**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2009 Т. 1 № 3 С. 243–249**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Представление групп автоморфизмами нормальных топологических пространств

А. В. Коганов[1,a]

[1] Научно-исследовательский институт системных исследований РАН,
117218, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 36, к. 1

E-mail: [a] koganow@niisi.msk.ru

*Получено 10 апреля 2009 г.,
после доработки 27 июня 2009 г.*

Доказывается, что произвольная алгебраическая группа алгебраически изоморфна полной группе автоморфизмов некоторого топологического пространства (автобиекций, сохраняющих открытые множества) с нормальным типом отделимости (T_4 + T_1). Кроме того, любое непрерывное действие группы на нормальном топологическом пространстве может быть получено как действие полной группы автоморфизмов нормального топологического пространства на его подпространстве.

Ключевые слова: теория групп, автоморфизмы, топологические пространства

Representation of groups by automorphisms of normal topological spaces

A. V. Koganov[1]

[1] *Scientific-Research Institute for System Studies, Russian Academy of Sciences (NIISI RAN), Nakhimovskii av. 36-1, 117218, Moscow, Russia*

Abstract. — The famous fact [3, 5] of existence of an exact representation for any finite group in the form of the full automorphism group of a finite graph was generalize in [4]. For an arbitrary group exact representation exists in the form of the full automorphism group of Kolmogorov topological space (weak type of separability T_0). For a finite group a finite space may be chosen, thus allowing to restore a finite graph with the same number of vertices and having the same automorphism group. Such topological spaces and graphs are called topological imprints and graph imprints of a group (T-imprints and G-imprints, respectively). The question of maximum type of separability of a topological space for which T-imprint can be obtained for any group is open. The author proves that the problem can be solved for the class of normal topology (maximal type of separability $T_4 + T_1$). Special finite T-imprint for a symmetric group may be obtained as a discrete topology; for any other group minimal cardinality of normal T-imprint is countable. There is a generic procedure to construct a T-imprint for any group. For a finite group this procedure allows finite space partitioning into subspaces having G-imprint of the original group as their connectivity graphs.

Key words: group theory, automorphisms, topological spaces

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 243–249 (Russian).

Известный факт [3, 5] существования точного представления произвольной конечной группы в форме полной группы автоморфизмов конечного графа был обобщен в [4]. Для произвольной группы существует точное представление в форме полной группы автоморфизмов колмогоровского топологического пространства (слабый тип отделимости T_0). Притом для конечной группы это пространство можно выбрать конечным, и по нему однозначно восстанавливается конечный граф с тем же числом вершин, автоморфизмы которого тоже представляют эту группу. Такие пространства и графы называются изображением группы, соответственно, на топологическом пространстве или на графе (Т-изображения и Г-изображения). Вопрос о максимальном типе отделимости топологии, на котором возможно Т-изображение любой группы, оставался открытым. В данной работе доказано, что эта задача разрешима на классе нормальных топологий (максимальный тип отделимости T_4+T_1). Для симметрических групп существуют специальные конечные изображения в форме дискретных топологий. Для всех остальных конечных групп минимальная мощность нормального Т-изображения — счетная. Существует универсальная конструкция таких изображений, которая в случае конечной группы допускает конечное разбиение на подпространства, чей граф связности является Г-изображением той же группы. Универсальная конструкция использует способ склейки жестких топологических пространств, предложенный в [4] для получения изображений групп и действий групп на классе графов, индукторных пространств и колмогоровских топологий. Жестким называется пространство с единичной группой автоморфизмов. Задача сводится к построению нормальных жестких пространств произвольной мощности.

1. Основные определения

Определение 1.1. Пусть имеется некоторая категория C (в общематематическом смысле). Скажем, что некоторая алгебраическая группа G имеет изображение в этой категории, если существует объект A из C, у которого полная группа автоморфизмов (биморфизмов на себя) изоморфна данной группе $\mathrm{aut}(A)\cong G$.

Определение 1.2. Скажем, что категория C структурируема, если в ней для некоторых пар объектов A,B определено отношение включения $A\subset B$, рефлексивное и транзитивное: $\forall A,B,C\ A\subset A;\ B\subset A\,\&\,C\subset B \Rightarrow C\subset A$, и каждой паре $A\subset B$ сопоставлено отображение $h:\mathrm{aut}(B)\to$ $\to\mathrm{aut}(A)$, которое является гомоморфизмом по операции итерации автоморфизмов.

