

Исследование пульсирующих режимов распространения волн в модели горения с цепным механизмом реакции

В. В. Губернов^{1,a}, А. В. Колобов¹, А. А. Полежаев¹

¹ Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН,
119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53

E-mail: ^a gubernov@lpi.ru

Получено 17 апреля 2009 г.

Исследуется модель распространения волн горения с двухступенчатым цепным механизмом реакции в адиабатическом одномерном случае. Показано, что пульсирующие неустойчивости возникают при числах Льюиса для топлива больше единицы в результате бифуркации Хопфа, приводящей к мягкому возбуждению осциллирующих решений. Установлено, что увеличение параметра за критичности приводит к появлению каскада Фейгенбаума бифуркаций удвоения периода и хаотическому режиму распространения волн горения. Дальнейшее увеличение параметра за критичности приводит к затуханию решения.

Ключевые слова: цепные реакции, распространение волн

Pulsating regimes of flames propagation in a model with chain-branching reaction

V. V. Gubernov¹, A. V. Kolobov¹, A. A. Polezhaev¹

¹ Lebedev Physical Institute, Leninskiy av. 53, Moscow, GSP-1, 119991, Russia

Abstract. — In this paper we investigate propagation of planar combustion waves in an adiabatic model with two-step chain branching reaction mechanism. Pulsating instabilities are found to emerge for fuel Lewis number greater than one due to a Hopf bifurcation. The Hopf bifurcation is demonstrated to be of a supercritical nature and it gives rise to periodic pulsating combustion waves as the neutral stability boundary is crossed. Further increase of the bifurcation parameter initiates period doubling bifurcation cascade and leads to chaotic regime of combustion wave propagation. The chaotic wave extinguishes when the bifurcation parameter becomes sufficiently large.

Key words: chain-branching reaction, wave propagation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 273–280 (Russian).

Введение

Пульсирующие режимы распространения плоских волн горения в перемешанных воспламеняющихся смесях наблюдались в экспериментах с твердым топливом, начиная с 1950 года, и часто встречаются в экспериментах по самораспространяющемуся высокотемпературному синтезу [11]. В экспериментах с газовыми смесями пульсации плоских волн горения и удвоение периода осцилляций встречаются редко [12].

Объяснение наблюдаемых пульсаций скорости и формы бегущих волн горения и бифуркаций удвоения периода было найдено в рамках одноступенчатых термо-диффузионных моделей распространения пламени. Сначала это было сделано с помощью численных расчетов для моделей горения твердого топлива [1], а затем аналитически с помощью методов асимптотического анализа в случае твердого [8] и газообразного топлива [7, 9]. Асимптотический анализ позволил выявить общие свойства и закономерности возникновения пульсирующих неустойчивостей в результате бифуркации Хопфа. Численный анализ с помощью метода функции Эванса [4, 5] также позволил установить, что множество критических значений для бифуркации Хопфа ограничено в пространстве параметров бифуркацией Богданова–Тakensа коразмерности два, которая, таким образом, ответственна за появление пульсирующих волн горения.

Кроме того, исследования пульсирующих режимов распространения пламени проводились с помощью численного решения уравнений в частных производных [2, 10, 13]. В данных работах было установлено, что в моделях с одноступенчатой кинетикой возможно появление решений периода 2, 4 и 8. На основании этого было выдвинуто предположение о возможности появления хаотического режима распространения пламени в результате последовательности бифуркаций удвоения периода. В работе [10] было также показано, что увеличение параметра за критичности может приводить к затуханию распространения пламени.

В данной работе мы исследуем, какие сценарии потери устойчивости автоволнового решения и появления пульсирующих волн горения реализуются в модели с двухступенчатым цепным механизмом реакции [3].

