

Движение кинка под действием переменной внешней силы в среде с диссипацией

Л. А. Краснобаева^{1,2,a}, А. В. Шаповалов^{1,3}

¹ Томский государственный университет,
634050, г. Томск, проспект Ленина, д. 36

² Сибирский государственный медицинский университет,
634050, г. Томск, Московский тракт, д. 2

³ Томский политехнический университет,
634050, г. Томск, проспект Ленина, д. 30

E-mail: ^alarisa@phys.tsu.ru

Получено 17 июня 2009 г.

Исследованы аналитические зависимости от времени скорости кинка (односолитонного решения уравнения синус-Гордона), движущегося под действием однородной нестационарной внешней силы в среде с диссипацией. Рассмотрены случаи гармонически зависящей от времени внешней силы и силы, зависящей от времени ступенчатым образом.

Ключевые слова: кинк, уравнение синус-Гордона, переменная сила

Kink motion by ac external force and dissipation

L. A. Krasnobaeva^{1,2}, A. V. Shapovalov^{1,3}

¹ Tomsk State University, Lenin prospect 36, Tomsk, 634050, Russia

² Siberian State Medical University, Moscow Tract 2, Tomsk, 634050, Russia

³ Tomsk Polytechnic University, Lenin av. 30, 634050, Russia

Abstract. — We consider SG-kink motion under the ac external force and dissipation assuming that kink shape conserves, and the kink velocity is changing in time. External forces are harmonically dependent upon time and are considered as step functions.

Key words: kink, sinus-Gordon equation, an external force

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 263–271 (Russian).

Введение

Уравнение синус-Гордона с переменными коэффициентами, моделирующими внешние воздействия, используется при построении моделей распространения локальных конформационных возмущений в молекуле ДНК [1, 2], оптических ультракоротких импульсов [3], в физике конденсированного состояния [4] и в других задачах нелинейной физики [5, 6].

Запишем уравнение синус-Гордона с дополнительными слагаемыми

$$\phi_{tt} - \phi_{zz} + \sin \phi = -\beta \phi_t + F(t). \quad (1)$$

Здесь β — коэффициент диссипации; функция $F(t)$ описывает влияние внешнего нестационарного однородного поля на нелинейное возбуждение, описываемое величиной $\phi(z, t)$. Интерпретация величин $\phi(z, t)$ и $F(t)$ определяется характером физического явления, которое описывается уравнением (1). Например, в модели распространения возмущений в молекуле ДНК $\phi(z, t)$ — угол отклонения основания молекулы ДНК от положения равновесия, а $F(t)$ имеет смысл обобщенного момента внешних сил, действующих на основание [1, 2].

Функцию $F(t)$ будем называть внешней силой, величину которой естественно считать ограниченной во времени, т. е.

$$F_0 = \max_t |F(t)| < \infty. \quad (2)$$

При $\beta = F(t) = 0$ уравнение (1) имеет солитонные решения. Односолитонное решение (кинк) уравнения (1) дается выражением [7, 8]

$$\phi_{(k)}(z, t) = 4 \arctan \left\{ \exp \left[\frac{z - vt - z_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right\}. \quad (3)$$

Здесь v — скорость кинка, z_0 — его координата в начальный момент времени $t = 0$.

Под влиянием факторов внешней среды (в рассматриваемом случае диссипации $\beta \phi_t$ и внешней силы $F(t)$) в процессе распространения искажается форма кинка и изменяются его параметры.

В работах [9–13] численными методами изучалось влияние периодической внешней силы $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ на параметры кинка. В [14] получены аналитические зависимости скорости кинка от времени в рамках энергетического метода, предложенного Мак-Лафлином и Скоттом [15]. В данном методе динамика кинка описывается уравнением (1) в предположении, что форма кинка не изменяется под влиянием факторов внешней среды, а изменяются лишь его параметры, основным из которых является скорость кинка v .

