} P) R_{,\varphi}^2 + (2R_{,\varphi\varphi} S_{,\varphi}^0 + 2\sigma_{,\varphi}^1 P) R_{,\varphi} - \right. \\ \left. - 2\sigma_{,\varphi}^1 S_{,\varphi}^0] R - 2R_{,\varphi}^3 S_{,\varphi}^0 + 2R_{,\varphi} S_{,\varphi}^1 + 2R_{,\varphi}^4 P \right\} [R^3 (R^2 + R_{,\varphi}^2) m]^{-1}. \quad (17)$$

Из величин, входящих в формулу (13), составим функцию

$$\psi(r, \varphi, t, \hbar) = \sqrt{\frac{R^2(t, \varphi) + (R_{,\varphi}(t, \varphi))^2}{R^4(t, \varphi) g^2 m}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \Omega\right], \quad \Omega = S + i\sigma, \quad (18)$$

где

$$S = S^0(\varphi, t) + P(\varphi, t) \Delta r + \frac{1}{2} Q(\varphi, t) \Delta r^2 + \hbar S^1(\varphi, t),$$

а σ имеет вид (5).

Прямая проверка показывает, что совокупность условий (9), (12), (14), (15), (16), (17) равносильна тому, что функция (18) удовлетворяет линейному уравнению Шредингера

$$\left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{H} \right] \psi(r, \varphi, t, \hbar) = 0, \quad (19)$$

где $\mathcal{H}$ имеет вид (8). Уравнение (19) назовем *линейным ассоциированным уравнением Шредингера* для нелинейного уравнения (1). Принимая во внимание единственность решения задачи Коши для линейного уравнения (19), нетрудно видеть, что можно строить асимптотические решения (главный член асимптотики) нелинейного уравнения (7) в классе функций (13).

Модель ловушки

Рассмотрим модель ловушки в виде гармонического осциллятора, локализованного в окрестности окружности радиуса $r = r_0$, т. е. $U(r, \varphi, t) = k(r - r_0)^2 / 2$. В этом случае, в соответствии с (13), главный член асимптотического решения для уравнения (7) имеет вид

$$\Psi(r, \varphi, t, \hbar) = \frac{1}{gR(t)} \sqrt{\frac{1}{m}} \frac{1}{\cosh(\theta)} \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(S^0(t) + P(t) \Delta r + \frac{1}{2} Q(t) \Delta r^2 + \hbar S^1(t) \right) \right\}, \quad (20)$$

где $\theta = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\Delta r}{R(t)} + \hbar \sigma^1(t) \right)$, а определяющие уравнения (9), (12), (14), (15), (16), (17) задаются выражениями

$$P_{,t} = -U_1, \quad R_{,t} = \frac{P}{m}, \quad Q = \frac{P}{R}, \quad (21)$$

$$S_{,t}^0 = \frac{P^2}{2m} - U_0 + \frac{1}{2mR^2}, \quad S_{,t}^1 = -\frac{1}{2mR^2}, \quad \sigma_{,t}^1 = 0. \quad (22)$$

Решение системы (21), (22) при $k > 0$ и начальном условии $R(0) = r_0$ можно записать как

$$R(t) = r_0 + \frac{P_0 \sin(\Omega t)}{m\Omega}, \quad P(t) = P_0 \cos(\Omega t), \quad (23)$$

$$S^0 = \frac{P_0^2}{4m\Omega} \sin(2\Omega t) - S^1, \quad Q = P_0 \cos(\Omega t) \left(r_0 + P_0 \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega m} \right)^{-1}, \quad (24)$$

$$S^1 = -\frac{m\Omega}{2P_0^2} \left(\frac{2a}{(a^2 - 1)^{(3/2)}} \arctan \left(\frac{a \tan(\Omega t / 2) + 1}{\sqrt{a^2 - 1}} \right) + \frac{1}{a(a^2 - 1)} \left(1 + \frac{a \cos(\Omega t)}{a + \sin(\Omega t)} \right) \right). \quad (25)$$

Здесь обозначено $\Omega = \sqrt{k/m}$, $P_0 = \text{const}$, $a = m\Omega r_0 / P_0 > 1$. Постоянная интегрирования σ^1 уравнения (22) может быть выбрана равной нулю. Решение системы (21), (22) при $k < 0$ и начальном условии $R(0) = r_0$ получается из (23), (24), (25) заменой $\Omega \leftrightarrow i\Omega$ и $a \leftrightarrow ia$.

