

## Точные решения модели Экмана трехмерного ветрового движения однородной жидкости с учетом геострофической составляющей

Л. А. Компаниец<sup>1,a</sup>, О. С. Питальская<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительного СО РАН,  
660036, г. Красноярск, Академгородок, ИВМ СО РАН

E-mail: <sup>a</sup> kla@icm.krasn.ru

Получено 24 июня 2008 г.

Первое решение для ветрового движения однородной жидкости было найдено в 1905 г. Экманом и представляло собой сумму двух слагаемых: дрейфовой составляющей, определяемой напряжением ветра, и геострофической, определяемой наклоном свободной поверхности. Дрейфовая составляющая определяется конкретной формулой и легко поддается анализу. Нахождение геострофической составляющей требует решения уравнения эллиптического типа в области, ограниченной береговой линией, и представляет собой более сложную задачу. В данной работе приводятся примеры областей и ветровых напряжений, когда уравнения для нахождения геострофической составляющей решаются аналитически.

Ключевые слова: ветровое движение жидкости, модель Экмана

### Exact solutions of Ekman's model for three-dimensional wind-induced flow of homogeneous fluid with geostrophic current

L. A. Kompaniets<sup>1</sup>, O. S. Pitalskaya<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute of computational modeling SB RAS, ICM SB RAS, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russia

**Abstract.** — The first solution for wind-induced flow of homogeneous fluid was found in 1905 by Ekman and it involved the sum of two components: the drift current determined by wind stress and the geostrophic current determined by slope of the free surface. Drift current is defined by the specific formula and can be easily analyzed. In order to find the geostrophic current it is necessary to solve an elliptic type equation in the area bounded by coastline and it is a more difficult problem. In this paper examples of areas and wind stresses are given for the case when the equations for finding the geostrophic current are solved analytically.

Key words: wind-induced flow, Ekman's model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 1, pp. 57–66 (Russian).

В книге [1] приведен пример вращения однородной жидкости в круговом цилиндре с ровным дном под действием ветра, задаваемого формулой

$$\frac{\tau_x}{\rho_0} = -y, \quad \frac{\tau_y}{\rho_0} = x. \quad (1)$$

Такое решение представляет собой скорее теоретический интерес, чем практический. Рассмотрим более приближенную к практике ситуацию, когда движение происходит в бассейне прямоугольной формы и напряжение ветра отражает реальный процесс.

Рассмотрим систему уравнений Экмана, описывающую стационарное движение однородной жидкости для случая постоянного коэффициента турбулентного обмена:

$$K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - g v, \\ K_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + g u.$$

Здесь  $x, y$  — горизонтальные координаты,  $u, v$  — соответствующие скорости,  $z$  — вертикальная координата, направленная вверх,  $\zeta$  — возвышение свободной поверхности,  $l$  — параметр Кориолиса. В комплексных обозначениях

$$w = u + iv, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

запишем уравнения и граничные условия для этой задачи:

$$K_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - ilw = g \frac{\partial \zeta}{\partial n}, \\ K_z \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau^w}{\rho_0}, \quad \tau^w = \tau_x + i\tau_y, \\ w \Big|_{z=-H} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\tau^w$  — напряжение ветра,  $\rho_0$  — средняя плотность,  $H$  — глубина бассейна,  $H = \text{const}$ .

Известно [2], что решение имеет вид

$$w = \frac{1}{\sqrt{ilK_z}} \frac{\sinh \sqrt{\frac{il}{K_z}}(H+z)}{\cosh \sqrt{\frac{il}{K_z}}H} \frac{\tau^w}{\rho_0} - \frac{ig}{l} \frac{\cosh \sqrt{\frac{il}{K_z}}z}{\cosh \sqrt{\frac{il}{K_z}}H} \frac{\partial \zeta}{\partial n}. \quad (3)$$

Интегрируя (3) по глубине ( $-H$  до  $0$ ), получаем

$$W = U + iV = \int_{-H}^0 w dz = \frac{A}{l} \frac{\tau^w}{\rho_0} + \frac{ghB}{l} \frac{\partial \zeta}{\partial n}, \quad (4)$$

где  $A$  и  $B$  — функции только  $\frac{H}{d}$ ,  $d = \pi \sqrt{\frac{2K_z}{l}}$ .