Определение 1.3. Скажем, что алгебраическая группа G имеет действие на данном объекте A категории C, если полная группа автоморфизмов этого представителя содержит подгруппу, изоморфную этой группе $G \cong\subset \mathrm{aut}(A)$. Обозначение $G:A$.

Определение 1.4. Скажем, что действие группы $G:A$ на заданном объекте структурируемой категории C имеет изображение в этой категории, если имеется некоторый представитель B категории, включающий A, который является изображением группы G, и соответственный гомоморфизм группы автоморфизмов совпадает с действием группы: $h\circ\mathrm{aut}(B)\cong(G:A)$.

Определение 1.5. Объект данного класса называется жестким, если его группа автоморфизмов состоит из одного единичного морфизма.

Эта общая постановка позволяет рассматривать изображения групп и действий групп на различных классах топологических пространств или классах других *структурированных множеств* (графах, индукторных пространствах и т. п.). Для всех этих классов автоморфизм означает такую автобиекцию структурированного множества, при которой возникает биекция на элементах структуры. Например, для топологий возникает биекция множества открытых подмножеств, для графов — биекция стрел, для индукторных пространств — биекция элементов индукции. Отношение включения объектов во всех этих случаях означает порожденную структуру на подмножестве (подпространство, подграф и т. п.). Для четкости дадим общее определение категории структурированных множеств.

Определение 1.6. Пусть задано некоторое множество (носитель). Его подмножества назовем множествами первого уровня. Подмножества из совокупности множеств уровня k назовем множествами уровня $k+1$ для $k=1,\ldots$. Структурированным множеством уровня k назовем пару (носитель, множество уровня k). Множества меньших уровней, входящие в выделенное множество уровня k, назовем элементами структуры. Индуцированной структурой на подмножестве носителя назовем новый носитель (это подмножество) и множество уровня k, полученное из исходного заменой всех множеств первого уровня на их пересечения с этим подмножеством.

Например, топологии — это структурированные множества уровня 2 (элементы структуры — открытые множества). А графы и индукторные пространства — уровня 3 (носитель состоит из вершин и точек соответственно). Носитель с одним выделенным подмножеством имеет уровень 1 (например, бинарное отношение на прямом произведении двух множеств).

Определение 1.7. Рассмотрим два объекта из некоторой категории структурированных множеств. Их склейкой назовем множество, полученное как объединение этих множеств, с последующим отождествлением некоторых пар точек (элементов множеств), принадлежащих разным множествам. Новые точки, полученные отождествлением, назовем точками склейки. Множество структурных элементов склейки получено как объединение множеств структурных элементов исходных множеств, причем точка склейки входит во все элементы, в которые входили (по цепочке вложений) образовавшие ее точки (вместе или порознь). Склейку назовем допустимой, если она входит в исходную категорию.

Определение 1.8. Объекты категории изоморфны, если между ними существует биморфизм. Применительно к структурированным множествам изоморфизм означает существование биекции множеств, осуществляющей биекцию элементов структуры.

2. Предварительные замечания

Введем специальные условия, которым может (но не обязан) удовлетворять класс структурированных множеств.

1a. Для любой мощности M существует жесткий объект из C не меньшей мощности M' (далее H(M)-объект).

2a. Множество неизоморфных H(M)-объектов имеет мощность не меньше M.

3a. Существуют допустимые склейки, у которых в каждой точке t одного H(M)-объекта X есть склейка с некоторой точкой другого H(M)-объекта $X(t)$, причем при разных t они не изоморфны.

4a (усиление 3a). Для любой мощности M и для произвольного объекта X мощности не выше M из данного класса C существует допустимая склейка, в которой каждая точка $t\in X$ суть точка склейки с некоторой точкой из H(M)-объекта $X(t)$, причем при разных t они неизоморфны.

5a. Если в структурированном множестве, которое является объединением некоторой совокупности попарно непересекающихся H(M)-объектов, возможен автоморфизм, в котором точка одного объекта отображается в другой объект, то и весь первый объект отображается во второй. (На классе топологий это свойство соответствует связности H(M)-пространств.)

$$h\in \operatorname{aut}\cup_{i\in I} X_i;\quad i\neq j\Rightarrow X_i\cap X_j=\varnothing;\ \forall i\ X_i\in \mathrm{H(M)};$$

$$t\in X_i\ \&\ ht\in X_j\Rightarrow hX_i\subset X_j.$$

В работе [4] (для индукторных пространств в сильной аксиоматике — ранее в [1] применительно к указанным классам структурированных множеств был доказан следующий факт, который следует из формулировок и конструкции в доказательстве теорем.

