КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2009 Т. 1 № 3 С. 251–261

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Полиполярная лемнискатическая система координат

Т. А. Ракчеева[1,a]

[1] Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН,
101990, г. Москва, Малый Харитоньевский переулок, д. 4

E-mail: [a] rta_ra@list.ru

Получено 27 апреля 2009 г.,
после доработки 24 июня 2009 г.

Полиполярная система координат, как и классическая полярная, характеризует точку плоскости полярным радиусом ρ и полярным углом φ, но имеет не один центр-полюс, а несколько полюсов. Такое координирование обеспечивается классом многофокусных лемнискат. Семейство изометрических кривых ρ = const — лемнискат — и семейство градиентных кривых φ = const — являются взаимно ортогональными сопряженными семействами.

Ключевые слова: полиполярная система координат

Polypolar lemniscate coordinate system

T. A. Rakcheeva[1]

[1] Blagonravov Institute of Mechanical Engineering, Maliy Khariton'evskiy pereulok 4, Moscow, 101990, Russia

Abstract. — The polypolar coordinate system, as well as classical polar, characterizes a point on a plane by polar radius ρ and polar angle φ, but utilizes multiple poles instead of one pole. Such referencing can be provided by a class of multifocal lemniscates. The family of isometric curves ρ = const — lemniscates — and family of gradient curves φ = const are mutually orthogonal conjugate families.

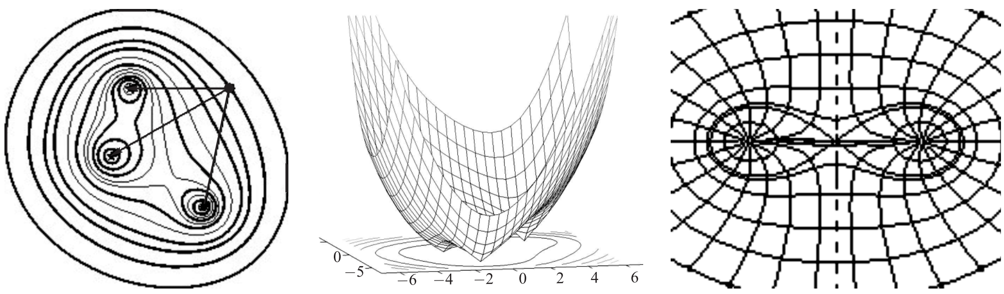
Key words: polypolar coordinate system

Citation: *Computer Research and Modeling,* 2009, vol. 1, no. 3, pp. 251–261 (Russian).

В решении как прикладных, так и теоретических задач многое определяется адекватным выбором факторов-переменных, в пространстве которых ищется решение. Каждая задача в описании своих объектов имеет общую часть, относящуюся к предметной области, и специальную, характеризующую именно данную задачу. Успешность решения зависит от выбора подходящей системы координат (СК), представляющей факторное пространство, в которое можно было бы «вложить» всю предметную часть задачи с тем, чтобы вычлененная часть имела наиболее простое описание в этой СК. Несмотря на универсальность и простоту повсеместно используемой декартовой СК, разработано много других СК, применение которых оказывается более удобным для решения той или иной задачи.

Хорошо организованные системы координат, как прямолинейные, так и криволинейные, характеризуются, как известно, началом отсчета, направляющими и метрическими единицами по этим направляющим. Так, прямоугольная декартова СК имеет точку отсчета в пересечении координатных осей и равноправные ортогональные направляющие с одинаковыми метрическими единицами. В общем случае имеющиеся у точки плоскости две степени свободы координируются по-разному в разных СК. Наиболее простая из криволинейных СК — полярная — характеризует точку относительно единого центра также двумя координатами: полярным радиусом ρ и полярным углом φ, где ρ — евклидово расстояние от полюса до точки, а φ — радианная мера угла относительно полярной оси. Такое координирование обеспечивается, как известно, двумя ортогональными семействами: семейством концентрических окружностей $\rho = \text{const}$ и семейством прямых $\varphi = \text{const}$, проходящих через полюс, при этом в каждой точке плоскости, кроме полюса, ортогонально пересекаются одна окружность с одной прямой.

В данной работе предлагается новая полярная система координат, которая так же, как и классическая полярная СК, характеризует точку плоскости двумя координатами: полярным радиусом ρ и полярным углом φ, но имеет не один центр-полюс, а несколько (конечное число) полюсов. Такое координирование обеспечивается семействами *многофокусных лемнискат*.