Запишем функции  $A, B$  в комплексном виде:

$$A = C + iD, \quad B = E + iF,$$

тогда уравнение (4) можно переписать следующим образом:

$$U = \frac{1}{l} \left( C \frac{\tau_x}{\rho_0} - D \frac{\tau_y}{\rho_0} \right) + \frac{gH}{l} \left( E \frac{\partial \zeta}{\partial x} - F \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \\ V = \frac{1}{l} \left( D \frac{\tau_x}{\rho_0} + C \frac{\tau_y}{\rho_0} \right) + \frac{gH}{l} \left( F \frac{\partial \zeta}{\partial x} + E \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \quad (5)$$

где коэффициенты  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$  определяются по формулам [2]

$$\begin{aligned} C &= \frac{2 \sin \pi \frac{H}{d} \sinh \pi \frac{H}{d}}{\cos 2\pi \frac{H}{d} + \cosh 2\pi \frac{H}{d}}, & D &= \frac{2 \cos \pi \frac{H}{d} \cosh \pi \frac{H}{d}}{\cos 2\pi \frac{H}{d} + \cosh 2\pi \frac{H}{d}} - 1, \\ E &= \frac{1}{2\pi \frac{H}{d}} \frac{\sin 2\pi \frac{H}{d} - \sinh 2\pi \frac{H}{d}}{\cos 2\pi \frac{H}{d} + \cosh 2\pi \frac{H}{d}}, & F &= -\frac{1}{2\pi \frac{H}{d}} \frac{\sin 2\pi \frac{H}{d} + \sinh 2\pi \frac{H}{d}}{\cos 2\pi \frac{H}{d} + \cosh 2\pi \frac{H}{d}} + 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Для нахождения градиентов свободной поверхности необходимо решить уравнение для функции тока, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{l} \left( G \operatorname{curl} \frac{\tau^w}{\rho_0} + I \operatorname{div} \frac{\tau^w}{\rho_0} \right), \quad (7)$$

где

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad G = C + \frac{F}{E} D, \quad I = D - \frac{F}{E} C,$$

$$\operatorname{curl} \tau^w = \frac{\partial \tau_y^w}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x^w}{\partial y},$$

$$\operatorname{div} \tau^w = \frac{\partial \tau_x^w}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y^w}{\partial y}.$$

Граничные условия на береговой линии  $\psi(x, y)|_{\Gamma} = 0$ .

Обозначим

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{l} \left( G \operatorname{curl} \frac{\tau^w}{\rho_0} + I \operatorname{div} \frac{\tau^w}{\rho_0} \right). \quad (8)$$

Уравнение (7) — это уравнение Пуассона, и если береговая линия представляет собой прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ , то его решение можно выписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= -\frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \alpha(\xi, \eta) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{b} \eta}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} d\eta d\xi = \\ &= -\frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \int_0^a \int_0^b \alpha(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\eta d\xi = \\ &= -\frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{nm} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}, \end{aligned}$$

где  $\psi_{nm}$  — коэффициенты разложения функции  $\alpha(x, y)$  (8) в ряд Фурье по  $\sin \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{b} y$ :

$$\psi_{nm} = \int_0^a \int_0^b \alpha(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\eta d\xi.$$

Зная  $\psi_{nt}$ , найдем, используя (5),

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{l} (D\tau_x^w + C\tau_y^w) - \frac{gH}{l} E \frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{gH}{l} F}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{\frac{1}{l} F (C\tau_x^w - D\tau_y^w) - \frac{1}{l} E (D\tau_x^w + C\tau_y^w) + (F \frac{\partial \psi}{\partial y} + E \frac{\partial \psi}{\partial x})}{\left(\frac{gH}{l}\right) (F^2 + E^2)}.\end{aligned}\quad (9)$$

С учетом (6) и (9) решение однозначно определяется по формуле (3).

Рис. 1, 2, как и дальнейшие, сделаны при следующих значениях параметров: глубина  $H=50$  м, коэффициент турбулентного обмена  $K_z=0.02$  м<sup>2</sup>/с,  $l=0.00015$  с<sup>-1</sup>,  $\rho_0=1000$  кг/м<sup>3</sup>, рассматривался прямоугольный бассейн со сторонами  $a=b=1250$  м.

Рис. 1 соответствует напряжению ветра  $\tau_y=0$ ,  $\tau_x=0.038 \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{20}} \left(1-\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{20}}$  кг/(м·с<sup>2</sup>), рис. 2 соответствует напряжению ветра  $\tau_y=0$ ,  $\tau_x=0.038 \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{20}} \left(1-\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{20}} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{20}} \left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{20}}$  кг/(м·с<sup>2</sup>). Изображено распределение горизонтальной составляющей скорости для трех глубин.

