**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2009 Т. 1 № 4 С. 355–358**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Причины нелинейности: глобальность и некоммутативность

Г. Н. Яковенко[1,a]

[1] Московский физико-технический институт (государственный университет),
141700, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский переулок, д. 9

E-mail: [a] yakovenko_g@mtu-net.ru

*Получено 5 апреля 2009 г.,
после доработки 25 июня 2009 г.*

Динамический процесс моделируется обыкновенными дифференциальными уравнениями. Если у неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в некоторой области существует общее решение, то неавтономной заменой переменных система максимально упрощается: правые части — нули. У автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности неособой точки правая часть выпрямляется. Рассмотрен случай сепарабельной системы: в правой части линейная комбинация автономных векторных полей, коэффициенты — функции независимой переменной. Если поля коммутируют, то они общей заменой переменных выпрямляются.

Ключевые слова: нелинейность, неавтономные системы, динамические процессы

Reasons for nonlinearity: globality and noncommutativity

G. N. Yakovenko[1]

[1] *Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii pereulok 9, 141700, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

Abstract. — A dynamic process modeled by ordinary differential equations is considered. If a nonautonomous system of ordinary differential equations has a general solution in a certain area, than the system can be simplified by nonautonomous substitution of variables: right parts turn to zeroes. Right parts of an autonomous system of ordinary differential equations in the neighborhood of nonsingular points can be linearized. A separable system where the right part contains linear combination of autonomous vector fields and factors are functions of independent variable is considered. If the fields commute than they can be linearized by general substitution of variables.

Key words: nonlinearity, nonautonomous systems, dynamic processes

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 355–358 (Russian).

У исследователя, поставившего перед собой цель создать математическую модель реального процесса, имеется выбор не только языковой среды (дифференциальные, интегральные, дискретные, логические, теоретико-групповые соотношения), но и выбор переменных, описывающих с одинаковой степенью адекватности функционирование процесса (декартовы или сферические координаты, вольты, ватты, амперы, количество особей в популяции, количество особей в логарифмическом масштабе и т. д.). Переходом к другим переменным можно нелинейную модель превратить в линейную и наоборот. На примере системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде

$$\dot{x} = \varphi(t, x), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

показывается, что в коммутативном случае (порождаемые процессом преобразования перестановочны) локально за счет выбора переменных математическую модель можно сделать линейной.

Если реальному процессу при конкретном выборе переменных поставлена в соответствие модель (1), то за счет перехода к другим переменным без искажения адекватности появляются другие модели — класс эквивалентности, порожденный (1). Естественно поставить вопрос о выборе в классе простейшего представителя. Рассмотрим несколько видов уравнений (1) и несколько способов перехода к другим переменным.

а) Система (1) неавтономна (правая часть содержит независимую переменную t). Взаимно однозначный переход $x \leftrightarrow y$ к другим переменным также допускается неавтономным: $y = f(t, x)$.

Теорема 1. *Пусть в некоторой области $M \subset R^{n+1}(t, x)$ определено общее решение $x = f(t, t_0, x_0)$ системы (1). Тогда в этой области система (1) имеет n функционально независимых первых интегралов $y = f(t_0, t, x) = x_0 = c$.*

Доказательство приведено, например, в [1, 2]. Определение первого интеграла влечет следствие.

Следствие 1. *Пусть в некоторой области $M \subset R^{n+1}(t, x)$ определено общее решение $x = f(t, t_0, x_0)$ системы (1). Тогда в этой области неособенным переходом $y = f(t_0, t, x)$ к другим переменным системе (1) можно придать вид $\dot{y} = 0$.*

Так как неособенный переход от одних переменных к другим создает отношение эквивалентности между исходной системой (1) и результатом преобразования, то справедливо следствие.

Следствие 2. *Пусть в некоторой области $M \subset R^{n+1}(t, x)$ определены общие решения двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений совпадающей размерности. Тогда в этой области неособенной заменой переменных можно осуществить переход от одной системы к другой.*

Из приведенных результатов следует, что в условиях пункта а) выбором переменных математическую модель реального процесса можно сделать не только линейной, но и упростить до «дальше некуда». Существенно, что все результаты локальны: справедливы в некоторой области $M \subset R^{n+1}(t, x)$.

б) Система (1) автономна (правая часть $\varphi(x)$ не содержит независимую переменную t). Взаимно однозначный переход $x \leftrightarrow y$ к другим переменным также допускается только автономным: $y = f(x)$. В этом случае известен следующий результат (доказательство, например, в [3]).