а *б* *в*

Рис. 1. Лемнискаты: *а* — 3*f*-семейство; *б* — рельеф и линии уровня $P(x, y)$; *в* — 2*f*-СК

Многофокусные лемнискаты

Многофокусные лемнискаты представляют собой гладкие замкнутые кривые без самопересечений, не обязательно односвязные, содержащие внутри себя конечное число фокусов [1, 5]. Лемниската определяется через k точек-фокусов на плоскости и числовой параметр R как геометрическое место точек, для которого сохраняется постоянным, равным R^k, произведение расстояний до всех k фокусов (рис. 1*а*).

Определяющий инвариант лемнискаты можно записать в виде

$$\prod_{j=1}^{k} r_j = R^k, \qquad (1)$$

где r_j — евклидово расстояние от произвольной точки лемнискаты до j-го фокуса, k — число фокусов ($j = 1, \ldots, k$), R — радиус лемнискаты.

Левая часть этого инварианта — в комплексном представлении модуль полинома — является неотрицательной функцией и определяет аппликативную поверхность $P(x, y)$, касающуюся плоскости только в точках фокусов (рис. 1*б*). По определению, лемниската является линией уровня этой поверхности. Таким образом, каждая лемниската соответствует горизонтальному сечению на уровне R^k поверхности $P(x, y)$, а каждая линия уровня этой поверхности проецируется в лемнискату с соответствующим значением радиуса R^k. И, как следствие, для фиксированного набора k фокусов лемнискаты с разными радиусами образуют семейство вложенных кривых от k-связных для малых значений радиуса R до односвязных для больших значений, причем кривые с большим радиусом охватывают кривые с меньшим радиусом без пересечений (рис. 1*а*).

Полиполярная система координат

Семейство многофокусных лемнискат позволяет построить обобщение классического полярного представления в виде полиполярной плоскости.

Введем абсолютную декартову систему отсчета (АСО), в которой координируются k точек-фокусов: $f_j = \{a_j, b_j\}$, $j = 1, \ldots, k$. Эти k фокусов образуют фокусную систему, которую будем в дальнейшем называть kf-системой, а соответствующие лемнискаты — kf-лемнискатами.

Произвольная точка плоскости с АСО-координатами (x, y) в полиполярной лемнискатической системе координат (ЛСК) имеет полярные координаты (ρ, φ), где ρ — метрическая, а φ — угловая координата, которые являются, соответственно, функциями фокусных ρ_j и φ_j — полярных координат относительно каждого из фокусов f_j.

В такой постановке классическая полярная СК оказывается частным случаем полиполярной ЛСК, когда фокусная система либо состоит из одного фокуса, либо все фокусы сосредоточены в одной точке. Структура полиполярной ЛСК должна быть такова, чтобы допускать предельный переход от полиполярной к классической полярной системе координат при переходе от k фокусов к одному.

Требования к координации в ЛСК: *а*) каждой точке (x, y) соответствует пара координат (ρ, φ); *б*) каждая пара координат (ρ, φ) соответствует точке (x, y). Соответствия должны быть однозначными, непрерывными и монотонными (по ρ при $\varphi = \text{const}$ и по φ при $\rho = \text{const}$).

Метрическая координата ρ

Определим функцию ρ радиус-векторов от произвольной точки плоскости до системы фокусов как среднегеометрическое:

$$\rho = \sqrt[k]{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_k} \qquad (2)$$

фокусных полярных радиусов $\rho_j \equiv r_j$, равных, соответственно:

$$\rho_j \equiv r_j = \sqrt{(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2}. \qquad (3)$$

Метрическая координата ρ для произвольной точки (x, y) определяет ее расстояние до kf-системы $\{f_1, \ldots, f_k\}$.

В качестве функции расстояния координата ρ должна обладать свойствами положительности всюду, кроме начала координат, обращения в начале координат в ноль и иметь диапазон значений от 0 до ∞.