В данной работе исследованы полученные в [14] аналитические зависимости. Приведем кратко вывод аналитических выражений зависимости скорости кинка от времени. Для этого запишем уравнение (1) при $\beta = F(t) = 0$ в гамильтоновой форме для (ϕ_t, ϕ) . Гамильтониан $H^{SG}(\phi)$ уравнения синус-Гордон представляет собой функционал [8]

$$H^{SG}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \phi_t^2 + \frac{1}{2} \phi_z^2 + (1 - \cos \phi) \right] dz. \quad (4)$$

Подставив (3) в (4), получим выражение для энергии кинка [16]

$$H^{SG}(\phi_{(k)}) = 8(1 - v^2)^{-1/2}. \quad (5)$$

Следуя далее энергетическому методу [15], получим известное уравнение эволюции скорости кинка для уравнения (1). Пусть ϕ есть некоторое решение уравнения (1) при $\beta, F(t) \neq 0$, тогда из (1) и (4) имеем

$$\frac{dH^{SG}(\phi)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} (-\beta\phi_t^2 + F(t)\phi_t) dz. \quad (6)$$

Подстановка в (6) выражения (3) дает

$$\frac{dH^{SG}(\phi_{(k)})}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} (-\beta(\phi_{(k)t})^2 + F(t)\phi_{(k)t}) dz = -8\beta \frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}} + 2\pi v F(t). \quad (7)$$

Полагая, что скорость кинка v зависит от времени, $v = v(t)$, продифференцируем выражение (5) по времени t , получим

$$\frac{dH^{SG}(\phi_{(k)})}{dt} = 8(1-v(t)^2)^{-3/2} v(t) \frac{dv(t)}{dt}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) найдем искомое уравнение для скорости кинка $v(t)$:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\beta v(t) \cdot (1-v^2(t)) + \frac{\pi}{4} F(t) \cdot (1-v^2(t))^{3/2}. \quad (9)$$

Учитывая условие (2), представим функцию $F(t)$ в виде

$$F(t) = F_0 f(t), \quad (10)$$

где безразмерная функция времени $f(t)$ нормирована условием $\max_t |f(t)| = 1$, F_0 — постоянная амплитуда внешней силы.

Подставив (10) в (9), получим

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\beta v(t)(1-v^2(t)) + \frac{\pi F_0}{4} f(t) \cdot (1-v^2(t))^{3/2}. \quad (11)$$

Поскольку $v(t)$ является безразмерной скоростью кинка, естественно переписать уравнение (11) в безразмерном виде

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = -\lambda v(\tau)(1-v^2(\tau)) + f(\tau) \cdot (1-v^2(\tau))^{3/2}. \quad (12)$$

Здесь введено безразмерное время $\tau = \theta t$, где константа $\theta = \frac{\pi}{4} F_0$ и безразмерный параметр $\lambda = \frac{4\beta}{\pi F_0}$.

Общее решение уравнения (12) имеет вид [14]

$$v(\tau) = \frac{\exp(-\lambda\tau) \left[v_0 \gamma_0 + \int_0^\tau \exp(\lambda\tau') f(\tau') d\tau' \right]}{\sqrt{1 + \left\{ \exp(-\lambda\tau) \left[v_0 \gamma_0 + \int_0^\tau \exp(\lambda\tau') f(\tau') d\tau' \right] \right\}^2}}, \quad (13)$$

которое является решением уравнения (12), удовлетворяющим начальному условию

$$v(\tau = 0) = v_0. \quad (14)$$

Здесь v_0 — скорость кинка в начальный момент времени $\tau = 0$, $\gamma_0 = (1-v_0^2)^{-1/2}$.

Отметим, что выражение (13) для скорости кинка при одновременном действии диссипации и нестационарной внешней силы позволяет исследовать особенности динамики кинка во внешних полях с различными видами временных зависимостей, представляющих физический интерес [14, 16].

1. Движение кинка в поле гармонической силы в среде с диссипацией

Исследуем эволюцию скорости кинка $v(\tau)$ при одновременном действии диссипации $(-\beta\varphi_{(k)t})$ и гармонической внешней силы

$$f(\tau) = \cos \Omega \tau, \quad (15)$$

где Ω — безразмерная циклическая частота.

