

УДК: 519.713.5

Модели клеточных автоматов

А. И. Лобанов

Московский физико-технический институт,
Россия, 141700, Долгопрудный, пер. Институтский, 9

E-mail: alexey@crec.mipt.ru

Получено 15 сентября 2010 г.

Обзор содержит введение в модели клеточных автоматов. Описаны три автомата на плоскости: клеточный автомат Винера–Розенблута, игра «Жизнь» и автомат Кохомото–Ооно для моделирования систем «реакция–диффузия». Построены обобщения клеточного автомата игры «Жизнь» на случай пространства произвольной размерности и автомата Кохомото–Ооно для случая трех пространственных измерений.

Ключевые слова: клеточные автоматы, автомат Винера–Розенблута, игра «Жизнь», реакция–диффузия

Model of cellular automata

A. I. Lobanov

Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskii per, Dolgoprudny, 141700, Russia

Abstract. — An introduction to the models of cellular automata is given. The three automata described on the plane are: Viner-Rosenbluth cellular automata, the game of Life and Kohomoto-Oono automata for modelling «reaction-diffusion» systems. There is built the generalization of cellular automata of the game of Life to arbitrary dimension of space and the generalization of Kohomoto-Oono automata in 3D.

Keywords: cellular automata, Viner-Rosenbluth automat, game of Life, reaction-diffusion

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 3, pp. 273–293 (Russian).

Понятие о клеточных автоматах

Математические модели типа «клеточных автоматов» в последнее время широко применяются для моделирования систем типа «реакция-диффузия». Кроме того, модели клеточных автоматов применяются при моделировании процессов в нанотехнологиях, при моделировании дорожного движения. Математические модели теории перколяции («просачивания») также можно отнести к моделям типа клеточных автоматов.

Рассмотрим процедуру построения подобной модели из общих соображений, а затем обсудим свойства получаемых моделей.

Рассмотрим однородный ареал обитания некоторых травоядных животных. Пусть на некоторой территории при оптимальной плотности популяции, пищевых ресурсов для этих животных хватает на время t_1 , после чего требуется время t_2 на восстановление запасов пищи.

Разобьем территорию обитания вида на клетки со стороной 1 (условия единица). Можно считать, что размеры ареала отнормированы на величину порядка среднего радиуса индивидуальной активности животного. Будем считать, что каждая клетка может находиться либо в заселенном состоянии (возбуждения, оптимальной численности популяции), либо в незаселенном состоянии (покоя, нет особей, есть только кормовой ресурс), либо в состоянии возобновления ресурса (рефрактерном). Будем считать, что клетки среды заселяются по следующим правилам.

1. Заселиться может только незаселенная клетка (рефрактерные клетки не заселяются).
2. Через время t_1 возбуждение клетки переходит в состояние рефрактерности.
3. Через время t_2 рефрактерные клетки переходят в состояние покоя.

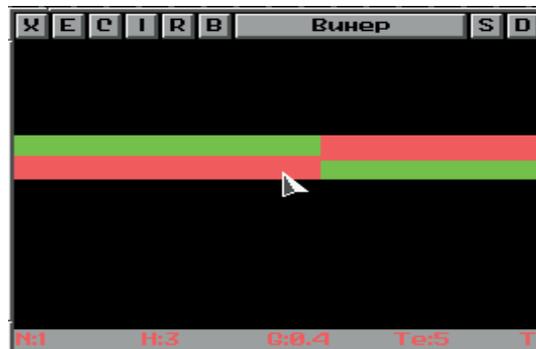


Рис. 1. «Двухрукавная спиральная волна». Момент $t = 1$

Очевидно, что подобная модель не в состоянии обеспечить предсказание количественных характеристик процессов, с ее помощью лишь возможно исследовать (имитировать) качественное поведение системы. Замечательно, что это поведение довольно сложно, возможна нетривиальная динамика, существенно зависящая от начальных условий и соотношения параметров t_1 и t_2 .

Так, при $t_1 \approx t_2$ и начальной конфигурации, показанной на рис. 1, точка, которая соседствует и с двумя возбужденными участками, и с двумя рефрактерными, будет являться центром образующейся в системе спиральной волны. (Читателю предлагается подумать, почему в системе формируется двухрукавная спиральная волна.)

Описанный клеточный автомат (Н. Винера и А. Розенблюта) строился из некоторых соображений экологического характера. Однако ему можно придать ряд истолкований, включая

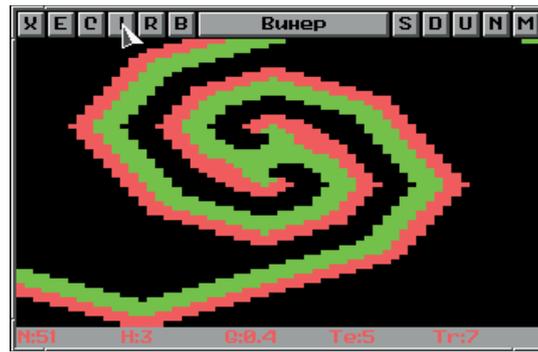


Рис. 2. «Двухрукавная спиральная волна». Момент $t = 21$

Рис. 3. «Двухрукавная спиральная волна». Момент $t = 51$

качественную модель распространения возбуждения в коре головного мозга или протекания реакции Белоусова–Жаботинского [Лоскутов, Михайлов, 1989; Ахромеева и др., 1992]. Развитие спиральной волны, возникшей при эволюции системы, в два момента времени показано на рис. 2 и 3.

Авторы феноменологической модели исследования реакции Белоусова–Жаботинского [Ахромеева и др., 1992; Оно, Kohomoto, 1962] предположили, что сосредоточенная (точечная) модель обладает автокаталитической кинетикой, а причиной сложного пространственно-временного поведения оказываются диффузионные процессы.