Лемнискатическая метрическая координата ρ существует, очевидно, для любой точки плоскости (x, y), так как для любой точки плоскости существует фокусный полярный радиус ρ_j (3), который имеет единственное положительное значение. Нулевое значение ρ принимает только в полярных точках фокусной системы, которая и является системным началом координат. Метрическая координата ρ может принимать любое неотрицательное значение в диапазоне $[0, \infty]$, поскольку радиус *kf*-лемнискаты меняется непрерывно от 0 до ∞. Монотонность координаты ρ обусловлена отмеченным выше свойством лемнискат с большим радиусом охватывать лемнискаты с меньшим радиусом без соприкосновений и пересечений.

Таким образом, kf-лемниската, удовлетворяя условию постоянства расстояния до kf-системы $\rho = \text{const} \equiv R^k$, *может рассматриваться на плоскости как многофокусный аналог координатной окружности.*

Подобно семейству концентрических окружностей, семейство изофокусных *kf*-лемнискат координирует расстояние до *kf*-системы. При этом сама *kf*-система является началом системы координат, а радиус R служит метрической (радиальной) координатой ρ полиполярной ЛСК. Каждая точка плоскости (x, y) имеет, очевидно, определенное и единственное значение ρ расстояния до *kf*-системы, с одной стороны, и, с другой, каждое значение радиуса R однозначно соответствует определенной лемнискате, а значит, и определенному значению метрической координаты ρ.

Угловая координата φ

Угловую координату полиполярной лемнискатической СК введем как среднее арифметическое:

$$\varphi = \left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k\right) / k \tag{4}$$

фокусных полярных углов φ_j, каждый из которых определяется как классический полярный угол относительно j-го полюса-фокуса:

$$\varphi_j = \operatorname{arctg} \frac{y - b_j}{x + a_j}. \tag{5}$$

Обоснованность подобного определения угловой координаты в одну сторону очевидна: для любой точки (x, y) плоскости можно однозначно определить ее направление на каждый полюс-фокус, т. е. угол φ_j, а тем самым и сумму этих углов φ. Таким образом, для каждой точки плоскости существует однозначная координата φ.

Диапазон изменения угловой координаты φ дает нам принцип аргумента. Лемниската естественным образом определяется на комплексной плоскости. Аргумент комплексной точки, движущейся вдоль замкнутого контура с k нулями внутри контура и совершающей полный обход, изменяется согласно принципу аргумента на $2\pi k$. Для фиксированного значения ρ точка (x, y) принадлежит выделенной лемнискате с k фокусами, и полный обход этой точки вдоль лемнискаты приведет к изменению угловой компоненты на $2\pi k$. Определение φ как среднего арифметического полярных углов φ_j дает диапазон изменения $[0; 2\pi]$.

Каждый отдельный полярный угол φ_j при обходе лемнискаты в общем случае меняется в разных направлениях, поэтому для введенной полиполярной координаты φ требуется доказать ее однозначность и монотонность изменения вдоль произвольной лемнискаты, т. е. требуется доказать, что никакие две разные точки с одинаковым значением ρ не могут иметь одинаковые значения φ.

Кроме того, важнейшей задачей является определение для произвольной *kf*-системы семейства изопараметрических кривых, удовлетворяющих условию $\varphi = \text{const}$, — семейства, сопряженного к семейству изометрических *kf*-лемнискат.

Доказательства проведем сначала для наиболее простого случая 2*f*-системы, затем для общего случая *kf*-системы и закончим предельным переходом к классической полярной СК. Проанализируем также особенности введенной полиполярной ЛСК.

Двухфокусная система координат

Рассмотрим 2-полярную систему с одним параметром a, координирующим систему из двух фокусов. Без ограничения общности можно расположить оба фокуса на оси x, симметрично относительно начала АСО (рис. 1*в*) на расстоянии a, т. е. 2*f*-система задается фокусами с координатами $f_1 = (-a, 0)$, $f_2 = (a, 0)$.