Модель

Мы рассматриваем адиабатическую модель распространения волн горения в перемешанном топливе с кинетическим механизмом, включающим реакцию разветвления $A+B \rightarrow 2B$ и рекомбинации $B+M \rightarrow C+M$, где A — топливо, B — радикалы, C — продукты, а M — инертная компонента смеси. Предполагается, что вся теплота реакции выделяется в ходе стадии рекомбинации, а разветвление не приводит к выделению или поглощению тепла. Следуя [3], запишем уравнения для безразмерной температуры u , концентрации топлива v и радикалов w в виде

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + rw, \\ v_t &= L_A^{-1} v_{xx} - \beta v w e^{-1/u}, \\ w_t &= L_B^{-1} w_{xx} + \beta v w e^{-1/u} - r \beta w, \end{aligned} \quad (1)$$

где x и t — это безразмерные координата и время соответственно; L_A и L_B — числа Льюиса для топлива и радикалов соответственно; β — безразмерная энергия активации стадии разветвления; r — отношение характерного времени для реакций разветвления и рекомбинации.

Система (1) рассматриваются, в одномерном случае, совместно с граничными условиями:

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = 1, \quad w = 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \\ u_x &= 0, \quad v_x = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

На правой границе для простоты температура берется равной нулю, $u = 0$, концентрация топлива достигает максимального значения, $v = 1$, а радикалы еще не производятся, $w = 0$. На левой

границе ($x \rightarrow -\infty$) мы требуем, чтобы реакция остановилась, поэтому температура и концентрация топлива не меняются, а $w = 0$.

Свойства автоволновых решений

Решение системы (1) с граничными условиями (2) ищутся в виде волны, бегущей с постоянной скоростью c : $u(x,t) = u(\xi)$, $v(x,t) = v(\xi)$ и $w(x,t) = w(\xi)$, где $\xi = x - ct$ — это координата в бегущей системе отсчета. Подставляя данные выражения в (1), получим

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} + cu_{\xi} + rw &= 0, \\ L_A^{-1}v_{\xi\xi} + cv_{\xi} - \beta vwe^{-1/u} &= 0, \\ L_B^{-1}w_{\xi\xi} + cw_{\xi} + \beta vwe^{-1/u} - r\beta w &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Свойства решений в виде бегущей волны уравнений (3) исследуются численными методами стрельбы и релаксации. Здесь и далее мы не описываем детально численные алгоритмы. Более подробную информацию можно найти в [4].

Установлено, что число Льюиса для топлива качественно влияет на свойства автоволновых решений, в то время как число Льюиса для радикалов изменяет поведение волн горения только количественно. В случае $L_A < 1$ зависимость скорости волны от энергии активации, $c(\beta)$, является монотонно убывающей функцией. Волна горения затухает при конечном значении β , при котором скорость волны обращается в нуль. На рис. 1 зависимость $c(\beta)$ построена для $L_A = 0,1$ и $L_B = 1$ и 10. Зависимость скорости от β имеет один и тот же качественный характер для различных L_B , хотя количественно скорость варьируется при изменении L_B .

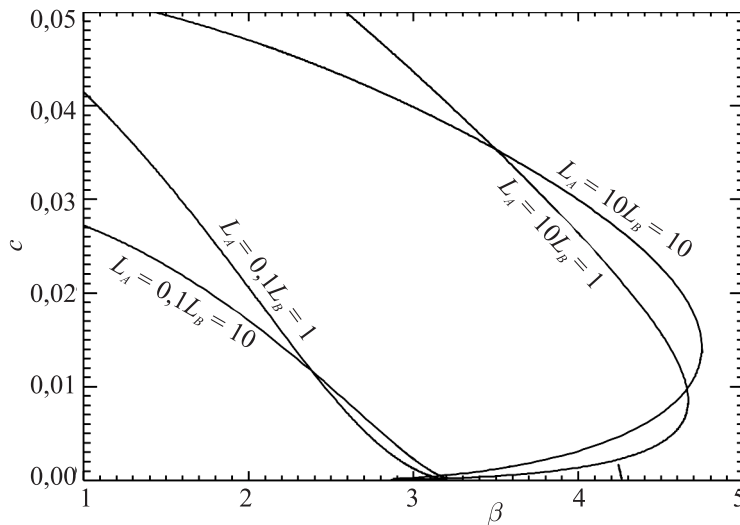


Рис. 1. Зависимость скорости волны горения от безразмерной энергии активации, β , для $r = 0,001$, $L_A = 0,1$, 10 и различных значений числа Льюиса для радикалов, $L_B = 1$ и 10. Сплошная линия представляет устойчивые решения, а пунктирная — неустойчивые решения