В одномерном случае система разбивается на одинаковые клетки. Состояние n -й клетки в момент времени t (время в данной модели, конечно, дискретно) определяется неотрицательной функцией $A(n, t)$. Значение $A(n, t + 1)$ определяется по предыдущему состоянию по следующим правилам:

$$A'(n, t) = \frac{\alpha}{2}[A(n + 1, t) + A(n - 1, t)] + (1 - \alpha)A(n, t), \tag{1}$$

$$A(n, t + 1) = F(A'(n, t)). \tag{2}$$

Предварительный этап (1) моделирует диффузию. Второй этап схематично описывает протекание химической реакции, функция F задается как

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1,5; \\ 0, & 0,5 \leq x < 1,5; \\ M, & x < 0,5. \end{cases} \tag{3}$$

По замыслу авторов, множитель α определяет величину коэффициента диффузии системы, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Для читателей, знакомых с основами применения численных методов для решения уравнений в частных производных, должно быть очевидным сходство предварительного этапа (1) с явной разностной схемой для решения уравнения диффузии, при этом α играет роль удвоенного параболического числа Куранта.

Как известно, эта схема устойчива при $\alpha \leq 1$, более того, она становится *монотонной* (т. е. все коэффициенты перед $A(j, t)$ в правой части становятся неотрицательными). Таким образом, становится ясным смысл ограничения $0 \leq \alpha \leq 1$: значения $A'(n, t)$ становятся неотрицательными и не могут возрастать неограниченно на каждом шаге (см. также Приложение 1).

При $\alpha = 0$ диффузия в системе отсутствует, и правила перехода определяются уравнением (2), т. е. дискретным отображением. Нарисовав график итераций (*диаграмму Ламерея*,

см. Приложение 1) этого отображения, видим, что при $M > 1$ существует единственный устойчивый цикл периода 3:

$$0 \rightarrow M \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

В зависимости от M , α в автомате (1–2) могут существовать циклы с периодом 3 (очевидно, в случае малых α), волновые процессы и «турбулентные режимы» [Oono, Kohomoto, 1962]. Далее мы вернемся к двумерному обобщению данного автомата.

Интересно, что определение клеточного автомата является весьма общим, и в класс «клеточных автоматов» могут быть включены и объекты, изучаемые в других разделах. В соответствии с [Лоскутов, Михайлов, 1989] под клеточными автоматами понимаются сети элементов, меняющих свое состояние в последовательные дискретные моменты времени по определенному закону в зависимости от того, каким было состояние рассматриваемого элемента и его соседей в предыдущий дискретный момент времени.

Под соседями для элемента j , в свою очередь, понимаются фиксировано заданные элементы некоего множества $\theta(j)$.

Для клеточного автомата определяется закон перехода

$$a(j, t + 1) = F \left(a(j, t), \sum_{i \in \theta(j)} a(i, t) \right) \quad (4)$$

для детерминированного автомата или функция вероятности перехода элемента

$$W = W \left(a(j, t + 1) \mid a(j, t), \sum_{i \in \theta(j)} a(i, t) \right). \quad (5)$$

Здесь W — вероятность перехода j -го элемента из состояния $a(j, t)$ в момент времени t в состояние $a(j, t + 1)$ в следующий момент времени при определенных состояниях соседей. Такие клеточные автоматы называются вероятностными.

Конечно, наибольший интерес представляют не переименованные в «автоматы» численные аппроксимации, а прямые модели, предпочтительно точно решаемые в целых числах. Так, в [Тоффоли, Марголюс, 1991] приведено описание «чисто аналогового» клеточного автомата (на треугольной или гексагональной решетке), являющегося прямой имитацией плоских движений жидкости. Модель позволяет получить гидродинамические течения (при не слишком больших числах Маха) без решения уравнений Навье-Стокса.

Учитывая однородность сети, одинаковые простые правила перехода и малое число связей между элементами, такие процессы удачно проектируются на архитектуру существующих параллельных вычислительных комплексов. Для исследования моделей клеточных автоматов используется математический аппарат, схожий с аппаратом термодинамики и теории информации: введение различных кодов, размерностей, энтропий и т. п.

Среди всех возможных классов клеточных автоматов большинство результатов получено для одномерных так называемых правильных *суммирующих автоматов*.

Автомат называется правильным, если для него выполнено следующее условие:

$$F(A(n - r, t), \dots, A(n + r, t)) = F(A(n + r, t), \dots, A(n - r, t)).$$

Кроме того, если $F(0, 0, \dots, 0) = 0$, то автомат называется *законным*. Если

$$A(j, t + 1) = F \left(\sum_{i=-r}^r A(n + i, t) \right),$$

то автомат является *суммирующим*, если же

$$A(j, t + 1) = F \left(\sum_{\substack{i=-r, \\ i \neq 0}}^r A(n + i, t), A(n, t) \right),$$

то он называется *внешне суммирующим*.

По классификации С. Вольфрама [Wolfram, 2002] одномерные и двумерные правильные суммирующие автоматы делятся по своему поведению на четыре класса.

Класс 1. За конечное число шагов автоматы достигают пространственно-однородного состояния. Конечное состояние не зависит от времени и от начальных условий.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующий клеточный автомат: каждый элемент может находиться в двух состояниях: 0 и 1. Правила перехода имеют вид:

$$A(n, t + 1) = \begin{cases} 1, & A(n - 1, t) + A(n, t) + A(n + 1, t) = 3; \\ 0, & A(n - 1, t) + A(n, t) + A(n + 1, t) \neq 3. \end{cases}$$

Класс 2. Автомат генерирует локализованные структуры, стационарные или периодические по времени.