Конечное уравнение изометрического семейства 2*f*-лемнискат:

$$r_1^2 r_2^2 \equiv \left[\left(x+a\right)^2 + y^2\right]\cdot\left[\left(x-a\right)^2 + y^2\right] = R^4 = \text{const}. \qquad (6)$$

Алгебраические преобразования приведут к известному уравнению овалов Кассини, частным случаем которых являются лемнискаты:

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2a^2\left(x^2 - y^2\right) = R^4 - a^4.$$

Дифференциальное уравнение для семейства лемнискат имеет вид

$$\left[\left(x+a\right)r_2 + \left(x-a\right)r_1\right]dx + \left[yr_2 + yr_1\right]dy = 0. \qquad (7)$$

Заменой y' на $-1/y'$, получим дифференциальное уравнение

$$-y\left(x^2 + y^2 + a^2\right)dx + x\left(x^2 + y^2 - a^2\right)dy = 0, \qquad (8)$$

решением которого, как известно, является семейство градиентных кривых. Несмотря на внешнюю простоту, решение его представляет значительные трудности, поэтому подойдем к этой задаче с другой стороны. Рассмотрим инвариантное уравнение для угловой координаты

$$\varphi_1 + \varphi_2 \equiv \operatorname{arctg}\frac{y}{x+a} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x-a} = \text{const}. \qquad (9)$$

Дифференциальное уравнение для изопараметрического семейства кривых, на которых неизменно значение φ, получим из него в виде

$$\left(-\frac{y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-a)^2 + y^2}\right)dx + \left(-\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2}\right)dy = 0.$$

Приводя к общему знаменателю, получим окончательно дифференциальное уравнение для сопряженного к лемнискатам семейства

$$-y\left(x^2 + y^2 + a^2\right)dx + x\left(x^2 + y^2 - a^2\right)dy = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (8), видим, что они идентичны. Следовательно, решением дифференциального уравнения (8) является семейство инвариантных кривых (9).

Таким образом, для 2*f*-системы доказаны утверждения о том, что семейство изопараметрических кривых для угловой координаты φ = const является семейством *градиентных* кривых к семейству лемнискат, и наоборот, и что сопряженные семейства изопараметрических кривых ρ = = const и φ = const являются *взаимно ортогональными* (рис. 1*в*).

Осталось показать, что изменение φ вдоль произвольной 2*f*-лемнискаты обладает свойством *монотонности*. Для этого рассмотрим поведение производной φ по направлению вдоль лемнискаты. Оценим скалярное произведение градиента φ и вектора касательной для произвольной точки лемнискаты. Компоненты градиента координаты φ есть

$$\operatorname{grad}\varphi=\left\{2x\left(x^2+y^2-a^2\right),\, 2y\left(x^2+y^2+a^2\right)\right\},$$

а компоненты касательной к лемнискате —

$$\operatorname{tang}\rho=\left\{4x\left(x^2+y^2-a^2\right),\, 4y\left(x^2+y^2+a^2\right)\right\}.$$

Поскольку, как показано выше, семейства лемнискат и сопряженных кривых ортогональны, то компоненты grad φ и tang ρ получились с точностью до постоянного множителя равными, и, значит, искомое скалярное произведение является заведомо неотрицательным. Действительно:

$$\left(\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{tang}\rho\right)=8\left(x^2+y^2\right)R^4\geq 0. \tag{10}$$

Отсюда видно, что скалярное произведение обращается в нуль в особых точках: на полюсах, где $R = 0$, и в начале АСО $x = y = 0$ (особенности ЛСК рассмотрены ниже).

Рис. 2 иллюстрирует поведение угловых компонент точки, движущейся вдоль некоторой лемнискаты и совершающей вокруг нее полный оборот (параметризованное по радиусу семейство 2*f*-лемнискат приведено на рис. 1*в*.