Подставим (15) в (13), получим

$$v(\tau) = \frac{\left(u_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2}\right) \exp(-\lambda \tau) + \frac{1}{\lambda^2 + \Omega^2} (\lambda \cos \Omega \tau + \Omega \sin \Omega \tau)}{\sqrt{1 + \left\{ \left(u_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2}\right) \exp(-\lambda \tau) + \frac{1}{\lambda^2 + \Omega^2} (\lambda \cos \Omega \tau + \Omega \sin \Omega \tau) \right\}^2}}. \quad (16)$$

Из выражения (16) видно, что зависимость скорости кинка от времени представляет собой незатухающие осцилляции в окрестности кривой тренда $v_{trend}(\tau)$, определяемого следующим выражением:

$$v_{trend}(\tau) = \frac{\left(u_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2}\right) \exp(-\lambda \tau)}{\sqrt{1 + \left(u_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2}\right)^2 \exp(-2\lambda \tau)}}. \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что при $\tau \rightarrow \infty$ $v_{trend}(\tau)$ экспоненциально убывает, асимптотически стремясь к нулю, а $v(\tau)$ вида (16) переходит в асимптотическое выражение

$$v_{as}(\tau) = \frac{\frac{1}{\lambda^2 + \Omega^2} (\lambda \cos \Omega \tau + \Omega \sin \Omega \tau)}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{\lambda^2 + \Omega^2} (\lambda \cos \Omega \tau + \Omega \sin \Omega \tau) \right\}^2}}. \quad (18)$$

На рис. 1 представлен пример временной зависимости скорости кинка $v(\tau)$ вида (16) (сплошная линия), осциллирующей на фоне монотонно убывающего тренда $v_{trend}(\tau)$ вида (17) (точечная линия).

Заметим, что при $u_0 = 0.6$, $\Omega = 10$, $\lambda = 0.1$ движение кинка носит характер колебаний около некоторого среднего положения, которое, в свою очередь, с возрастанием τ монотонно стремится к некоторой постоянной величине, соответственно, скорость тренда стремится к нулю (рис. 1). Периодическое ускорение и замедление движения кинка на фоне общей тенденции замедления качественно соответствует условию действия внешней периодической силы и диссипации.

Амплитуда колебаний, представленных на рис. 1, медленно изменяется (модулируется) в зависимости от времени τ . Амплитудную модуляцию колебаний с высокой частотой $\Omega = 2\pi/T$ разности скоростей $v(\tau) - v_{trend}(\tau)$ определим как гладкую кривую, соединяющую точки локальных максимумов (минимумов) этой функции.

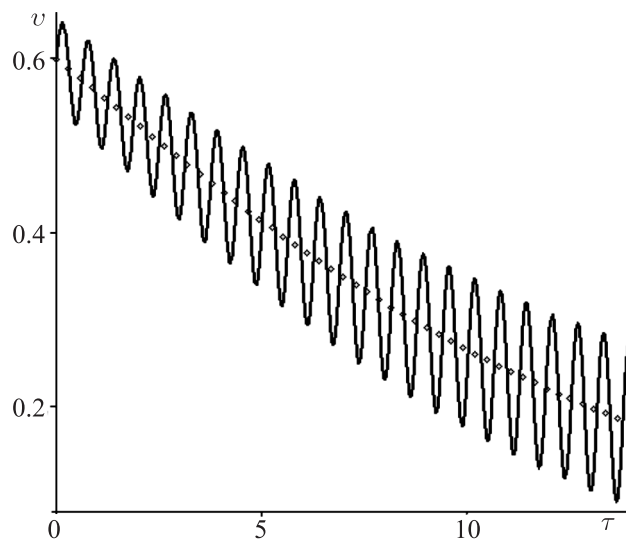


Рис. 1. Скорость кинка $v(\tau)$ (сплошная линия) и скорость тренда $v_{trend}(\tau)$ (точечная линия) при $v_0 = 0.2$, $\Omega = 10$, $\lambda = 0.1$