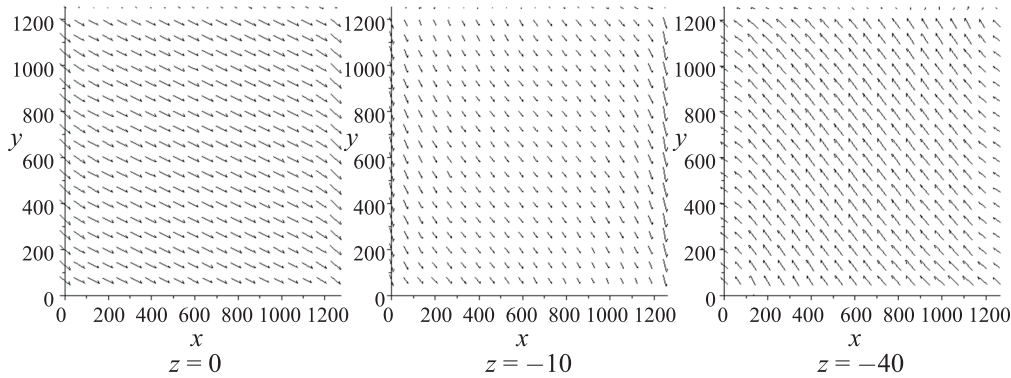


Рис. 1

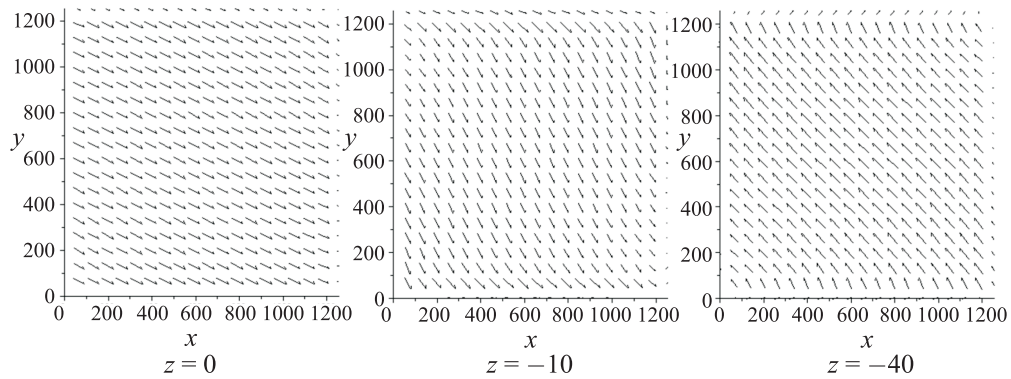


Рис. 2

Рисунки демонстрируют, с одной стороны, основной эффект учета параметра Кориолиса — поворот скорости течения на поверхности по отношению к направлению ветра, с другой — влияние границ.

Рассмотрим также вариант, когда напряжение ветра задается формулой (1). Тогда получим распределение скоростей, показанное на рис. 3. Сравним это движение с движением в круговом цилиндре радиуса  $R=625$  (рис. 4) [1].