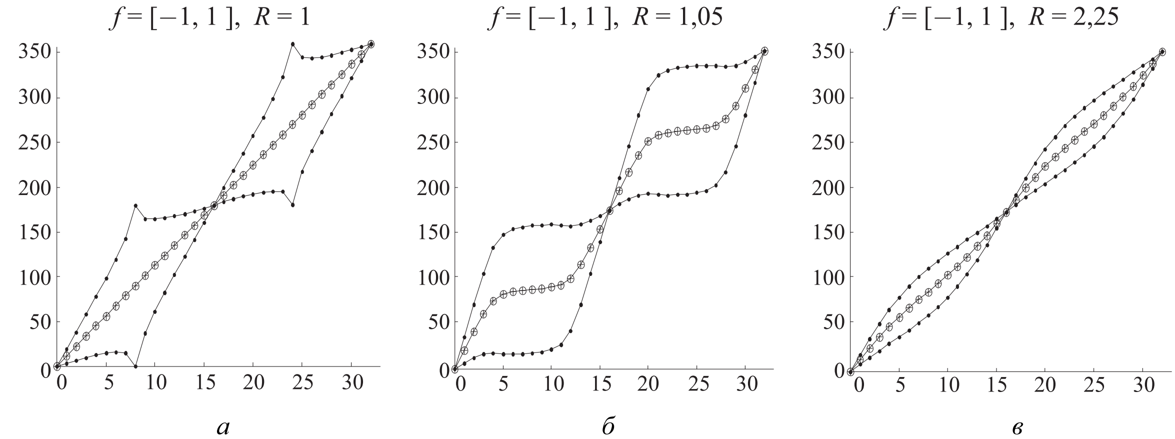


Рис. 2. Графики угловых координат для 2*f*-лемнискат с разным радиусом

На каждом из рисунков приведены пересекающиеся графики двух полярных координат φ_1 и φ_2 и график полиполярной координаты φ (серединные линии с отметками точек). Графики на рис. 2*а* относятся к лемнискате Бернулли ($R = a$, рис. 1*в*), на рис. 2*б* — к выпукло-вогнутой односвязной лемнискате рядом с лемнискатой Бернулли и на рис. 2*в* — к выпуклой лемнискате большого радиуса. Как видно из рисунков, для малых значений радиуса поведение угловых координат φ_1 и φ_2 имеет большие вариации производных, а для больших значений фокусные углы φ_1 и φ_2 наиболее близки между собой и к полиполярной координате φ. Для невыпуклых (и несвязных) лемнискат поведение φ_1 и φ_2 немонотонное; вместе с тем, полиполярная координата φ всюду монотонна.

K-фокусная ЛСК — общий случай

Пусть на плоскости в АСО задана произвольная *kf*-система фокусов координатами: $f_j = \{a_j, b_j\}$.
Конечное уравнение изометрического *kf*-семейства лемнискат представим в виде

$$r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_k\equiv\prod_{j=1}^{k}r_j=R^{2k}, \tag{11}$$

а конечное уравнение семейства инвариантных кривых для угловой компоненты kf-системы запишем в виде

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\operatorname{arctg}\frac{y-b_j}{x-a_j}=\text{const}. \tag{12}$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет семейство kf-лемнискат, получается в форме полного дифференциала

$$\left(\sum_{j=1}^{k} r_{jx}{}' \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} r_i\right)dx+\left(\sum_{j=1}^{k} r_{jy}{}' \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} r_i\right)dy=0. \tag{13}$$

Градиентное семейство, определяющее направление максимального изменения лемнискаты как линии уровня, получим заменой y' на $-1/y'$:

$$\left(\sum_{j=1}^{k} r_{jx}{}' \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} r_i\right)dy-\left(\sum_{j=1}^{k} r_{jy}{}' \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} r_i\right)dx=0. \tag{14}$$

Дифференциальное уравнение, имеющее решением уравнение для угловой компоненты (12), в форме полного дифференциала имеет вид

$$-\sum_{j=1}^{k}\frac{y-b_j}{(x-a_j)^2+(y-b_j)^2}\,dx+\sum_{j=1}^{k}\frac{x-a_j}{(x-a_j)^2+(y-b_j)^2}\,dy=0.$$

Знаменатели этого уравнения представляют собой квадраты фокусных расстояний r_j^2, а числители — производные знаменателя по x и y. Выполняя соответствующие замены, перепишем уравнение в форме

$$-\sum_{j=1}^{k}\frac{r_{jy}{}'}{r_j}\,dx+\sum_{j=1}^{k}\frac{r_{jx}{}'}{r_j}\,dy=0.$$

Приведение к общему знаменателю, который можно отбросить, т. к. нигде, кроме полюсов, он не обращается в 0, дает уравнение в виде

$$\left(-\sum_{i=1}^{k} r_{iy}{}' \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} r_j\right)dx+\left(\sum_{i=1}^{k} r_{ix}{}' \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} r_j\right)dy=0.$$

Полученное дифференциальное уравнение совпадает с уравнением (14).

Таким образом, утверждения, доказанные для $2f$-системы, справедливы для общего случая kf-системы, а именно:

семейство изопараметрических кривых угловой координаты $\varphi = \text{const}$ *есть семейство градиентных кривых к семейству лемнискат* $\rho = \text{const}$*;*

сопряженные семейства изопараметрических кривых $\rho = \text{const}$ *и* $\varphi = \text{const}$ *являются взаимно ортогональными;*

на градиентных к лемнискатам кривых сохраняется неизменной сумма полярных углов: $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k$.