ПРИМЕР 2. Как и в примере 1, считаем, что каждый элемент сети может находиться в двух состояниях: 0 и 1.

$$A(n, t + 1) = \begin{cases} 1, & \sum_{j=-2}^2 A(n + j, t) = 3; \\ 0, & \sum_{j=-2}^2 A(n + j, t) \neq 3. \end{cases}$$

Такой автомат генерирует устойчивые тройки активных элементов.

Класс 3. Автомат из этого класса порождает непериодические конфигурации клеток, «забывая» при этом о начальных условиях, — обладает так называемым «турбулентным» перемешиванием. Примеры автоматов такого класса приведены ниже, в параграфе, посвященном модификации клеточного автомата «игра „Жизнь“».

Класс 4. Динамика клеточного автомата существенно зависит от начальных данных. Подбирая начальные условия, можно группировать самые различные последовательности сменяющих друг друга состояний. Известно несколько «кандидатов» на роль автомата класса 4, твердо установлено, что таким автоматом является игра Дж. Конвея «Жизнь».

Игра Дж. Конвея «Жизнь» и двумерный клеточный автомат У. Ооно–М. Кохомото

Игра «Жизнь» была предложена в 1970 г. Дж. Конвеем в качестве математического развлечения. В настоящее время достаточно велик интерес математиков к этой игре: доказано, что она является клеточным автоматом класса 4. Согласно существующим гипотезам, автоматы данного класса могут осуществлять универсальные вычисления, подобно машине Тьюринга [Тоффоли, Марголюс, 1991], и применяться при моделировании развития турбулентности и возникновения диссипативных систем в экологии, биологии, экономике и т. д.

Кроме того, благодаря «универсальному поведению», подобный клеточный автомат может являться хорошим тестом при создании специализированных трансляторов (компиляторов) для систем, осуществляющих параллельные вычисления на транспьютерных архитектурах [Джоунз, 1989].

Рассматривается двумерная система клеток на плоскости. Будем каждый элемент обозначать двумя индексами (снизу). Шаблон, учитывающий количество ближайших соседей, включает восемь клеток, имеющих с данной общие грани или вершины.

Правила перехода для каждого элемента крайне просты: элемент a_{ij} может находиться в состоянии покоя (0) или активности (1). Из состояния покоя в активное в следующем поколении элемент переходит, если рядом с ним в текущем поколении оказалось ровно три активных элемента. Состояние активности сохраняется, если среди ближайших соседей находятся два или три активных элемента. Правила перехода на следующий слой могут быть записаны в канонической форме $B3/S2,3$.

В первой части записи правила послойного перехода (B от слова Born — рождение) указывается то число соседей в окрестности Мура, при котором происходит рождение новой клетки. S (save) — число соседей, при котором клетка остается активной.

Динамика автомата «Жизнь» не является хаотической, а скорее «регулярна». В нем возможны локализованные циклы (конфигурации «мельница» или «семафор»), движущиеся конфигурации — «планеры». Существуют также и различные динамические структуры (например, в случае «столкновения» «планера» с «мельницей») и «неэлементарные» начальные конфигурации типа «паровоза» и «ружья», «стреляющего» «планерами». Описание эволюции таких структур приведено, например, в [Ахромеева и др., 1992].

Простейшими являются стационарные, то есть не зависящие от времени, структуры. Их примеры показаны на рис. 4.

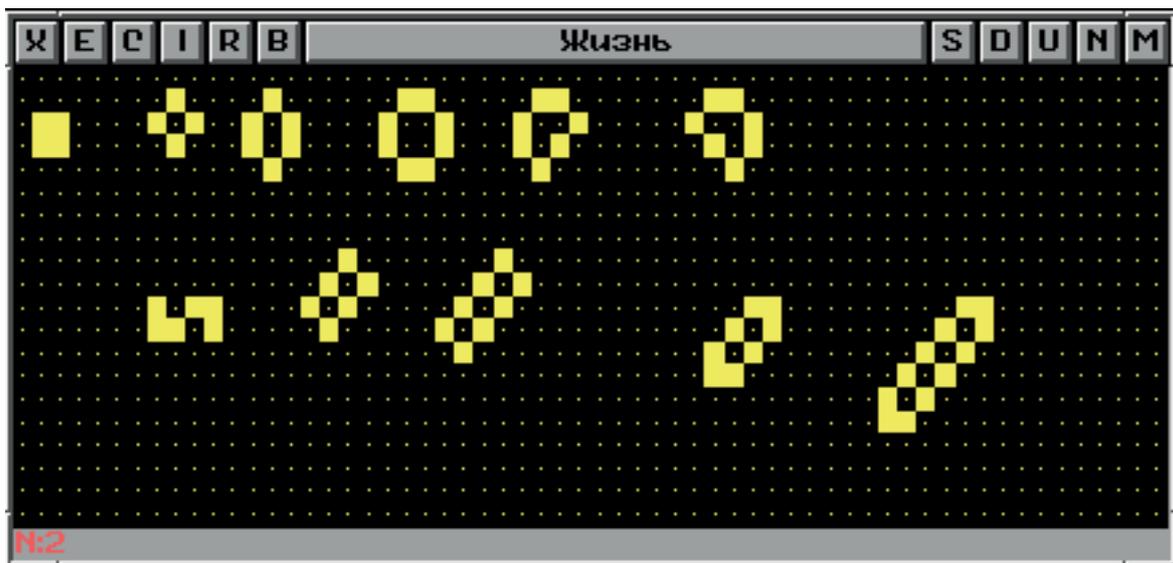


Рис. 4. Стационарные структуры в игре «Жизнь». Структура в верхнем левом углу состоит из четырех клеток

С помощью этих стационарных структур можно получить множество других. В самом деле, если мы имеем такую структуру, то конфигурация, полученная поворотом на 90° , также является стационарной. Четыре конфигурации справа в нижнем ряду рисунка показывают, как можно достраивать определенные структуры до любых размеров. Важно подчеркнуть, что эти структуры локализованы. Будучи разделены двумя покоящимися клетками, они не влияют друг на друга. Можно считать, что стационарные структуры повторяют себя на каждом шаге по времени. Но есть и другие конфигурации, повторяющие себя через N шагов, для краткости будем называть их N -циклами. Примеры циклов периода 2 показаны на рис. 5.