На рис. 1 и 2 показано поведение функции $|\Psi(r, t)|^2$ в зависимости от внешнего поля и параметра P_0 при $\hbar = 0,1$, $m = 1$, $g = 1$, $r_0 = 10\sqrt{2}$. В данном случае конденсат Бозе–Эйнштейна в поле магнитооптической ловушки с потенциалом квадратичным по переменной $r - r_0$ сохраняет во времени свойство локализации в окрестности окружности радиуса $R(t)$ вида (20), поскольку $R(t) \neq 0$ при любом t .

Рис. 1. a — $P_0 = 2$; b — $P_0 = -2$. Значения параметров: $k = 1$, $a = 10/\sqrt{2} > 1$, $t = 2T = 4\pi$

Рис. 2. Значения параметров: $P_0 = 2$, $k = 1$, $a = 10/\sqrt{2} > 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = T = 2\pi$, $t_1 = 2T = 4\pi$

На рис. 3 и 4 показано поведение функции $|\Psi(r,t)|^2$ с параметрами $\hbar = 0,1$, $m = 1$, $g = 1$, $r_0 = 10\sqrt{2}$, $k < 0$. Значение $k < 0$ соответствует отталкивающему потенциалу внешнего поля.

Рис. 3. а — $P_0 = 2$; б — $P_0 = -2$. Значения параметров: $k = -1$, $a = 5\sqrt{2}$, $t = T/2 = \pi$

Рис. 4. Значения параметров для верхних рисунков: $P_0 = 2$, $k = -1$, a — любое, $t_1 = 0$, $t_2 = T/4 = \pi/2$, $t_1 = T/2 = \pi$. Значения параметров для нижних рисунков: $P_0 = -2$, $k = -1$, $a = 5\sqrt{2}$, $t_1 = 0$, $t_2 = T/4 = \pi/2$, $t_1 = 3T/8 = 3\pi/4$

Плотность атомов БЭК [3] $n(\vec{r}, t) \approx n_0(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$, а поле скоростей $\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \arg(\Psi(\vec{r}, t))$. Для асимптотического решения

$$n_0(\vec{r}, t) = |\Psi(r, \varphi, t, \hbar)|^2 = \frac{1}{mg^2 R^2(t)} \cosh^{-2} \left(\frac{r - R(t)}{\hbar R(t)} \right), \quad (26)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{1}{m} (P(t) + Q(t) \Delta r) \vec{e}_r. \quad (27)$$

Заключение

Таким образом, при $|a| = |m\Omega r_0 / P_0| \leq 1$, $R(t)$ обращается в ноль при $t = T$, что можно трактовать как коллапс волновой функции БЭК, который наблюдается в экспериментах в виде неустойчивости конденсата с большим количеством частиц. Например, в работе [9] сделаны теоретические оценки максимального числа частиц в конденсате (в эксперименте $N_c \approx 1400$), но согласно (26), (27) при $|a| = |m\Omega r_0 / P_0| \gg 1$ этого ограничения нет. На основе полученных результатов можно сделать вывод, что в магнитооптической ловушке, моделируемой потенциалом, описанным выше, можно создать долгоживущий конденсат с большим числом атомов, изменив конфигурацию и параметры ловушки.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке АВЦП ФАО Министерства образования и науки РФ № 2.1.1/3436; гранта Президента РФ № НШ-871.2008.2.

Список литературы

1. Белов В. В., Доброхотов С. Ю. Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. Общий подход // Теор. мат. физика. 1988. Т. 92. С. 215–254.
2. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях, 284 (ред.). М.: Наука, 1977.
3. Питаевский Л. П. Конденсация Бозе–Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию // УФН. 1998. Т. 168. С. 641–653.
4. Вахитов Н. Г., Колоколов А. А. Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщением нелинейности // Изв. вузов Радиофизика. 1973. Т. 16. С. 1020–1029.
5. Розанов Н. Н., Рождественский Ю. В., Смирнов В. А., Федоров С. В. Атомные «иглы» и «пули» конденсата Бозе–Эйнштейна и формирование наноразмерных структур // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77. С. 89–92.
6. Власов С. Н., Таланов В. И. Самофокусировка волн, 220 (ред.). Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997.
7. Bradley C., Sackett C., Tollett J., Hulet R. // Phys. Rev. Lett. 1995–1997. Vol. 75; 78. P. 1687; 985.
8. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulse in dispersive dielectric fibres // Appl. Phys. Lett. 1973. Vol. 23. Pp. 171–172.
9. Kim Y., Zubarev A. Stability of the solution of the nonlinear Schrödinger equation for Bose–Einstein condensation // Phys. Lett. 1998. Vol. A246. P. 389–393.
10. Mollenauer L., Stolen R., Gordon J. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibres // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 1095–1098.
11. Strecker K., Partridge G., Truscott A., Hulet R. // Nature. 2002. Vol. 417. P. 150.