Для доказательства *монотонности* изменения углового параметра φ вдоль произвольной лемнискаты также рассмотрим производную φ по направлению касательной к лемнискате в произвольной ее точке.

Компоненты градиента угловой переменной φ равны

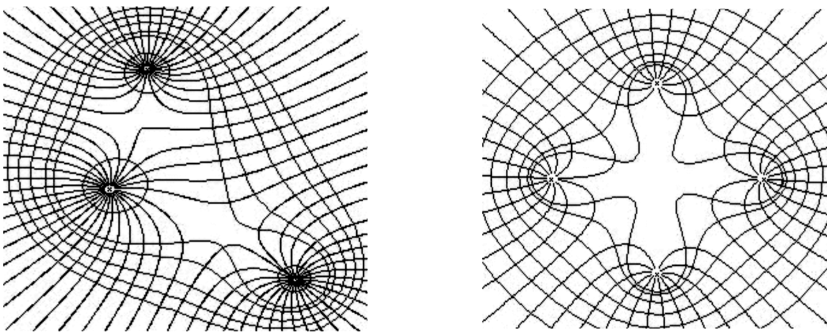
$$\operatorname{grad}\varphi=\left\{\frac{\sum_{j=1}^{k} r_{jx}{}' \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} r_i}{\prod_{j=1}^{k} r_j};\ \frac{\sum_{j=1}^{k} r_{jy}{}' \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} r_i}{\prod_{j=1}^{k} r_j}\right\},$$

а компоненты вектора касательной к лемнискате равны

$$\operatorname{tang}\rho=\left\{\sum_{j=1}^{k} r_{jx}{}' \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} r_i;\ \sum_{j=1}^{k} r_{jy}{}' \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} r_i\right\}.$$

Поскольку компоненты grad φ и tang ρ получились ожидаемо одинаковыми с точностью до одного и того же неотрицательного знаменателя в компонентах градиента φ, скалярное произведение векторов градиента и касательной (grad φ·tang ρ) ≥ 0.

На рис. 3 приведены координатные сетки для полиполярных систем координат с разным числом полюсов и их конфигураций: несимметричный случай с $k = 3$ (*а*) и симметричный с $k = 4$ (*б*). Из приведенных рисунков виден характер взаиморасположения сопряженных семейств лемнискат и градиентных к ним кривых, как для симметричной, так и для не симметричной *kf*-системы. В частности, хорошо видно, что эти семейства взаимно ортогональны.



а *б*

Рис. 3. Полиполярные ЛСК: *а* — 3*f*-асимметричная; *б* — 4*f*-симметричная

Особенности полиполярной ЛСК

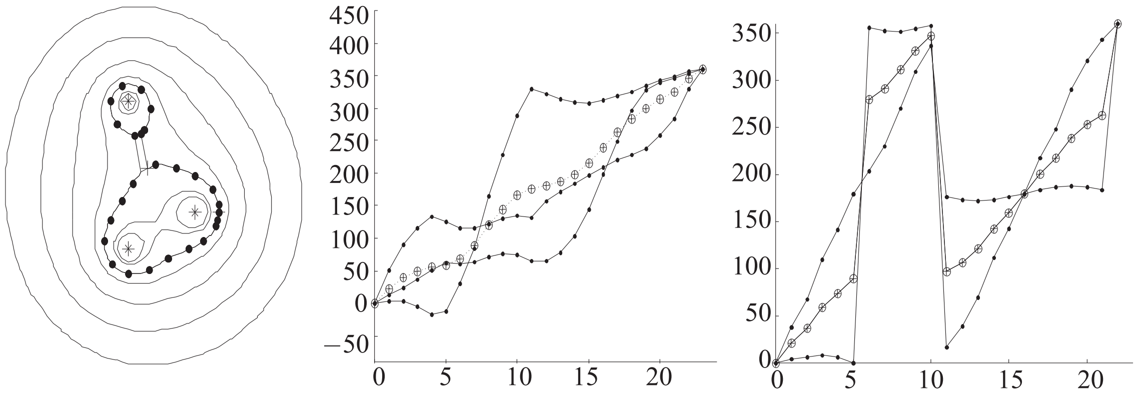
Скалярное произведение (10), как было отмечено, обращается в 0 в двух случаях: 1) в точках полюсов фокусной системы, где обращается в ноль фокусный радиус $r_j = 0$ и 2) в точке начала АСО, где лемниската теряет гладкость. Первый случай имеет место в полиполярной системе с любым числом полюсов. В классической полярной СК такой особой точкой является, как известно, единственный полюс, а в предлагаемой полиполярной — это k полюсов *kf*-системы, где $\rho = 0$, а угловая координата φ не определена.