Локальные максимумы (минимумы) возникают за счет быстро осциллирующих частей функции (16), включающих $\cos \Omega \tau$, $\sin \Omega \tau$. При нахождении локальных максимумов (минимумов) функции (16) величину $\exp(-\lambda \tau)$ можно считать постоянной. Тогда нетрудно показать, что функции, модулирующие максимумы (v_{mod+}) и минимумы (v_{mod-}) амплитуды осцилляций разности скоростей $v(\tau) - v_{trend}(\tau)$, имеют вид

$$v_{mod\pm}(\tau) = \frac{\left(v_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} \right) \exp(-\lambda \tau) \pm (\lambda^2 + \Omega^2)^{-1/2}}{\sqrt{1 + \left(\left(v_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} \right) \exp(-\lambda \tau) \pm (\lambda^2 + \Omega^2)^{-1/2} \right)^2}} - \frac{\left(v_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} \right) \exp(-\lambda \tau)}{\sqrt{1 + \left(v_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} \right)^2 \exp(-2\lambda \tau)}}. \quad (19)$$

Графики функций $v_{mod\pm}(\tau)$ представлены на рис. 2.

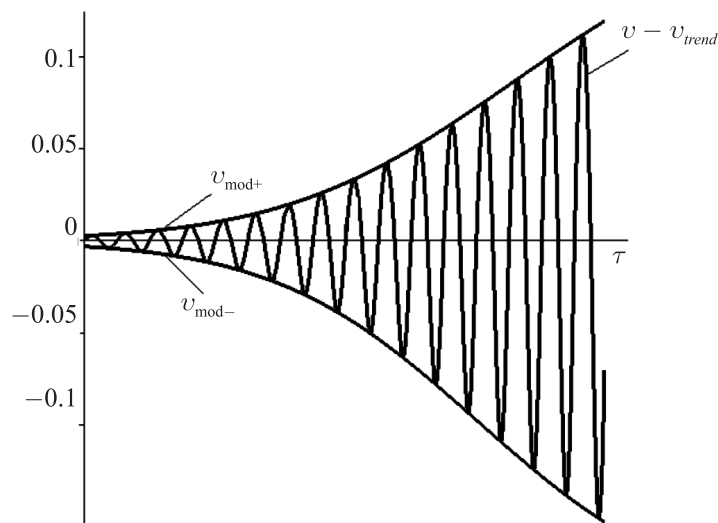


Рис. 2. Функция $v(\tau) - v_{trend}(\tau)$ и скорость $v_{mod\pm}(\tau)$ при $v_0 = 0.8$, $\lambda = 0.1$, $\Omega = 5$

Для амплитудной модуляции скорости $v(\tau)$, соединяющей локальные максимумы, можно использовать выражение

$$v_{env+}(\tau) = \frac{\left(v_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} \right) \exp(-\lambda \tau) + (\lambda^2 + \Omega^2)^{-1/2}}{\sqrt{1 + \left(\left(v_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} \right) \exp(-\lambda \tau) + (\lambda^2 + \Omega^2)^{-1/2} \right)^2}}. \quad (20)$$

Аналогично функция, соединяющая локальные минимумы, имеет вид

$$v_{env-}(\tau) = \frac{\left(v_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} \right) \exp(-\lambda \tau) - (\lambda^2 + \Omega^2)^{-1/2}}{\sqrt{1 + \left(\left(v_0 \gamma_0 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} \right) \exp(-\lambda \tau) - (\lambda^2 + \Omega^2)^{-1/2} \right)^2}}. \quad (21)$$

Вид модулирующих функций $v_{env+}(\tau)$, $v_{env-}(\tau)$ проиллюстрирован на рис. 3.