Лемма 2.1. *Если на данном классе C структурированных множеств выполнены условия 1a, 2a, 3a, 5a, то на классе C любая алгебраическая группа имеет изображение. Если выполнены условия 1a, 2a, 4a, 5a, то любое действие группы на объекте из класса C имеет изображение.* ■

Замечание 2.1. Требование 2a не является необходимым, поскольку H(M)-объекты разных мощностей неизоморфны. Но тогда требование неизоморфности жестких объектов из условий 3a и 4a влечет введение множеств очень высоких мощностей (вида алеф с индексом M, где M, например, континуум). Такого рода «конструкции» безусловно спекулятивны даже в теории множеств. Использование условия 2a позволяет не слишком завышать мощность изображения по отношению к мощности группы и пространства ее действия. В основных случаях не более чем континуальных групп и действий удается не поднимать мощность изображения выше континуума. Во всех рассмотренных классах условие 2a можно легко обеспечить.

В работе [4] эти условия были доказаны для классов графов (конечных или бесконечных), колмогоровских топологий, индукторных пространств.

3. Жесткие множества в нормальной топологии

Определение 3.1. Ниже используется стандартное определение *нормальной топологии* (см., например [2]. Топология нормальна (имеет тип $T_4 + T_1$), если в ней каждая точка замкнута (тип T_1) и любые два непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся окрестности (тип T_4).

Замечание 3.1. Легко видеть, что нормальная топология на конечном множестве дискретна (каждая точка является своей окрестностью). Поэтому конечные изображения имеют только симметрические группы, ранг которых совпадает с мощностью пространства изображения. ■

Первые нетривиальные примеры нормальных топологических пространств возникают на счетных множествах. Например, рациональная прямая $\mathbb{Q}^1$ или ее отрезки. Однако из-за отсутствия связности в конструкциях на базе склеек таких пространств не удается удовлетворить условию 5a. Первые эффективные конструкции удается получить на базе действительного отрезка $\mathrm{D}^1 = [0;1] \subset \mathbb{R}$ или действительной окружности S^1.

Конструкция 3.1. В качестве стандартного блока примем S^1, попарно непересекающиеся экземпляры которого будем обозначать $B(m)$, где индекс m будет указывать место блока в конструкции. Конструкция будет определяться параметром, который определяется как произвольно заданная строго возрастающая последовательность простых чисел $\lambda = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ldots)$, где члены для удобства разбиты на тройки. Индекс блока имеет вид $m = (x_1, y_1, k_1; x_2, y_2, k_2; \ldots; x_n, y_n, k_n)$, где $x_i, y_i, k_i, n \in \mathbb{N}$, $(x_i / y_i) \in [0;1]$ — несократимая дробь, а на k_i наложено указанное ниже ограничение. Общую точку блока $B(m)$ обозначим так:

$$[m \mid r] = [x_1, y_1, k_1; \ldots; x_n, y_n, k_n \mid r] \in B(x_1, y_1, k_1; \ldots; x_n, y_n, k_n), \quad r \in [0;1]. \tag{3.1}$$

Сопоставим точке $[m \mid r]$, где $r = (x_{n+1} / y_{n+1})$, индекс по формуле, использующей параметр λ:

$$\nu(m \mid x_{n+1} / y_{n+1}) = \alpha_1^{x_1} \beta_1^{y_1} \gamma_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{x_n} \beta_n^{y_n} \gamma_n^{k_n} \alpha_{n+1}^{x_{n+1}} \beta_{n+1}^{y_{n+1}}. \tag{3.2}$$

Тогда для всех $i=1,\dots,n$ потребуем $k_i \le \nu(x_1,y_1,k_1;\dots;x_{i-1},y_{i-1},k_{i-1}\,|\,x_i\,/\,y_i)$, где индекс вычислен по (3.2) для точки блока $B(x_1,y_1,k_1;\dots;x_{i-1},y_{i-1},k_{i-1})$. Параметр $n=1,\dots$ не ограничен. Кроме того, введем корневой блок $B(\varnothing)$ с $n=0$ и точками $[\,|\,r]$, $r\in[0;1]$.