Второй случай специфичен для полиполярной СК, когда k полюсов расположены в вершинах правильного k-угольника, — лемниската, содержащая центральную точку, претерпевает в ней изломы. Особая точка двухполюсной СК находится на лемнискате Бернулли ($R = a$) — точка соприкосновения двух петель «восьмерки» (рис. 1*в*). Особенность этой точки в неоднозначности φ. При обходе «восьмерки» она проходится дважды: в первый раз $\varphi = \pi/2$, а во второй $\varphi = 3\pi/2$.

В общем случае *kf*-системы это *k*-кратная точка с равными фокусными радиусами, одним ρ и разными углами φ: $\varphi(j) = j2\pi/k$, $j = 1, \ldots, k$. Пример 4-полюсной СК с симметричной организацией приведен на рис. 3*б*.

Обращение в 0 обеих компонент градиента (8) для 2*f*-ЛСК приводит к решению: $\{y = 0;\ x = a(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)\}$, соответствующему межфокусному отрезку (рис. 1*в*). Это особая линия 2*f*-ЛСК — межфокусная сепаратриса — геометрическое место пар симметричных точек двухсвязной лемнискаты, имеющих одинаковые координаты (ρ, φ).

Монотонность угловой координаты φ для несвязных лемнискат требует особого рассмотрения (рис. 4*а*, *б*). Для 2*f*-системы (рис. 1*в*) обход двух ее петель выполняется от полярной оси до межфокусной сепаратрисы, переход на другую петлю, полный обход ее, возврат на первую и завершение периода. На рис. 4*в* приведен результат полного обхода каждой петли (1-я половина — одной петли, 2-я — другой), что привело к немонотонности φ. То же и для *kf*-системы — обход несвязных лемнискат выполняется по межфокусным сепаратрисам, т. к. на них φ = const, что гарантирует монотонную и гладкую непрерывность угловой координаты φ (рис. 3, 4*а*, *б*). Межфокусные сепаратрисы хорошо обозначены на рис. 3*а*, на рис. 3*б* — это линии, связывающие полюсы с центром.



а *б* *в*

Рис. 4. Монотонность угловой координаты: *а* — 3*f*-семейство, *б* — графики φ_1, φ_2, φ_3 и φ для 2-связной 3*f*-лемнискаты, *в* — φ_1, φ_2, φ для несвязной 2*f*-лемнискаты

Другие сепаратрисы, ортогональные межфокусным, не представляют особенностей для координации — разделяя зоны принадлежности градиентных кривых к разным полюсам, они также задают порядок обхода несвязных лемнискат (рис. 1*в*, рис. 3).

1*f*-полярная СК: предельный переход

Полиполярная система координат в предельном случае совмещения всех фокусов в одной точке сводится к случаю классической однополярной СК. В случае одного фокуса, как известно, изометрическое семейство составляют окружности разного радиуса, а градиентные кривые представляют собой радиальные прямые. Проверим уравнения, полученные для 2*f*- и *kf*-систем на предельный переход при подстановках: $k = 1$ и $a_j = b_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$.

Действительно, метрическая и угловая координаты получаются из (2, 3) и (4, 5) в естественном виде

$$\rho \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Конечные инвариантные уравнения для радиальной координаты (семейства *kf*-лемнискат) (6, 11) и для угловой (9, 12) вырождаются в:

$$r = \text{const}, \quad \varphi = \text{const}.$$

Дифференциальные уравнения семейства *kf*-лемнискат (7, 13) и градиентного семейства (8, 14) приобретают, соответственно, вид

$$xdx + ydy = 0, \quad xdy - ydx = 0, \tag{15}$$

решениями которых являются семейства софокусных окружностей и прямых, проходящих через начало координат:

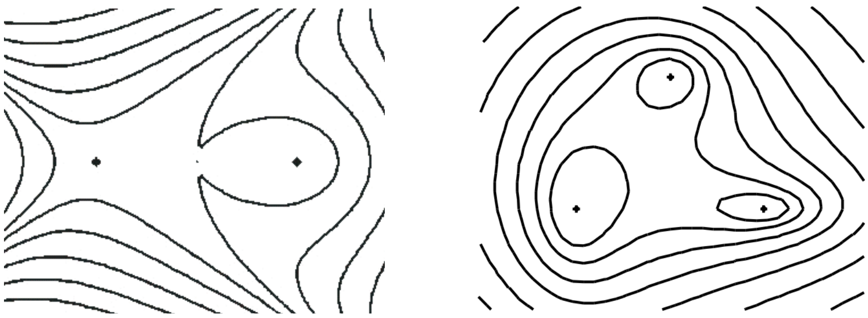
$$x^2 + y^2 = C, \quad y = Cx.$$

Полученные семейства являются сопряженными ортогональными семействами, что также следует и из дифференциальных уравнений (15), различающихся заменой y' на $-1/y'$. Монотонность изменения угловой координаты вдоль окружности с очевидностью следует из (10).

Таким образом, результаты предельных переходов дают известные формулы и объекты классической полярной системы координат. Градиентные прямые $y = Cx$ 1*f*-системы являются асимптотами соответствующих градиентных кривых $\varphi = \text{const}$ *kf*-системы с тем же центром.

Комбинированная структура метрической компоненты

Метрическая структура полиполярной ЛСК такова, что в ней возможны разные локальные метрики, связанные с отдельными фокусами. Рис. 5 иллюстрирует результаты компьютерного эксперимента с полиполярными СК. Сочетание двух локальных метрик представлено на рис. 5*а*, где правый полюс с обычным евклидовым расстоянием, а левый — с расстоянием в гиперболической (псевдоевклидовой) метрике. Рис. 5*б* представляет сочетание трех метрик: евклидовой и двух эллиптических с разной ориентацией большой оси.



а *б*

Рис. 5. Композиции локальных метрик, связанных с разными фокусами

Заключение

Полиполярная система координат представляется хорошо организованной СК в большом списке имеющихся криволинейных систем. Особенностью предложенной в данной работе СК является ее широкий диапазон от универсальности до узкой специализированности. Такая особенность является следствием возможностей рассматриваемого класса функций — *многофокусных лемнискат*, которые допускают множество самых разнообразных приложений. Наиболее значительным из приложений является аппроксимация эмпирических кривых, заданных поточечно. В определенном диапазоне значений радиуса лемнискаты обладают большой вариабельностью формы, обусловливающей применение их в качестве приближающих функций для разнообразных форм кривых [2–4], примеры чего приведены на рис. 6.

а *б*

Рис. 6. Примеры приближения лемнискатами (крестиками отмечены фокусы)

Манипулируя визуально положением фокусов и их количеством, можно решать также задачу интерактивной генерации форм для дизайнерских, диагностических и других целей. Когда все фокусы сосредоточены в одной точке, как было показано выше, получается однополярная универсальная СК. В случае нескольких фокусов настройку на прикладную задачу можно осуществить в мануально-визуальном режиме. Более того, с предметным образом можно связать собственную систему координат. Например, с результатом какого-либо из приближений, приведенных на рис. 6. Таким образом, метрическая компонента может быть произвольной, достаточно сложной, настраиваемой вручную или автоматически, и при любой форме метрической компоненты угловая компонента получается ортогональной.

Список литературы

1. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967. С. 486.
2. *Ракчеева Т. А.* Приближение кривых многофокусными лемнискатами // Человеко-машинные системы и анализ данных. М.: Наука, 1992. С. 93–110.
3. *Ракчеева Т. А.* Приближение кривых: фокусы или гармоники // МКО: Сб. науч. тр. Вып. 14, т. 2. М.–Ижевск, 2007. С. 83–90.
4. *Ракчеева Т. А.* Приближение кривых многофокусными лемнискатами на комплексной плоскости // МКО: Сб. науч. тр. Вып. 15, т. 2. М.–Ижевск, 2008. С. 68–75.
5. *Hilbert D.* Gessamelte Abhandlungen. Berlin: Springer, 1935. Bd. 3. P. 435.