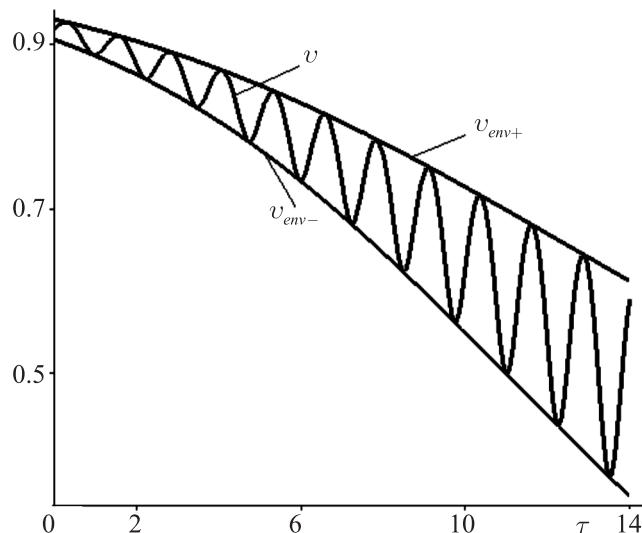


Рис. 3. Скорость кинка $v(\tau)$ и скорость $v_{env\pm}(\tau)$ при $v_0 = 0.7$, $\lambda = 0.1$, $\Omega = 5$

Из рис. 2, 3 видно, что аналитические выражения (19)–(21) хорошо описывают определенные выше амплитудные модуляции.

При уменьшении частоты внешней силы Ω и снижении начальной скорости до значения $v_0 = 0.2$ при сохранении $\lambda = 0.1$ зависимость $v(\tau)$ имеет характер колебаний, слабо затухающих за счет диссипации (см. рис. 4).

Рассмотрим эволюцию средней за период $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ скорости кинка на временном интервале $(\tau, \tau + T)$:

$$\langle v(\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} v(\tau) d\tau. \quad (22)$$

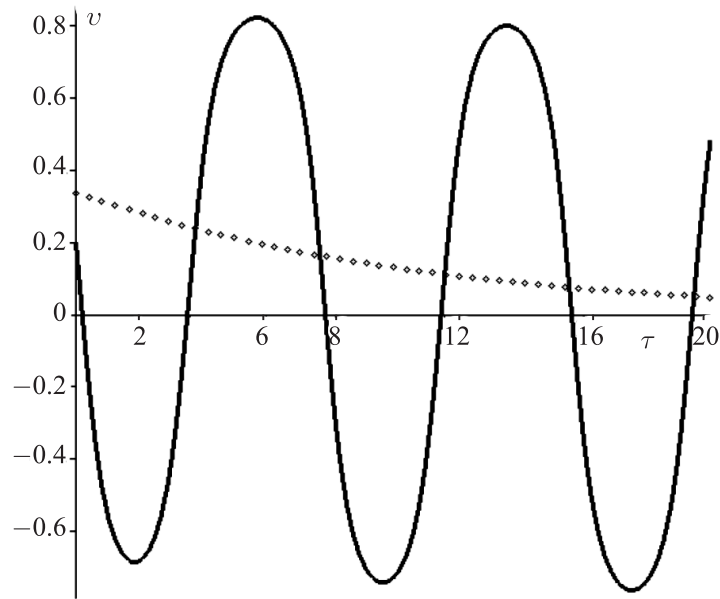


Рис. 4. Скорость кинка $v(\tau)$ (сплошная линия) и скорость тренда $v_{trend}(\tau)$ (точечная линия) при $v_0 = 0.2$, $\Omega = 0.8$, $\lambda = 0.1$

Построим зависимость средней скорости $\langle v(\tau) \rangle$ с помощью выражений (22) и (16). Результаты численных расчетов приведены на рис. 5.