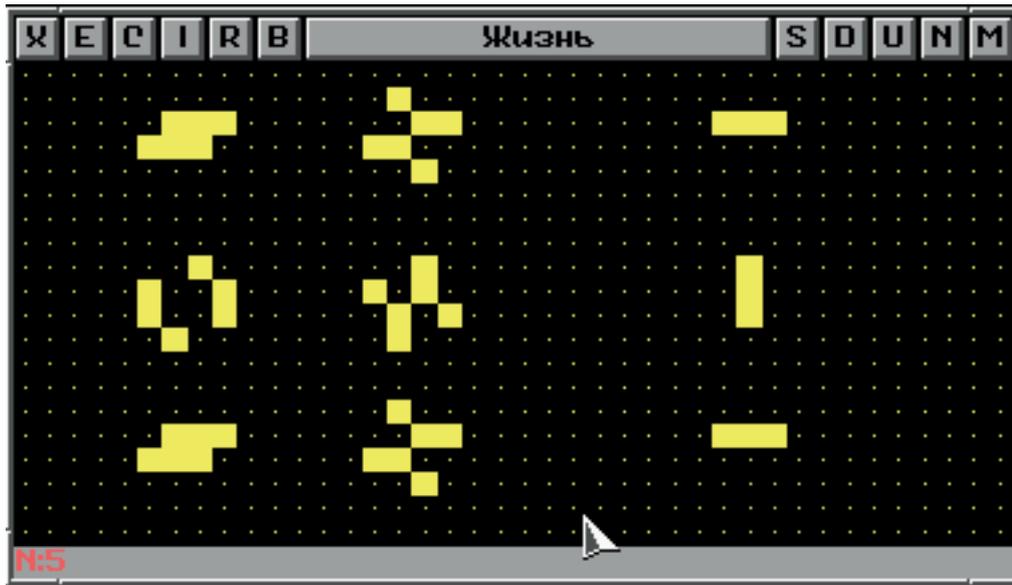


Рис. 5. 2-циклы в три последовательных момента времени (сверху вниз). Цикл в третьей колонке — семафор

Известно много различных периодических конфигураций. Однако эффективные алгоритмы, позволяющие строить различные конфигурации с данным периодом N , по-видимому, в настоящее время не созданы.

Система клеток, которую описывает игра «Жизнь», развивается необратимо. В самом деле, конфигурация в момент t полностью определяет будущее (состояние в моменты $t+1$, $t+2$ и т. д.). Но восстановить прошлое системы по ее настоящему не удастся.

В игре «Жизнь» существуют конфигурации, которые могут передвигаться по плоскости. Одной из них является «планер». (Внизу на рис. 6 стационарная структура поставлена в качестве точки отсчета). Через каждые четыре шага он повторяет себя, сдвигаясь на одну клетку вниз и вправо. Некоторые конфигурации могут передвигаться не вдоль диагоналей, а по прямой. Таков, например, «корабль», показанный вверху на рис. 6.

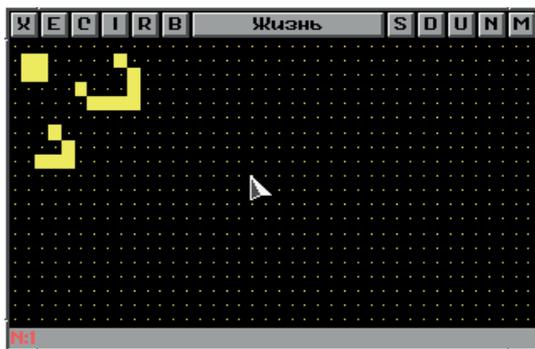


Рис. 6. Подвижные структуры «планер» и «корабль» в начале эволюции. Момент времени $t = 1$

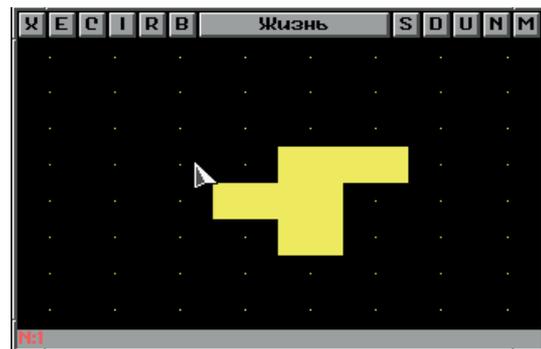


Рис. 7. Начальная конфигурация «резонанс» из 5 клеток

Столкновение двух планеров или планера со стационарами может приводить к их «аннигиляции». Иногда при столкновении может родиться целый набор семафоров и стационаров.

Обратим внимание на две закономерности. Если в конфигурации возникла симметрия (например, относительно вертикальной или горизонтальной оси), то далее в процессе эволюции она сохраняется. Если конфигурация все время локализована в квадрате со стороной N , то она является набором стационаров и циклов, период которых не превышает 2^N .

Обратим внимание на конфигурацию, показанную на рис. 7. Возникающие при эволюции клетки занимают все большую часть плоскости, рождается несколько планеров, причем это сообщество будет развиваться далее. Ни одна из других конфигураций, состоящих из пяти клеток, не приводит к такому сложному поведению.