Устойчивость автоволновых решений

Линейная устойчивость бегущих волн горения исследуется с помощью метода функции Эванса. Детальное описание данной методики можно найти в [4]. Для этого решения (1) представляются в виде $u(\xi,t) = U(\xi) + \varepsilon\varphi(\xi)\exp(\lambda t)$, $v(\xi,t) = V(\xi) + \varepsilon\psi(\xi)\exp(\lambda t)$ и $w(\xi,t) = W(\xi) + \varepsilon\chi(\xi)\exp(\lambda t)$, где $[U(\xi), V(\xi), W(\xi)]$ представляет решение в виде бегущей волны, а члены, пропорциональные

малому параметру ε , соответствуют линейному возмущению. Подставляя решения в таком виде в систему уравнений (1) и отбрасывая все члены более высокого порядка малости чем ε , получаем задачу на собственные значения вида

$$\begin{aligned} \partial^2 \phi / \partial \xi^2 + c \partial \phi / \partial \xi - r \chi &= \lambda \phi, \\ L_A^{-1} \partial^2 \phi / \partial \xi^2 + c \partial \phi / \partial \xi + \beta e^{-1/U} (VWU^{-2} \phi + W\psi + V\chi) &= \lambda \psi, \\ L_B^{-1} \partial^2 \chi / \partial \xi^2 + c \partial \chi / \partial \xi - \beta e^{-1/U} (VWU^{-2} \phi + W\psi + V\chi) + r \beta \chi &= \lambda \chi, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\phi, \psi, \chi \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow 0$. Таким образом, устойчивость решений в виде бегущих волн определяется спектром линейного дифференциального оператора, стоящего в левой части системы (4). Аналогично [4] можно показать, что непрерывный спектр данного оператора удовлетворяет требованию $\text{Re} \lambda \leq 0$ и, следовательно, не связан с потерей устойчивости автоволнового решения. Дискретный спектр может быть найден с помощью метода функции Эванса [4]. Проведенные таким образом расчеты показали, что в случае $L_A < 1$ независимо от L_B все точки дискретного спектра находятся в левой полуплоскости, т. е. $\text{Re} \lambda \leq 0$ и, следовательно, решения в виде бегущих волн устойчивы. В случае $L_A > 1$ бегущие волны горения, соответствующие медленной ветви решений, неустойчивы. Решения, соответствующие быстрой ветви, устойчивы для малых и умеренных значений β . Они теряют устойчивость в результате бифуркации Хопфа при значениях β , приближающихся к точке перегиба кривой $c(\beta)$. При этом пара комплексно-сопряженных точек дискретного спектра оператора (4) пересекает комплексную ось при ненулевых значениях мнимой части λ , переходя из левой в правую полуплоскость и рождая пульсирующие неустойчивости.

Результаты наших расчетов для случая $L_A > 1$ представлены на диаграмме 3, где критические значения параметров для бифуркации Хопфа построены на плоскости $(\beta, \lg L_A)$ с помощью пунктирной линии, обозначенной «Hopf». Критические значения параметров, соответствующие точке перегиба кривой $c(\beta)$, также обозначены на рис. 3 с помощью длинной пунктирной линии, обозначенной «extinction». Правее этой кривой автоволновые решения не существуют, а левее ее существуют две ветки решений: быстрая и медленная. Медленная ветка всегда неустойчива, а быстрая ветка устойчива для значений параметров левее кривой, обозначенной «Hopf» и теряет устойчивость для значений параметров правее этой кривой. Таким образом кривая «Hopf» является нейтральной границей устойчивости для автоволновых решений.