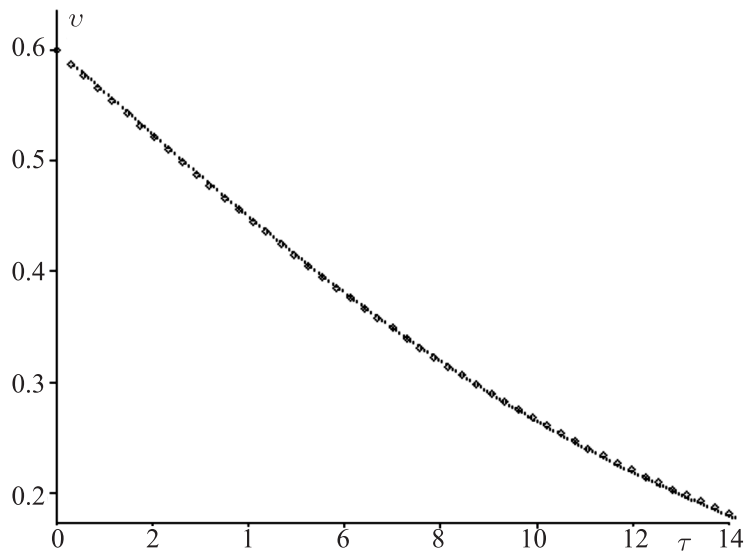


Рис. 5. Скорость тренда $v_{trend}(\tau)$ (точечная линия) и средняя скорость $\langle v(\tau) \rangle$ (штриховая линия) при $v_0 = 0.6$, $\Omega = 10$, $\lambda = 0.1$

Из рис. 5 видно, что скорость тренда $v_{trend}(\tau)$ и средняя за период скорость кинка $\langle v(\tau) \rangle$ совпадают на разных временных интервалах. Таким образом, формула (22) может служить в качестве аналитического выражения для средней за период скорости кинка $\langle v(\tau) \rangle$. Отметим, что приведенные выше зависимости качественно согласуются с результатами работ [9–13].

2. Движение кинка под действием внешней силы вида ступенчатой функции и диссипации

Рассмотрим знакопостоянную функцию

$$\tilde{f}(\tau, \tau_0, T) = \sum_{j=0}^{N-1} [\theta(\tau - jT) - \theta(\tau - \tau_0 - jT)], \quad (23)$$

где параметр τ_0 есть длительность прямоугольного импульса силы. Для скорости кинка из (13) и (23) имеем

$$v(\tau) = \frac{\exp(-\lambda\tau)[v_0\gamma_0 + u(\tau, \tau_0, T)]}{\sqrt{1 + \exp(-2\lambda\tau)[v_0\gamma_0 + u(\tau, \tau_0, T)]^2}}, \quad (24)$$

где

$$u(\tau, \tau_0, T) = \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{\lambda} (\exp(\lambda\tau) - \exp(\lambda jT)) \theta(\tau - jT) - \frac{1}{\lambda} (\exp(\lambda\tau) - \exp(\lambda(jT + \tau_0))) \theta(\tau - \tau_0 - jT) \right]. \quad (25)$$

Эволюция скорости кинка вида (24) при различных значениях τ_0 проиллюстрирована на рис. 6.

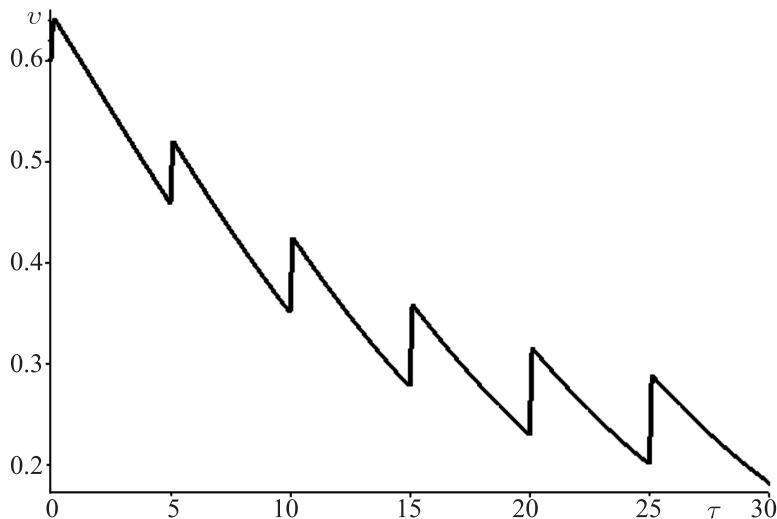


Рис. 6. Скорость кинка $v(\tau)$ вида (24) при $v_0 = 0.6$, $\lambda = 0.1$, $\tau_0 = 0.1$, $T = 5$, $N = 10$