Как правило, эволюция взятых наугад конфигураций приводит к появлению наборов стационаров, семафоров, планеров. При этом общее число «живых» клеток при $t \rightarrow \infty$ оказывается ограниченным. Однако при некоторых начальных данных ситуация может качественно меняться. Такое поведение характерно для ряда биологических систем, в частности, эволюционных процессов. Маловероятное событие может качественно изменить поведение системы, привести к появлению новых видов. Именно поэтому «клеточные автоматы» (к этому классу моделей принадлежит игра «Жизнь») находят применение в экологических моделях, при моделировании морфогенеза, в других биологических задачах.

Чем большую площадь занимает сообщество, тем сложнее оно может себя вести.

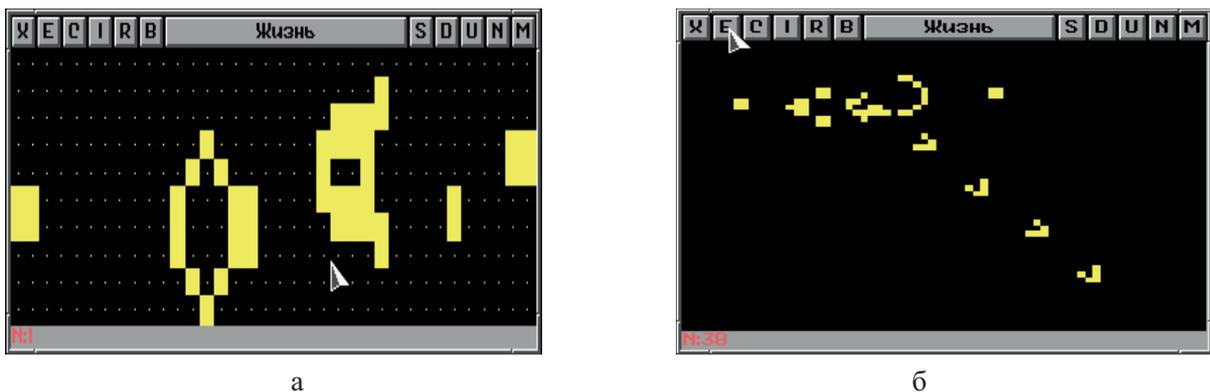


Рис. 8. «Катапульта» в момент а) $t = 1$; б) $t = 128$

Поэтому большой интерес вызывают неограниченно растущие в пространстве конфигурации. Одну из них, называемую «катапультией», или «планерным ружьем», предложил в 1970 г. Р. Госпер-младший.

Катапульта через каждые 30 шагов повторяет себя и выпускает планер. Планерное ружье заполняет пространство потоком планеров. Есть еще более сложные сообщества клеток, которые могут двигаться, оставляя за собой большой набор семафоров и стационаров. Одно из них — «паровоз», показанный на рис. 9. Поиск таких конфигураций требует применения специальных алгоритмов.

«Райские сады»

В последнее время среди любителей игры «жизнь» появилось новое увлечение — поиски «райских садов», или «садов Эдема». Так называется конфигурация клеток, которая не может быть получена ни при какой начальной конфигурации клеток «жизни».

Другим примером нетривиального характера эволюции простых начальных данных служит исследование Г. Г. Малинецким и М. С. Шакаевой двумерного обобщения автомата

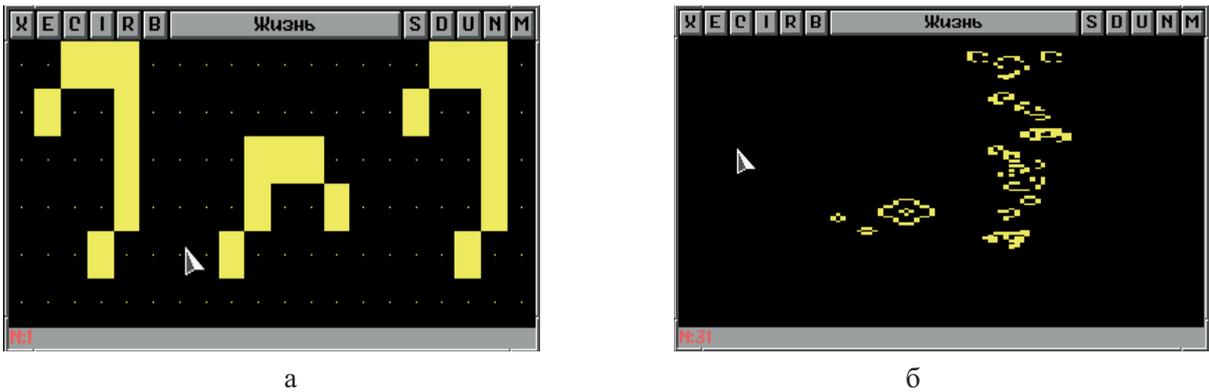


Рис. 9. «Паровоз» в момент а) $t = 1$; б) $t = 131$

У. Ооно–М. Кохомото (1–2):

$$\tilde{A}(i, j, t) = \frac{\alpha}{N} \sum_{\substack{(k,l) \neq (i,j), \\ (k,l) \in \theta(i,j)}} A(k, l, t) + (1 - \alpha)A(i, j, t), \tag{6}$$

$$A(i, j, t) = F(\tilde{A}(i, j, t)), \tag{7}$$

где нелинейная функция $F(x)$ определена отображением (3).

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1,5; \\ 0, & 0,5 \leq x < 1,5; \\ M, & x < 0,5. \end{cases}$$

Как и ранее, $\alpha \in [0, 1]$, N в (6) — число точек в окрестности A_{ij} (4 или 8, в зависимости от выбранного шаблона), суммирование в (6) ведется по клеткам выбранного шаблона. Случай $N = 4$ называется *окрестностью Неймана*, а случай $N = 8$ — *окрестностью Мура*.