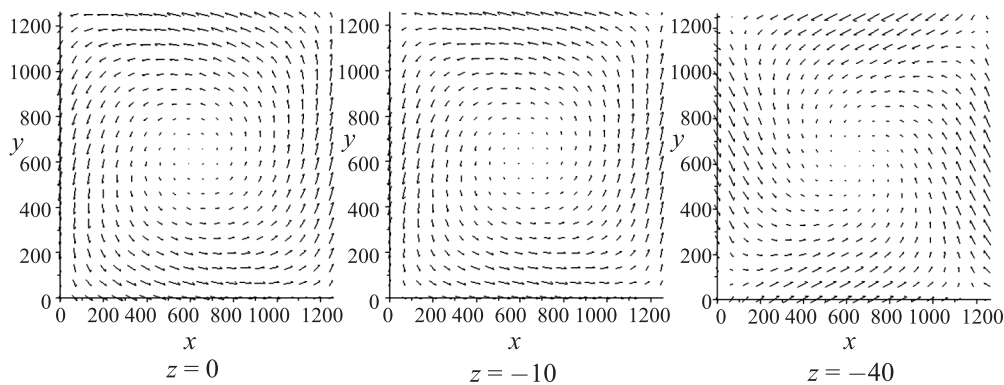


Рис. 3

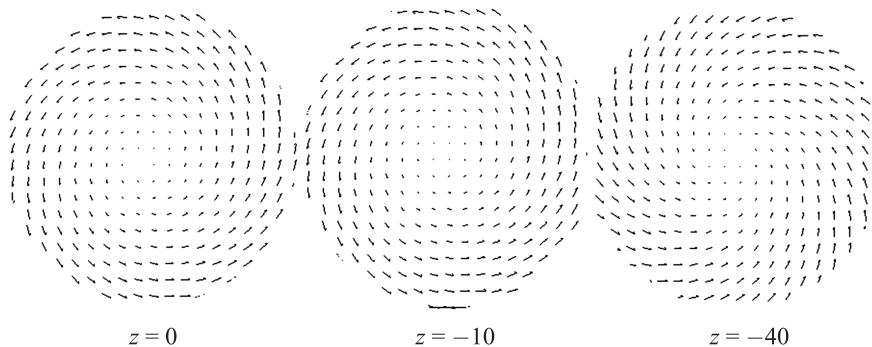


Рис. 4

Сравнение рисунков 3 и 4 показывает, как при этом граница влияет на течение.

Рассмотрим случай, когда касательное напряжение ветра на водной поверхности задано постоянно и действует только вдоль оси  $OX$ :

$$\beta_1 = \frac{\tau_x}{\rho_0} = \frac{\tau_0^w}{\rho_0}, \quad \beta_2 \equiv 0.$$

Такие значения часто берутся для того, чтобы проверить работоспособность численного алгоритма, но точное решение этой задачи до сих пор было неизвестно.

Тогда уравнение (7) для функции тока  $\psi$  примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

и, следовательно, величины  $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}$  можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= -\frac{\frac{1}{l} D \tau_x^w + \frac{gH}{l} E \frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{gH}{l} F}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{\frac{1}{l} E \cdot D \cdot \tau_x^w - \frac{1}{l} F \cdot C \cdot \tau_x^w}{\frac{gH}{l} (F^2 + E^2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (10), решение однозначно определяется по формуле (3).

Рисунки 5, 6 сделаны при напряжении ветра  $\tau_y = 0, \tau_x = 0.038 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2)$ .

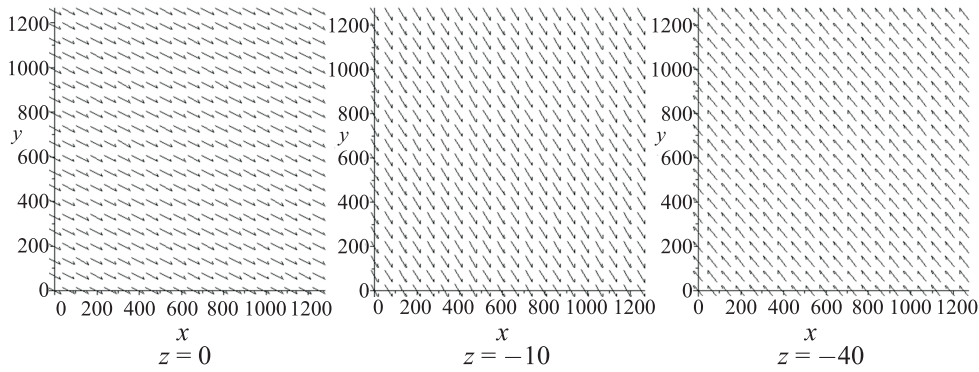


Рис. 5

Рассмотрим ветровое движение жидкости в случае, когда влиянием сил Кориолиса можно пренебречь ( $l=0$ ). Тогда получим систему уравнений экмановского типа

$$\begin{cases} K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ K_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = g \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{cases} \quad (11)$$

Для системы уравнений (11) решение имеет вид

$$\begin{aligned} u &= g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \int_{-H}^z \frac{\xi}{K_z} d\xi + \frac{\tau_x(x, y)}{\rho_0} \int_{-H}^z \frac{1}{K_z} d\xi, \\ v &= g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \int_{-H}^z \frac{\xi}{K_z} d\xi + \frac{\tau_y(x, y)}{\rho_0} \int_{-H}^z \frac{1}{K_z} d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Выпишем уравнение для функции тока

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \left( \left( \frac{\tau_x}{\rho_0} \right)_y - \left( \frac{\tau_y}{\rho_0} \right)_x \right) \cdot \int_{-H}^0 \left( \int_{-H}^z \frac{1}{K_z} d\xi \right) dz. \quad (13)$$

Это уравнение решается в области, ограниченной береговой линией, на которой ставится условие  $\psi|_{\Gamma} = 0$ .