Описанные свойства динамики кинка справедливы на всем временном интервале τ , при котором искажениями формы кинка в процессе его эволюции можно пренебречь, поскольку выражения (13), (16)–(25) получены в рамках энергетического метода, предполагающего неизменной форму кинка.

Заключение

Отметим, что выражение (13) для скорости кинка при одновременном действии диссипации и нестационарной внешней силы позволяет исследовать особенности динамики кинка во внешних полях с различными видами временных зависимостей, представляющих физический интерес. Для гармонически зависящей от времени внешней силы скорость кинка носит характер осцилляций относительно монотонно убывающего тренда (17). Получены аналитические выражения для амплитудной модуляции скорости кинка в поле гармонической внешней силы. Результаты численного моделирования [9–13] качественно согласуются с полученными аналитическими зависимостями. Для ступенчатой силы вида (23) скорость кинка осциллирует с медленно возрастающей амплитудой.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке АВЦП ФАО № 2.1.1/3436, гранта для ведущих научных школ Российской Федерации № НШ-871.2008.2.

Список литературы

1. *Englander S. W., Kallenbach N. R., Heeger A. J., Krumhansl J. A., Litwin A.* Nature of the open state in DNA structure // *Proc. Natl. Acad. Sci.* 1980. Vol. 77. P. 7222–7226.
2. *Yakushevich L. V.* Nonlinear Physics of DNA. Wiley: Weinheim, 2004. 190 p.
3. *Золотовский И. О., Семенцев Д. И.* Динамика оптических импульсов в периодических нелинейных волокнах // *Физическая и квантовая оптика.* 2002. Т. 92. С. 306–310.
4. *Lonngren K., Scott A.* Solitons in Action. N. Y.: Academic, 1978. 250 p.
5. *Bishop A. R., Jimenez S., Vazquez L.* Fluctuation Phenomena: Disorder and Nonlinearity. Singapore: World Scientific, 1995. 168 p.
6. *Garcia-Ojalva J., Sancho J. M.* Noise in Spatially Extended Systems. Singapore, N. Y., 1999.
7. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
8. *Тахтаджян Л. А., Фадеев Д. В.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
9. *Quintero N. R., Sanchez A.* Ac driven sine-Gordon solitons: dynamics and stability // *J. Eur. Phys. B.* 1998. Vol. 6. P. 133–142.
10. *Quintero N. R., Sanchez A.* Dc motion of ac driven sine-Gordon solitons // *Phys. Letters A.* 1998. Vol. 247. P. 161–166.
11. *Quintero N., Sanchez A.* Overdamped sine-Gordon kink in a thermal bath // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 60, № 1. P. 222–230.
12. *Quintero N. R., Sanchez A., Mertens F. G.* Existence of internal modes of sine-Gordon kinks // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62. P. 61–64.
13. *Quintero N. R., Sanchez A.* Ac driven sine-Gordon solitons: dynamics and stability // *J. Eur. Phys. B.* 1998. Vol. 6. P. 133–142.
14. *Краснобаева Л. А., Шаповалов А. В.* Скорость движения кинка в нестационарных внешних полях в модели синус-Гордон с учетом эффектов диссипации // *Известия вузов, Физика.* 2008. Т. 51, № 1. С. 77–84.
15. *McLaughlin D. W., Scott A. C.* Perturbation analysis of fluxon dynamics // *Phys. Rev. A.* 1978. Vol. 18, № 4. P. 1652–1680.
16. *Якушевич Л. В., Краснобаева Л. А.* Влияние диссипации и внешнего поля на динамику локальных конформационных возмущений в ДНК // *Биофизика.* 2007. Т. 52. С. 237–243.