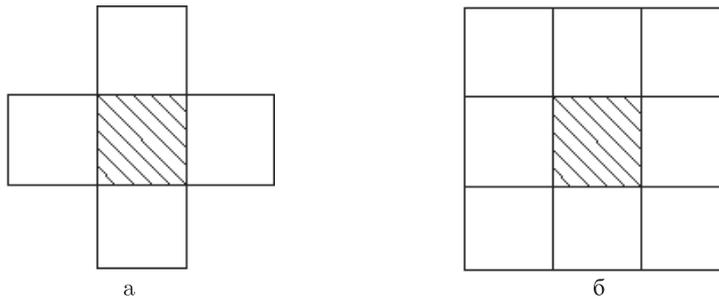


Рис. 10. Окрестности Мура и Неймана

Легко видеть, что окрестности Неймана соответствует явная разностная схема с шаблоном, соединяющим центры квадратов на рис. 10а, а окрестности Мура — на рис. 10б. (Конечно, только для этапа «предиктора» (6)). Можно убедиться, что для гладкого начального распределения обе разностные схемы устойчивы в случае $k < 1/4$ (k — аналог числа Куранта; $k = \tau D/h^2$, схема на рис. 10а монотонна при $k < 1/4$ а на рис. 10б — при $k < 1/8$). Изменение α от 0 до 1 в формуле (6) соответствует $k \in [0, 1/4]$ для схемы на рис. 10а, $k \in [0, 1/8]$ для схемы на рис. 10б. Читателям, знакомым с основами теории разностных схем, предоставляем проверить это в качестве простого упражнения. Остальным следует обратиться к Приложению 1.

Таким образом, случай схемы с рис. 10а (окрестность Неймана) «ближе» к области немо-
нотонности, и, как можно ожидать, она будет более «урожайна» на существование различного
рода структур.

Численный эксперимент, результаты которого приведены в [Малинецкий, Шакаева, 1992;
Малинецкий, Шакаева, 1991], показывает, что в случае окрестности Неймана в довольно уз-
кой области параметров (α, M) могут существовать аналоги «планеров» в игре «Жизнь»: в эксперименте фиксируется два вида «планеров».

Первый вид существует при $M = 6$, $\alpha \in [0, 41, 0, 43]$ и повторяет себя через каждые 7 вре-
менных шагов, смещаясь на две клетки по вертикали вниз. Начальное распределение показано на
рис. 11. В «розовых» клетках значение функции равно 1, в «голубых» — M . Второй вид ($M = 6$,
 $\alpha \in [0, 35, 0, 40]$) перемещается за четыре временных шага на одну клетку вниз.

При $M = 6$, $\alpha = 0, 45$ «планер» превращается в «паровоз» (подвижную структуру, остав-
ляющую след из «дыма», исчезающего за конечное число тактов). При столкновении «планеров»
между собой и с устойчивыми структурами могут наблюдаться достаточно сложные структуры,
в том числе, спиральные волны. Последние в этом случае можно получить и в результате взаимо-
действия растущей структуры со стационарным циклом периода 3. При этом спиральные волны
существуют также в ограниченном диапазоне значений α , M ($\alpha = 0, 35$, $M = 6$ — конфигурация
рис. 7 дает спиральную волну, при $M = 8$ волн нет). Данные волны по своей природе отличают-
ся от волн в «стандартных» возбудимых средах: в этой модели они обусловлены перемещением
границ областей постоянной концентрации, внутри которых концентрация меняется по циклу
периода 3 [Малинецкий, Шакаева, 1992].

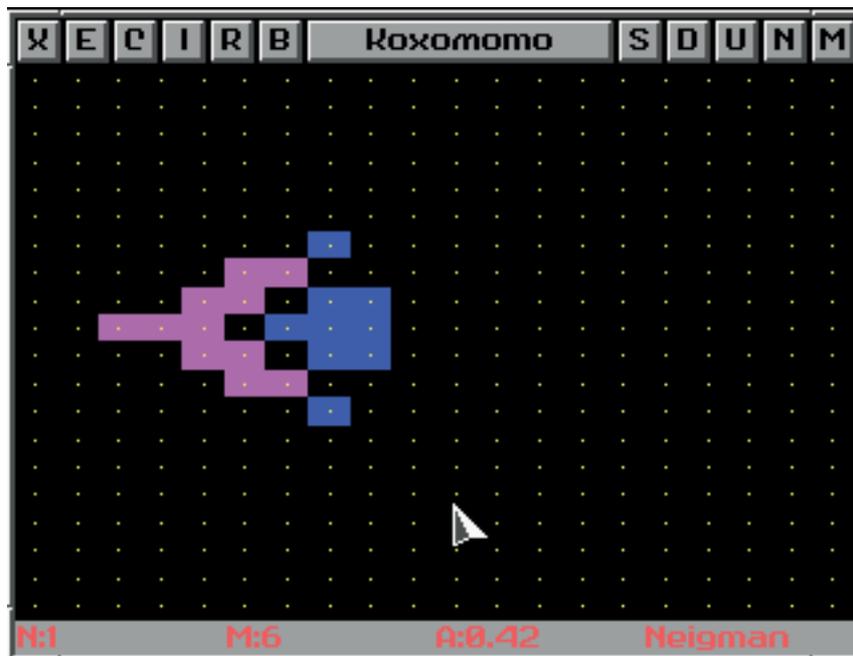


Рис. 11. Конфигурация «Планер, повторяющая себя за 7 временных шагов» в момент $t = 1$

Таким образом, класс моделей клеточных автоматов способен демонстрировать разнооб-
разное поведение и является сравнительно легко моделируемым (на ЭВМ) объектом. Класс мо-
делей позволяет получить качественные характеристики процессов. Клеточные автоматы могут
служить также для имитационного моделирования течений вязкой жидкости и МГД-течений.
К недостаткам относится слабая изученность класса моделей.