Критические значения параметров для бифуркации Хопфа и перегиба пересекаются в точке, соответствующей бифуркации коразмерности два — бифуркации Богданова–Тakensа, расположенной при $L_A = 1$. Эта точка в пространстве параметров, из которой рождается нейтральная граница устойчивости, ответственна за появление пульсирующих неустойчивостей. Расчеты показали, что варьирование параметра L_B не приводит к качественному изменению данной картины.

Пульсирующие решения и удвоение периода

Пульсирующие волны горения, возникающие в результате бифуркации Хопфа при пересечении нейтральной границы устойчивости в пространстве параметров, исследуются численно. Система (1) решается на достаточно большом интервале координаты для того, чтобы граничные условия (2) удовлетворялись с хорошей точностью. Для решения системы (1) был использован метод расщепления по физическим процессам. Вначале решалась система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы изменения температуры, концентрации топлива и радикалов, за счет реакций разветвления и рекомбинации. Для этого использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка. На втором этапе решались уравнения переноса. В этом случае использовалась безусловно устойчивая схема Кранка–Николсона, обладающая вторым порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству.

При пересечении нейтральной границы устойчивости формируются пульсирующие волны горения. Данный тип волновых решений в среднем распространяется с определенной скоростью c_{drift} , поэтому удобно воспользоваться системой отсчета $\zeta = x - c_{drift}t$, бегущей вместе с волной. В этом

случае $u(\zeta, t)$, $v(\zeta, t)$ и $w(\zeta, t)$ становятся периодическими функциями времени. Пример пульсирующей волны горения приведен на рис. 2 для значений параметров за нейтральной границей устойчивости. На рисунках *a*, *b* и *c* построены профили $u(\zeta, t)$, $v(\zeta, t)$ и $w(\zeta, t)$ соответственно. Профили взяты в различные моменты времени $t = 0, 8\ 750, 17\ 500$, отмеченные на рисунке цифрами 1, 2 и 3. Период осцилляций составляет $T \approx 30\ 500$. За время одного периода расположение мгновенных распределений $u(\zeta)$, $v(\zeta)$ и $w(\zeta)$ осуществляет осцилляции около среднего значения координаты $\zeta = 0$. Распределение концентрации радикалов все время остается колоколообразной функцией координаты ζ с единственным локальным максимумом w_{max} , достигаемым при $\zeta = \zeta_{max}$. Как w_{max} , так и ζ_{max} являются периодическими функциями времени. На рис. 3*d* построена зависимость w_{max} от ζ_{max} и видно, что на плоскости (ζ_{max}, w_{max}) формируется предельный цикл.