Рассмотрим случай, когда функции  $\beta_1, \beta_2$  имеют вид

$$\beta_1 = \frac{\tau_x}{\rho_0} = \frac{\tau_0^w}{\rho_0} \left( \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{20}} \left( 1 - \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{20}}, \quad \beta_2 \equiv 0.$$

Тогда уравнение (13) примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \frac{H^2}{2K_z} \cdot \frac{\tau_0^w}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{20}} \left( 1 - \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{20}} \right). \quad (14)$$

Обозначим

$$\alpha(y) = - \frac{H^2}{2K_z} \cdot \frac{\tau_0^w}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{20}} \left( 1 - \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{20}} \right).$$

Уравнение (13) — это уравнение Пуассона, и, следовательно, его решение в прямоугольной области можно найти по формуле

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= -\frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \alpha(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{b} \eta}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} d\xi d\eta = \\ &= -\frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \int_0^a \int_0^b \alpha(\eta) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\xi d\eta = \\ &= -\frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{nm} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2},\end{aligned}$$

где  $\psi_{nm}$  — коэффициенты разложения функции  $\alpha(y)$  в ряд Фурье по  $\sin \frac{m\pi}{b} y$ :

$$\psi_{nm} = \int_0^a \int_0^b \alpha(\eta) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\xi d\eta.$$

Зная  $\psi_{nm}$ , найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y} + \beta_1 \frac{H^2}{2K_z}}{g \frac{H^3}{3K_z}}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{g \frac{H^3}{3K_z}}.\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}u &= g \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{z^2 - H^2}{2K_z} + \frac{\tau_x}{\rho_0 K_z} (z + H), \\ v &= g \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{z^2 - H^2}{2K_z}.\end{aligned}\tag{15}$$

Рисунок 6 соответствует напряжению ветра  $\tau_y = 0$ ,  $\tau_x = 0.038 \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{20}} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{20}}$  кг/(м·с<sup>2</sup>), рисунок 7 — напряжению ветра  $\tau_y = 0$ ,  $\tau_x = 0.038 \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{20}} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{20}} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{20}} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{20}}$  кг/(м·с<sup>2</sup>).