В последнее время появляются и более сложные конструкции клеточных автоматов. В качестве примера укажем работу [Gontar, 1993], где строится и анализируется автомат для моделирования периодических химических реакций типа реакции Белоусова–Жаботинского. В цитируемой работе для анализа свойств клеточного автомата строится теория, основанная на анализе размерности и П-теореме [Седов, 1988]. Для анализа свойств клеточного автомата построены дискретные аналоги автомодельных решений.

Теория клеточных автоматов в настоящее время разработана очень слабо, и основным способом их изучения является численный эксперимент.

Другие автоматы типа «Жизни»

Первые описания игры «Жизнь» на русском языке содержится в книгах Мартина Гарднера [Гарднер, 1988; Гарднер, 1972]. В 1980–2010 годах в разных странах разными авторами созданы «жизнеподобные» клеточные автоматы. Математические теории и численный эксперимент в области таких автоматов привели к возникновению не только многочисленных специализированных Интернет-ресурсов, но и специализированных научных журналов. Адреса некоторых ресурсов приведены в Приложении 2.

Так, в двумерном пространстве все автоматы типа «Жизни» определены только на шаблоне типа «окрестности Мура». Правила перехода на следующий слой могут быть записаны в канонической форме B3/S23. В первой части записи правила послойного перехода (B от слова «born» — «рождение») указывается то число соседей в окрестности Мура, при котором происходит рождение новой клетки. S (save) — число соседей, при котором клетка остается живой. Во всех остальных случаях клетка переходит в состояние 0 — «смерть», и эти правила не записываются стандартной нотацией.

Все автоматы типа «Жизнь» рассматривают клетки, находящиеся в двух состояниях, правила перехода зависят только от числа соседей в окрестности Мура.

Приведем сводную таблицу правил таких автоматов. За основу описания взята аналогичная таблица из англоязычного варианта Википедии [Conway’s Game of Life].

Таблица 1. Описание клеточных автоматов типа «Жизнь»

Правила перехода	Название	Описание
B018/S018		Автомат Вольфрама–Паккарда, класс 2
B0578/S045		Автомат Вольфрама–Паккарда
B0578/S12456		Автомат Вольфрама–Паккарда
B1/S012345678		Автомат Вольфрама–Паккарда
B1/S1	Gnarl	Автомат исследован Келли Эванс. Формируются интересные структуры На прямой — одномерный аналог «Жизни»
B123567/S0238		Автомат Вольфрама–Паккарда; класс 3
B13456/S01356		Автомат Вольфрама–Паккарда
B135/S135		Автомат Вольфрама–Паккарда; класс 3
B1357/S1357	Репликатор	Автомат Эдварда Фредкина, каждая структура воспроизводит множественные копии себя
B137/S45678		Автомат Вольфрама–Паккарда
B236/S0468		Автомат Вольфрама–Паккарда; класс 3

Продолжение на следующей странице

Таблица 1 (продолжение)

Правила перехода	Название	Описание
B257/S27		Автомат Вольфрама–Паккарда; имеются планеры
B3/S012345678	Бессмертная Жизнь	Ladder-like patterns can be used to simulate arbitrary Boolean circuits
B3/S12345	Maze	Forms maze-like designs
B3/S23	Жизнь	
B3/S234		Автомат Вольфрама–Паккарда; Класс 2. В этом автомате существуют планеры
B3/S45678	Коралл	Растут «кораллообразные» структуры
B34/S03456		Автомат Вольфрама–Паккарда
B34/S34	34 Жизнь	Первоначально считался более устойчивым вариантом «Жизни». Затем с помощью компьютерного моделирования найдены бесконечно растущие структуры. Имеет много планеров и циклов разного периода.
B345/S4567	Ассимиляция	Формирует «бриллиантоподобные» структуры с заполненной внутренней частью
B345/S5	Долгая жизнь	Изучен Andrew Trevorrow. В нем встречаются осцилляторы с очень длинными периодами
B35678/S5678	«Диамеба»	Формируются крупные «бриллианты» с хаотически осциллирующими границами. Изучен Дином Хикерсоном (Dean Hickerson). Gravner and Griffeath posed the existence of quadratic growth patterns as an open problem, solved in March 1999 by David Bell
B357/S1358	Амеба	Модель хорошо сбалансирована между «жизнью» и «смертью». Формируются структуры со «стенками» и хаотическим поведением внутри областей. Имеются планеры
B357/S238	Псевдожизнь	Формирующиеся структуры приводят к формированию из структур «Жизни» более простых из-за неустойчивости «глайдера» (под глайдером часто понимают один из самых распространенных планеров в игре «Жизнь»). Имеются планеры
B36/S125	2x2	Если структура образована из блоков клеток размерами 2x2, то она и далее будет развиваться подобным образом. Имеются различные виды осцилляторов и планеров
B36/S23	HighLife (возвышенная жизнь, гламурная жизнь)	Похож на «Жизнь», имеет небольшие самовоспроизводящиеся структуры
B367/S2346		Автомат Вольфрама–Паккарда. Имеются планеры
B3678/S235678	Stains	Удивительное отличие от игр с похожими правилами – структуры очень быстро стабилизируются. Имеются планеры

Продолжение на следующей странице

Таблица 1 (продолжение)