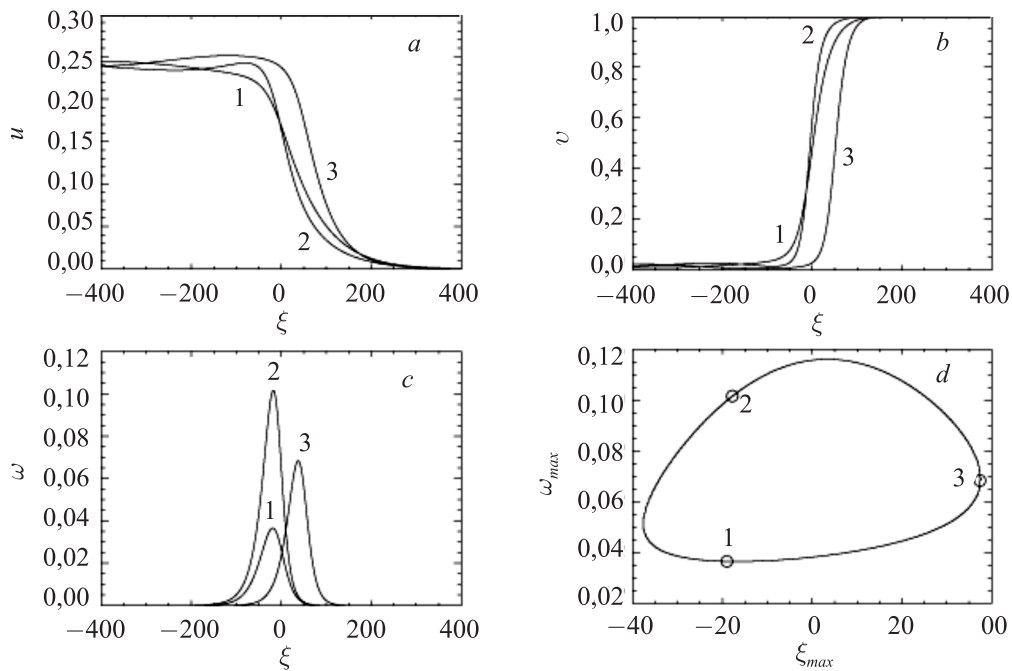


Рис. 2. Пульсирующие волны горения для $L_A = 3, L_B = 1, \beta = 4,08$ и $r = 0,001$. На рисунках *a*, *b* и *c* построены профили $u(\zeta, t)$, $v(\zeta, t)$ и $w(\zeta, t)$ соответственно, взятые в различные моменты времени. На рисунке *d* изображена зависимость w_{max} от ζ_{max}

Увеличение параметра за критичности β от его граничного значения, соответствующего бифуркации Хопфа, приводит к деформации предельного цикла к треугольной форме, что сопровождается увеличением амплитуд высоких гармоник в Фурье-спектре $\zeta_{max}(t)$ и $w_{max}(t)$. Дальнейшее увеличение β приводит при $\beta = \beta_1$ к первой бифуркации удвоения периода и образованию решений периода $2T$. При этом в Фурье-спектре динамических переменных $\zeta_{max}(t)$ и $w_{max}(t)$ появляются частоты кратные $0,5\omega$ ($\omega = 2\pi/T$), а предельный цикл на плоскости (ζ_{max}, w_{max}) разваливается на две петли. Аналогично наши расчеты показали, что дальнейшее увеличение параметра за критичности приводит при $\beta = \beta_2$ ко второй и при $\beta = \beta_3$ к третьей бифуркациям удвоения периода, сопровождаемым рождением пульсирующих решений периода $4T$ и $8T$. Решения периода $4T$ и $8T$ содержат в Фурье-спектре динамических переменных частоты кратные $0,25\omega$ и $0,125\omega$ соответственно.

При увеличении энергии активации выше некоторого порогового значения β_∞ динамика осцилляций становится хаотической. При этом Фурье-спектр динамических переменных, например, $w_{max}(t)$, становится непрерывным. Мы также провели измерения показателя Ляпунова для данной системы и показали, что он положителен при параметрах за критичности выше β_∞ . Более детальное изложение этих результатов будет опубликовано позднее.

Результаты численного анализа устойчивости автоволновых решений и бифуркаций удвоения периода представлены на рис. 3. Короткая и длинная пунктирные линии, обозначенные сим-

волами «Hopf» и «extinction», представляют критические значения параметров для бифуркаций Хопфа и перегиба соответственно. Физический смысл этих кривых объяснен выше. Кресты, соединенные сплошной линией, показывают значения параметров, при которых происходят бифуркации удвоения периода и были получены численным интегрированием системы (1) при $L_A = 1,5, 2, 3, 10$. Сплошные линии являются интерполяцией численных данных. Воспользовавшись значениями параметров, при которых происходят последовательные бифуркации удвоения периода, β_i , мы оценили границу хаотического режима осцилляций β_∞ с помощью критерия универсальности Фейгенбаума. Полученные таким образом значения были проверены прямыми численными вычислениями и также представлены на рис. 3 крестами, соединенными сплошной линией.