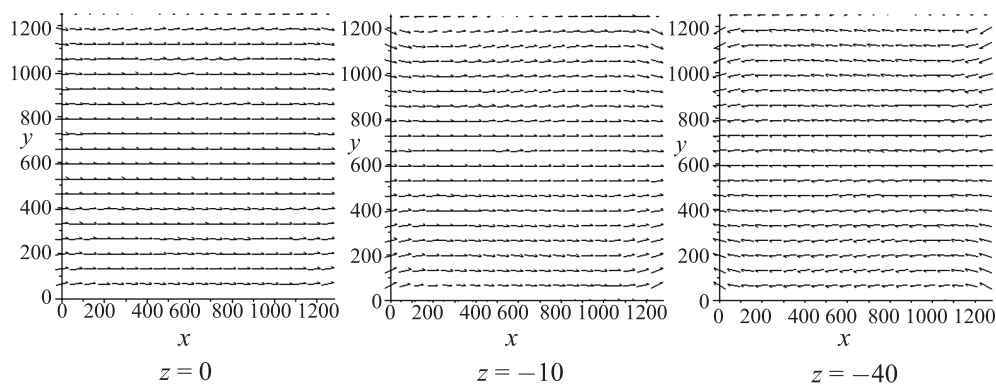


Рис. 6

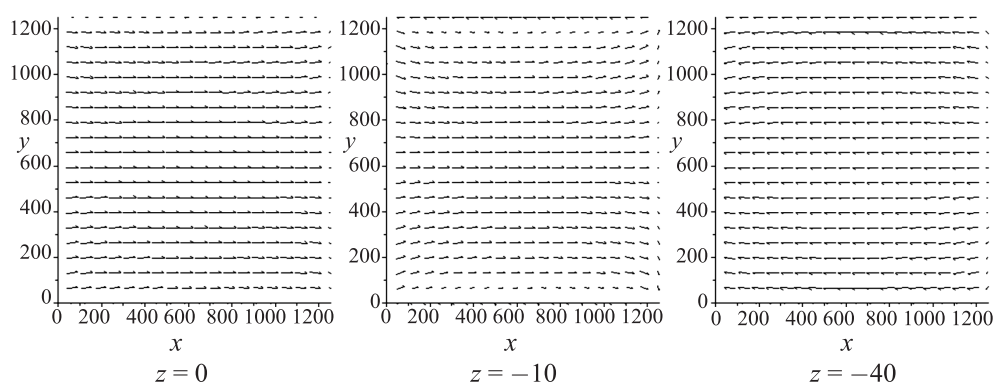


Рис. 7

Рассмотрим случай, когда напряжение ветра задается формулой (1). Тогда получим распределение скоростей, показанное на рис. 8.

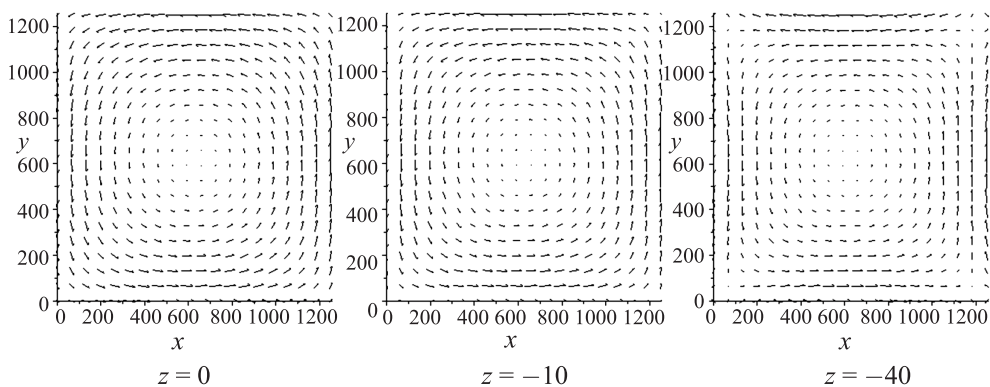


Рис. 8

Сравним это движение с движением в круговом цилиндре [1] глубиной  $H = 50$  и радиусом  $R = 625$  м (рис. 9).

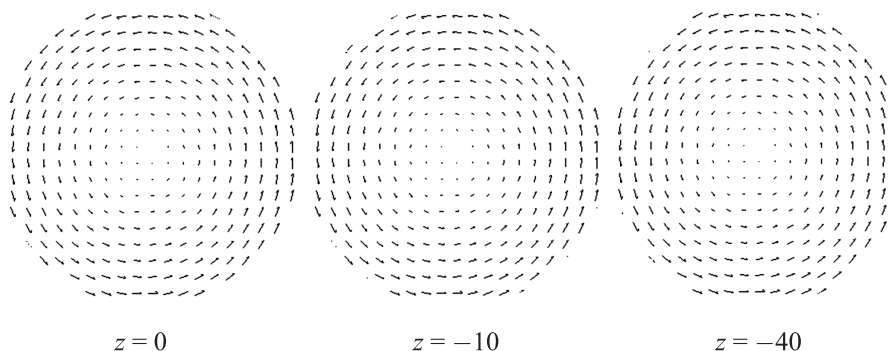


Рис. 9

Отчетливо видно различие этих течений в прибрежной зоне.

Если ветер постоянен вдоль всей акватории бассейна и ветровое напряжение задается формулой

$$\beta_1 = \frac{\tau_x}{\rho_0} = \frac{\tau_0^w}{\rho_0}, \quad \beta_2 \equiv 0,$$



тогда уравнение (14) для функции тока  $\psi$  примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

и, следовательно, величины  $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}$  можно найти по формулам (15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\beta_1 \frac{H^2}{2K_z}}{g \frac{H^3}{3K_z}}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом (16) распределение скорости по глубине записывается в виде

$$u = g \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{z^2 - H^2}{2K_z} + \frac{\tau_x}{\rho_0 K_z} (z + H), \quad v = 0.$$

Рис. 10 соответствует напряжению ветра  $\tau_y = 0, \tau_x = 0.038 \text{ кг/(м·с}^2\text{)}$ .