Теорема 2 (о выпрямлении векторного поля). *Пусть для автономной системы (1) выполняется $\varphi_1(a) \neq 0$ ($\varphi_1(x)$ — правая часть первого уравнения). Тогда найдется область $M \subset R^n(x)$, содержащая точку a, и такая неособенная замена переменных $y = f(x)$, что в области M система примет вид: $\dot{y}_1 = 1$, $\dot{y}_i = 0$, $i = \overline{2, n}$.*

Очевидно следствие.

Следствие. *У автономной системы (1) в окрестности неособой точки полный набор функционально независимых первых интегралов представим в виде:* $y_1 - t = f_1(x) - t = c_1$, $y_i = f_i(x) = c_i$, $i = \overline{2,n}$.

Из сформулированных результатов следует, что в окрестности неособой точки (локально!) выбором переменных автономной системе можно придать более чем линейный вид: $\dot{y}_1 = 1$, $\dot{y}_i = 0$, $i = \overline{2,n}$.

в) Рассмотрим промежуточный между пунктами а) и б) случай. Система (1) имеет вид

$$\dot{x} = \varphi(x)u(t), \quad x \in R^n, \tag{2}$$

$u(t)$ — скалярная функция. Допускается только автономный ($y = f(x)$) взаимно однозначный переход $x \leftrightarrow y$ к другим переменным. Из теоремы 2 вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Пусть для системы (2) выполняется* $\varphi_1(a) \neq 0$. *Тогда найдется область* $M \subset R^n(x)$, *содержащая точку* a, *и такая неособенная замена переменных* $y = f(x)$, *что в области* $M \subset R^n(x)$ *система примет вид:* $\dot{y}_1 = u(t)$, $\dot{y}_i = 0$, $i = \overline{2,n}$.

Появление в (2) множителя — достаточно произвольной функции $u(t)$ *— обусловлено двумя причинами: во-первых, невозможность определения в реальном процессе точного и повторяющегося при экспериментах значения параметров, во-вторых, дрейф параметров из-за открытости системы — влияние погодных, климатических, антропогенных и других воздействий. Теорема 3 дает возможность при любой функции* $u(t)$ *автономной заменой переменных* $y = f(x)$ *упростить систему (2) (локально!).*

г) Система (1) имеет вид

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)u_i(t), \quad x \in R^n, \tag{3}$$

$u_i(t)$ — скалярные функции. Допускается только автономный ($y = f(x)$) взаимно однозначный переход $x \leftrightarrow y$ к другим переменным. В этой ситуации даже локально гарантировано, как в предыдущих пунктах, выбором переменных систему упростить нельзя. Приведем без доказательства несколько результатов, касающихся упрощения системы (3) [4]. В системе (3) участвует несколько подсистем $\dot{x} = \varphi_i(x)$. Каждая из них порождает однопараметрическую группу сдвигов пространства R^n вдоль решений подсистемы. Преобразования группы коммутируют (перестановочны), поэтому уравнения каждой подсистемы (отдельно взятой) переходом к другим переменным можно упростить (см. б) и в)).

Теорема 4. *Системе (3) преобразованием* $y = f(x)$ *можно придать вид* $\dot{y}_i = u_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, $\dot{y}_k = 0$, $k = \overline{m+1,n}$, *в том и только в том случае, если преобразования, порождаемые разными подсистемами* $\dot{x} = \varphi_i(x)$, *коммутируют (принадлежат абелевой группе).*

Теорема 5. *Системе (3) преобразованием* $y = f(x)$ *можно придать линейный по переменным* y *вид в том и только в том случае, если преобразования, порождаемые разными подсистемами* $\dot{x} = \varphi_i(x)$, *принадлежат группе, у которой есть абелев нормальный делитель размерности* $n-1$.

В прочих случаях нелинейное вхождение переменных x в правую часть (3) автономным переходом к другим переменным неустранимо, и требуется индивидуальный анализ отдельно взятой системы или класса систем (см., например, [5, 6]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00217) и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)».

Список литературы

1. *Егоров А. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 384 с.
2. *Яковенко Г. Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ // Дифференциальные уравнения и процессы управления. [Электронный ресурс]. 2002. № 3. С. 40–83. Режим доступа: http://www.neva.ru/journal.
3. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. 344 с.
4. *Яковенко Г. Н.* Теоретико-групповое моделирование систем типа «вход–выход» // Математические модели и методы их исследования: Тр. Междунар. конф. / Под ред. В. К. Андреева и Ю. В. Шанько. Т. 2; Институт математического моделирования СО РАН. Красноярск, 2001. С. 302–307.
5. *Яковенко Г. Н.* Декомпозиция нелинейных управляемых систем с группой симметрии // Механика гироскопических систем. Киев: Вища школа, 1986. Вып. 5. С. 131–137.
6. *Яковенко Г. Н.* Теория управления регулярными системами М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 264 с.