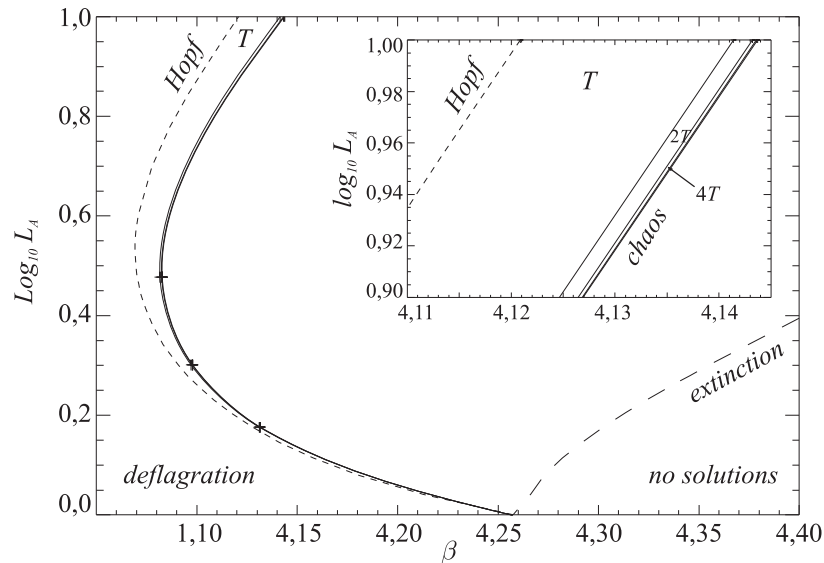


Рис. 3. Диаграмма устойчивости и бифуркаций удвоения периода на плоскости $(\beta, \lg L_A)$ при $L_B = 1$ и $r = 0,001$

Как видно на рис. 3, области параметров, соответствующие пульсирующим решениям с различными периодами, представляют собой узкие полоски, расположенные вдоль нейтральной границы устойчивости. Наиболее широкой областью является множество параметров с решениями периода T , которое обозначено на рисунке символом «T». Область параметров, соответствующая решениям периода $2T$, едва различима на крупном графике. Критические значения параметров $\beta_1(L_A)$, $\beta_2(L_A)$ и $\beta_3(L_A)$ для бифуркаций решений периода $2T$, $4T$ и $8T$ расположены настолько близко друг к другу, что для их корректного представления на рис. 3 построен график, увеличивающий область параметров около точки $L_A = 10$ и $\beta = 4,125$. Расстояние между соседними бифуркациями удвоения периода $\beta_{i+1} - \beta_i$ убывает в соответствии с универсальным каскадом Фейгенбаума. Оценка константы Фейгенбаума была произведена на основе полученных численных данных и составила $\delta = 4,7 \pm 0,1$. Разность $\beta_{i+1} - \beta_i$ является монотонной функцией L_A : при больших числах Льюиса для топлива ширина областей, где существуют решения с различными периодами, увеличивается, а при L_A , стремящемся к единице, — $\beta_{i+1} - \beta_i \rightarrow 0$.

Мы также исследовали среднюю скорость распространения волн, осциллирующих с различными периодами, и установили, что для любой ветки пульсирующих решений c_{drift} является монотонно убывающей функцией энергии активации. При этом пульсирующие волны в среднем распространяются со скоростью меньшей, чем скорость неустойчивого автоволнового решения. Так, для параметров, соответствующих хаотическим осцилляциям волны горения $L_A = 3$, $L_B = 1$, $\beta = 4,0829$ и $r = 0,001$, средняя скорость пульсирующей волны составляет $c = 0,0159$, в то время как скорость автоволнового решения составляет $0,0173$. Подобное изменение скорости волны происходит на фоне очень малой вариации энергии активации.