Заметим, что индексы имеют все и только рациональные точки (3.1) любого блока $B(m)$ с параметром $r=(x_{n+1}\,/\,y_{n+1})$. Для иррациональных точек можно положить индекс 0. Поскольку блоки являются топологическими окружностями, проведем склейку $[m\,|\,0]\equiv[m\,|\,1]$, и положим индекс этих рациональных точек также 0. Этим, дополнительно, снимается неоднозначность представления концов отрезка в форме неприводимой дроби. По аналогии с индексом точки можно ввести номер блока:

$$\nu(m)=\alpha_1^{x_1}\beta_1^{y_1}\gamma_1^{k_1}\dots\alpha_n^{x_n}\beta_n^{y_n}\gamma_n^{k_n}\,;\quad \nu(\varnothing)=_{def}1; \tag{3.3}$$

$$\nu(m\,|\,x_{n+1}\,/\,y_{n+1})=\nu(m)\alpha_{n+1}^{x_{n+1}}\beta_{n+1}^{y_{n+1}}. \tag{3.4}$$

Для получения связного пространства произведем склейки точек:

$$[x_1,y_1,k_1;\dots;x_n,y_n,k_n\,|\,0]\equiv[x_1,y_1,k_1;\dots x_{n-1},y_{n-1},k_{n-1}\,|\,x_n\,/\,y_n]. \tag{3.5}$$

Конструкция завершена. Семантически она представляет собой склейку счетного количества действительных топологических окружностей. К каждой рациональной точке любой окружности приклеены своими нулевыми точками другие окружности в конечном числе. Это число равно индексу точки. Выбор параметра λ и нумерации ν по (3.2) позволяет утверждать, что к любым двум разным рациональным точкам приклеено разное количество окружностей, независимо от того, принадлежат они одному блоку или разным. Индекс m блока $B(m)$ показывает путь по точкам склейки до нулевой точки этого блока от корневого блока $B(\varnothing)$. Построенное топологическое пространство обозначим $T(\lambda)$. ■

Определение 3.1. Пусть задано некоторое топологическое пространство T, допускающее непрерывное вложение действительных окружностей (циклы). Тогда в каждой точке можно определить группу гомотопий. Назовем *простым циклом* непрерывную в обе стороны биекцию окружности в T. Подгруппа $G(t)$ гомотопий точки $t\in T$, порожденная простыми циклами, является топологическим инвариантом гомеоморфизмов.

Для точки $[m\,|\,r]\in T(\lambda)$ число образующих (ранг) группы $G([m\,|\,r])$ равно $\nu([m\,|\,r])+1$. Тогда легко доказуемы следующие утверждения.

Лемма 3.1. *Пространство $T(\lambda)$ жесткое. (Следует из вышесказанного, поскольку на всюду плотном множестве точек ранг $G([m\,|\,r])$ уникален.)*

Лемма 3.2. *Пространство $T(\lambda)$ связное. (Оно получено склейкой связных пространств со связным графом склейки.)*

Лемма 3.3. *Если в двух значениях λ', λ'' параметра λ выполнено $\alpha'_1\ne\alpha''_1$ и(или) $\beta'_1\ne\beta''_2$, то пространства $T(\lambda'), T(\lambda'')$ неизоморфны. (Индексы любых двух точек из разных пространств различны.)*

Лемма 3.4. *Каждое из пространств $T(\lambda)$ имеет нормальный тип отделимости. (Оно получено одноточечными склейками нормальных пространств.)*

4. Генерация серии жестких пространств нормального типа

Определение 4.1. Для построения серии нормальных жестких пространств произвольной мощности и серии неизоморфных попарно таких пространств произвольно фиксированной мощности зададим три параметрические последовательности $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, у которых $x_{1.4}<x_{2.1}$; $x_{2.4}<x_{3.1}$,

где первый индекс обозначает номер параметра λ. При таком выборе параметров в силу монотонности последовательностей простых чисел в каждом параметре и определении нумерации по (3.2) любая пара точек из двух пространств с разными параметрами имеет разные индексы. Таким образом, эти пространства неизоморфны. Назовем: $T(\lambda_1)$ — блоком основного типа, $T(\lambda_2)$ — блоком связи, $T(\lambda_3)$ — модифицирующим блоком. В приведенной ниже конструкции будут использованы сингулярные экземпляры всех этих типов в неограниченном количестве.