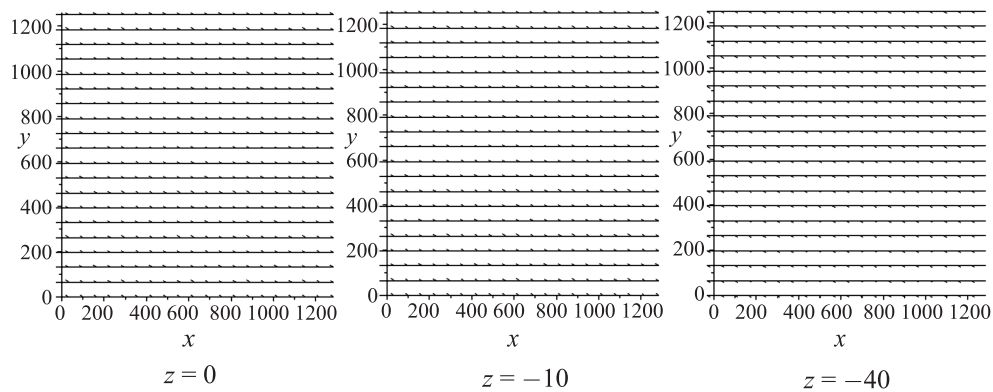


Рис. 10

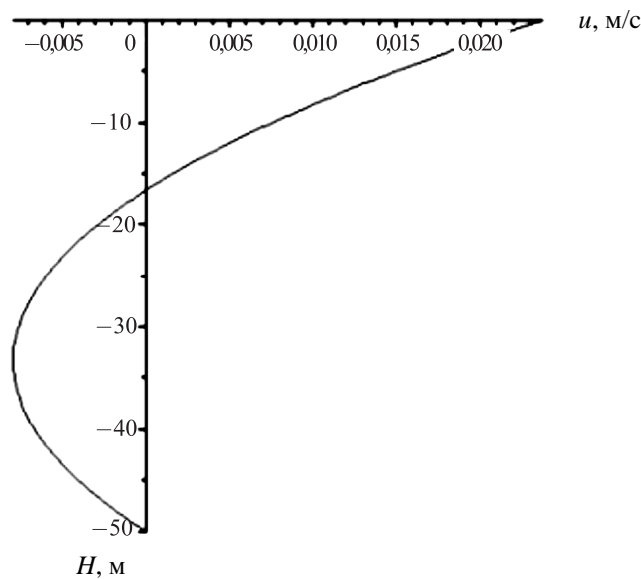


Рис. 11

На рис. 10 показано поведение скорости в горизонтальной плоскости, а на рис. 11 изображено распределение компоненты скорости  $u$  по глубине. Рисунки демонстрируют, что скорости направлены одинаково во всех точках горизонтальных сечений бассейна, а рис. 11 демонстрирует типичное распределение скорости по глубине для случая движения в вертикальной плоскости, и это неудивительно. Легко показать, что в данном случае трехмерное течение сводится к двумерному. В самом деле, пусть ветер постоянен вдоль всей акватории водоема и направлен вдоль оси  $Ox$ . Тогда  $\psi = 0$ , и, подставляя значения наклонов свободной поверхности (16) в формулу (12), получаем

$$\begin{aligned} u &= \frac{\tau_x}{\rho_0 K_z} \left( \frac{3}{4} \frac{z^2 - H^2}{H} + (z + h) \right) = \\ &= \frac{\tau_x}{\rho_0 K_z} \left( \frac{3}{4} \frac{z^2}{H} + z + \frac{H}{4} \right), \\ v &= 0, \end{aligned}$$

что полностью аналогично случаю течения в вертикальной плоскости.

## Заключение

Найденные аналитические решения для ветрового движения однородной жидкости позволяют определить влияние границы водоема на течение жидкости, что невозможно, если анализируется только дрейфовая составляющая, и могут быть использованы для отладки численных алгоритмов. Также решен вопрос о возможности применения более простых двумерных моделей вместо сложных трехмерных. Это возможно, если параметр Кориолиса равен нулю и ветер постоянен вдоль всей акватории бассейна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 07-01-00153, Междисциплинарный интеграционный проект № 95.

## Список литературы

1. Компаниец Л. А., Якубайлик Т. В., Гаврилова Л. В., Гуревич К. Ю. Модели экмановского типа в задачах гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2007.
2. Welander P. Wind action on a shallow sea: some generalisations of Ekman's theory / P. Welander // *Tellus XX*. 1968. Vol. 1. P. 1–16.