Исследование свойств хаотического режима распространения волн горения показало, что при дальнейшем увеличении параметра закритичности, $\beta > \beta_\infty$, происходит резкое изменение динами-

ки распространения пламени. При достижении некоторого порогового значения энергии активации изображающая точка на плоскости (ξ_{max}, w_{max}) описывает несколько петель вокруг области, где располагался странный аттрактор, и за конечное время порядка нескольких периодов уходит к точке покоя $w_{max} = 0$. В терминах решений системы (1) это соответствует тому, что система приходит к тривиальному решению $u(\xi, t) = 0$, $v(\xi, t) = 1$ и $w(\xi, t) = 0$, соответствующему затуханию. Подобный сценарий наблюдался для $0 < L_A < 10$. При всех значениях L_A затухание было обнаружено близко к границе хаоса β_∞ и ширина хаотической области вдоль направления β составила по порядку $\beta_\infty - \beta$. Детальное исследование явления затухания и его связь с хаосом будут установлены в ходе нашей дальнейшей работы.

Выводы

В данной работе мы исследовали свойства бегущих и пульсирующих волн горения в модели с цепным двухступенчатым механизмом реакции в адиабатическом приближении. Было установлено, что при числах Льюиса для топлива больших единицы решение в виде бегущей волны может терять устойчивость в результате бифуркации Хопфа. Критические значения для бифуркации Хопфа найдены в пространстве параметров и показано, что бифуркация Хопфа рождается в результате бифуркации Богданова–Тakens при $L_A = 1$, когда критические значения параметров для бифуркации Хопфа и перегиба пересекаются. При пересечении в пространстве параметров критических значений для бифуркации Хопфа рождаются пульсирующие волны горения. Установлено, что бифуркация Хопфа носит закритический характер. Пульсирующие волны распространяются с определенной средней скоростью и в системе отсчета, бегущей с этой скоростью, температура, концентрация топлива и радикалов являются периодическими функциями времени с периодом T . Удобными динамическими переменными для описания динамики волн горения оказались максимальная концентрация радикалов, w_{max} , и координата, соответствующая данному максимуму. При этом на плоскости (ξ_{max}, w_{max}) пульсирующее решение периода T отображается предельным циклом.

Вблизи бифуркации Хопфа зависимость ξ_{max} и w_{max} от времени носит практически гармонический характер. Увеличение параметра закритичности приводит к тому, что в Фурье спектре w_{max} появляются более высокие гармоники основной частоты, предельный цикл начинает деформироваться и принимать треугольную форму. Дальнейшее увеличение β приводит к появлению решений периода $2T$, $4T$, $8T$ в результате последовательности бифуркаций удвоения периода. Расстояние между соседними бифуркациями $\beta_{i+1} - \beta_i$ убывает в соответствии с универсальностью Фейгенбаума с константой $\delta = 4,7 \pm 0,1$. На основе численных данных и предположения, что бифуркации удвоения периода следуют каскаду Фейгенбаума, была оценена граница появления хаоса β_∞ . В случае, если параметры системы берутся выше границы хаотического режима, численные расчеты показали, что динамика осцилляций волн горения становится хаотической.

Была исследована средняя скорость пульсирующих волн горения, при этом было показано, что в среднем пульсирующие волны горения распространяются медленнее, чем автоволновые решения. Зависимость скорости волны от энергии активации является монотонно убывающей функцией для каждой ветки решений с различными периодами осцилляций. Решения периода $2^i T$ возбуждаются мягким образом из решений периода $2^{i-1} T$, когда последние теряют устойчивость.

Ширина хаотической области по энергии активации ограничена явлением затухания пламени. Странный аттрактор формируется, когда β становится больше β_∞ . Однако при некотором значении энергии активации $\beta_e > \beta_\infty$ распространение хаотической волны горения прерывается затуханием, при котором бегущее решение переходит в тривиальное $u(\xi, t) = 0$, $v(\xi, t) = 1$ и $w(\xi, t) = 0$. При увеличении β выше β_∞ бассейн притяжения странного аттрактора изменяется и при некотором значении энергии активации β_e соединяется с бассейном притяжения тривиального решения. В этом случае динамика решений с начальными условиями, близкими к распространяющемуся решению, похожа на хаотические осцилляции волны, однако в какой-то момент времени решение попадает в бассейн притяжения тривиального решения и затухает. Подробное изучение эффекта затухания является предметом наших дальнейших исследований.