Выберем в пространствах типа $T(\lambda_1)$ и $T(\lambda_3)$ две точки с индексом 0 и назовем их *концевыми*. Для определенности обозначим их $t^* = [\varnothing | 0]$, $t^\circ = [\varnothing | \sqrt{2}-1]$. Аналогично для $T(\lambda_2)$ выберем различные концевые точки с ненулевыми индексами $t^* = [\varnothing | 1/3]$, $t^\circ = [\varnothing | 2/3]$ («*начало*» и «*конец*» связи).

Стандартной связью $(T_1, T_2)T_3$ двух основных блоков T_1 и T_2 назовем их объединение с третьим блоком T_3 связи, в котором проведены склейки концевых точек $t_3^* \equiv t_1^\circ$, $t_3^\circ \equiv t_2^*$. ■

Замечание 4.1. Стандартная связь не симметрична, поскольку после склейки концевые точки имеют разные индексы и при любом автоморфизме пространства, содержащего стандартную связь, они могут отображаться только в точки с индексами начала и конца $T(\lambda_3)$ соответственно: $(T_1, T_2)T_3 \neq\sim (T_2, T_1)T_3$.

Конструкция 4.1. Построение нормальных жестких пространств X_n произвольной мощности. Данная конструкция использует трансфинитные числа в аксиоматике Цермело–Френкеля. Рассмотрим произвольный ординал n заданной мощности. Зададим совокупность основных блоков $\{T_i | i \le n\}$ и множество блоков связи $\{T_{i.j} \,|\, i, j \le n, i < j\}$. Установим стандартные связи между всеми парами блоков вида $\{(T_i, T_j)T_{i.j} \,|\, i, j \le n, i < j\}$.

Лемма 4.1. *Все пространства* X_n, *где* n *— произвольный ординал, жесткие.*

Доказательство. Заметим, что блоки всех видов могут отображаться в блоки того же вида только целиком из-за несоответствия индексов точек в блоках разного типа и разных частях блоков одного вида. Если при автоморфизме h хотя бы один основной блок изменит положение, то (в силу биективности автоморфизма) должна возникнуть минимум одна инверсия $i < j, h(i) > h(j)$. Но по замечанию 4.1 при этом блок связи $T_{i.j}$ не может отобразиться в блок связи $T_{h(j).h(i)}$. ■

Конструкция 4.2. Построение серии попарно неизоморфных нормальных жестких пространств X_n заданной мощности. Рассмотрим пространство X_n (конструкция 4.1 для заданной мощности). Выберем произвольно ординал $i \le n$. Заменим соответствующий основной блок T_i на модифицирующий блок T_i'. Доказательство замечания 4.1 и леммы 4.1 сохраняет силу. Поэтому новое пространство $X_n(i)$ остается жестким и имеет ту же мощность, что и исходное X_n. Можно считать, что $X_n(0) = X_n$.

Лемма 4.2. *Конструкция 4.2 дает* $n+1$ *попарно неизоморфных жестких пространств мощности* $\#n \cdot C$ *каждое.*

Доказательство. В силу жесткости, при изоморфизме $X_n(i)$ и $X_n(j)$, $j \ne i$, блок модификации $T(i)_i$ должен изоморфно отобразиться на основной блок $T(j)_i$, что невозможно по выбору параметров блоков (определение 4.1). ■

Поскольку выполнены все условия 1a–5a (раздел 2), то по лемме 2.1 доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Любая алгебраическая группа и любое действие группы на топологическом нормальном (или хаусдорфовом) пространстве имеют, соответственно, нормальное (или хаусдорфово) изображение.*

Поддержано РФФИ, проект № 07-01-00101-а.

Список литературы

1. *Коганов А. В*. Индукторные пространства как средство моделирования // Вопросы кибернетики (Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование) / В. Б. Бетелин (ред.). М.: РАН, 1999. С. 119–181.
2. Отделимости аксиомы // Математический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1988. С. 443–444.
3. *Frucht R.* Herstellung von Graphen mit vogegebener abstracten Grouppe // Compositio Math. 1938. Vol. 6. P. 239–250.
4. *Koganov A. V.* Faithful Representations of Groups by Automorphisms of Topologies // Russian Journal of Mathematical Physics. 2008. Vol. 15, № 1. P. 66–76.
5. *Koning D.* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.