В пространстве параметров установлено расположение областей, соответствующих пульсирующим волнам с различным периодом. Показано, что на плоскости (β, L_A) они расположены вдоль кривой критических параметров для бифуркации Хопфа в виде тонких полос, расширяющихся с увеличением L_A и сужаются к точке бифуркации Богданова–Тakensа при $L_A \rightarrow 1$. Более формально это означает, что $\beta_{i+1} - \beta_i$ стремится к нулю при $L_A \rightarrow 1$ и монотонно возрастает при увеличении L_A . Этот вывод согласуется с тем, что в экспериментальных наблюдениях пульсирующие волны периода $1T$, $2T$ и $4T$ хорошо наблюдаются при $L_A \gg 1$, когда ширина областей параметров, соответствующих различным режимам осцилляций, относительно велика. В противоположность этому, при $L_A \sim 1$ даже решения периода T существуют в настолько узкой области параметров, что их экспериментальное наблюдение затруднительно.

Работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00131, 08-02-00806, 08-02-00682 и гранта Фонда поддержки отечественной науки «Молодые доктора и кандидаты наук».

Список литературы

1. *Aldushin A. P., Martemyanova A. G., Merzhanov A. G., Khaikin B. I. and Shkadinsky K. G.* Auto-vibrational propagation of the combustion front in heterogeneous condensed media // *Combustion. Explosion and Shock Waves*. 1973. Vol. 9. P. 531–542.
2. *Bayliss A., Matkowsky B. J.* Two routes to chaos in condensed phase combustion // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1990. Vol. 50. P. 437–459.
3. *Dold J. W.* Premixed flames modelled with thermally sensitive intermediate branching kinetics // *Combustion Theory Modeling*. 2007. Vol. 11. P. 909–948.
4. *Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N., Weber R. O.* Evans function stability of combustion waves // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2003. Vol. 63. P. 1259–1275.
5. *Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N., Weber R. O.* Evans function stability of nonadiabatic combustion waves // *Proceedings of the Royal Society of London A*. 2004. Vol. 460. P. 1259–1275.
6. *Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N.* Combustion waves in a model with chain branching reaction and their stability // *Combustion Theory Modeling*. 2008. Vol. 12. P. 407–431.
7. *Joulin G., Clavin P.* Linear stability analysis of nonadiabatic flames: diffusional thermal model // *Combustion and Flame*. 1979. Vol. 35. P. 139–153.
8. *Matkowsky B. J., Sivashinsky G. I.* Propagation of a pulsating reaction front in solid fuel combustion // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1978. Vol. 35. P. 465–478.
9. *Matkowsky B. J., Olagunju D. O.* Propagation of a pulsating flame front in a gaseous combustible mixture // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1980. Vol. 39. P. 290–300.
10. *Mercer G. N., Weber R. O., Sidhu H. S.* An oscillatory route to extinction for solid fuel combustion waves due to heat losses // *Proceedings of the Royal Society of London A*. 1998. Vol. 454. P. 2015–2022.
11. *Merzhanov A. G., Rumanov E. N.* Physics of reaction waves // *Reviews of Modern Physics*. 1999. Vol. 71. P. 1173–1211.
12. *Pearlman H. G. and Ronney P. D.* Near-limit behavior of high-Lewis number premixed flames in tubes at normal and low gravity, *Phys. Fluids*. 1994. Vol. 6. P. 4009–4018.
13. *Weber R. O., Mercer G. N., Sidhu H. S.* Combustion waves for gases ($Le = 1$) and solids ($Le \rightarrow \infty$) // *Proceedings of the Royal Society of London A*. 1997. Vol. 453. P. 1105–1118.