Правила перехода	Название	Описание
V3678/S34678	День и Ночь	Имеет сконструированные структуры со сложным поведением
V368/S245	Движение	Случайные структуры стремятся стабилизироваться, но обнаружены различные виды планеров
V378/S012345678		Автомат Вольфрама–Паккарда
V378/S235678	Коагуляция	Структуры стремятся расширяться в том случае, когда оказываются по соседству друг с другом. Имеются планеры
V45678/S2345	Города за стенами	Формирует районы активности, разделенные «стенами»

Обобщение игры Дж. Конвея «Жизнь» на случай пространства произвольной размерности и трехмерный клеточный автомат У. Оно–М. Кохомото

Обобщим автомат У. Оно–М. Кохомото (1–2) на трехмерный случай:

$$\tilde{A}(i, j, t) = \frac{\alpha}{N} \sum_{\substack{(k,l) \neq (i,j), \\ (k,l) \in \theta(i,j)}} A(k, l, t) + (1 - \alpha)A(i, j, t),$$

$$A(i, j, t) = F(\tilde{A}(i, j, t)),$$

где нелинейная функция $F(x)$ определена отображением (3).

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1,5; \\ 0, & 0,5 \leq x < 1,5; \\ M, & x < 0,5. \end{cases}$$

Здесь $\alpha \in [0, 1]$, N — число точек в окрестности A_{ij} . Их количество может быть различным. Если в окрестность $\theta(i, j, n)$ включены те ячейки, которые имеют с данной общие грани (их 6), назовем окрестность **трехмерной окрестностью Неймана**; если включены те ячейки, что имеют с данной общие грани и общие ребра (их 14), то назовем окрестность **окрестностью Неймана–Мура**. Можно включить в окрестность $\theta(i, j, n)$ все ячейки, имеющие с данной общие грани, ребра или вершины. В этом случае окрестность из 26 ячеек назовем **трехмерной окрестностью Мура**.

Остановимся на некоторых недостатках данного клеточного автомата. Модель второго этапа (химических реакций), очевидно, условна. Это — достоинство предлагаемой модели, позволяющее сократить количество операций и уменьшить требования к точности их выполнения.

Первый этап моделирует диффузию. Если в окрестности Неймана нет очевидных способов улучшения автомата на данном этапе, то для окрестностей типа Мура есть почти очевидные дефекты описания диффузии.

Модификации автомата Кохомото–Ооно в окрестности Мура для трехмерного случая

Для линейного уравнения диффузии все пространственные направления равноправны. Для этого достаточно убедиться, что уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(t, x, y, z)$$

инвариантно относительно поворотов системы координат.

Отсюда следует, что диффузионные потоки во всех направлениях в модель должны входить равноправно. Между тем, для рассматриваемой модели правил перехода клеточного автомата потоки из тех ячеек, которые имеют с данной общее ребро или общую вершину, точно такие же, как и потоки из ячеек, имеющих с данной общую грань. Это приводит к неравноправному учету диффузионных потоков. В евклидовой метрике расстояние между центрами соседних клеток неодинаково, следовательно, при равноправии пространственных направлений, веса у диффузионных потоков должны учитывать тип соседства (общая грань, ребро или вершина). Будем рассматривать автомат, реализованный на окрестности Мура в трехмерном случае, как более общий случай. Сужение правил перехода автомата при выборе окрестности Мура–Неймана будет сразу следовать из рассмотрения. Очевидно, что расстояние между центрами фиксированной ячейки и ячеек, имеющих с ней общее ребро, в $\sqrt{2}$ раз больше, чем расстояние до центров тех ячеек, которые имеют с данной общую грань. Если ячейка имеет с данной лишь общую вершину, то расстояние между центрами увеличится в $\sqrt{3}$ раз. Соответственно, во столько же раз уменьшим и диффузионные потоки. После необходимых тривиальных преобразований для правил перехода получим следующую краткую запись.

$$\tilde{A}(i, j, n, t) = \beta \sum_{\substack{(\mu, \nu, \eta) = \pm 1, \\ (\mu, \nu, \eta) \in \theta(i, j, n)}} \frac{A(i + \mu, j + \nu, m + \eta, t)}{|\mu| + |\nu| + |\eta|} + (1 - \beta(6 + 12 \cdot 1/2 + 8 \cdot 1/3))A(i, j, n, t),$$

$$A(i, j, n, t) = F(\tilde{A}(i, j, n, t)),$$

где учтено, что у данной клетки 6 соседей, имеющих с ней общую грань (расстояние между центрами ячеек равно 1), 12 соседей имеют с данной общее ребро (поток уменьшается в $\sqrt{2}$ раз, вес значения функции в данной ячейке уменьшается вдвое) и 8 соседей имеют с данной общую вершину. При этом поток уменьшается в $\sqrt{3}$ раз, вес значения функции в данной ячейке уменьшается втрое. Параметры, характеризующие подвижность молекул, в этих двух записях правил перехода связаны очевидным соотношением

$$\beta(6 + 12 \cdot 1/2 + 8 \cdot 1/3) = \alpha.$$

Отметим, что и двумерные модифицированные клеточные автоматы в окрестности Мура, и, тем более, трехмерные варианты пока не исследованы.

Обобщение игры Дж. Конвея «Жизнь» на случай пространства произвольной размерности

Отметим, что некоторые обобщения «Жизни» на нечетырехугольные решетки и на случай пространства размерности 3 в последнее время появляются в статьях Картер Бейс [Bays; Bays, 1987]. Подход, развитый в данной работе, несколько отличается от подхода К. Бейс.

Пусть задана клетка в n -мерном пространстве. Рассмотрим **шаблон**, включающий в себя 3^n соседей данной клетки. Здесь n — размерность пространства. В **шаблон** в окрестности

точки с мультииндексом (i, j, \dots, k) включаются **все** точки с индексами $(i + \nu, j + \eta, \dots, k + \xi)$, где ν, η, \dots, ξ принимают значения $-1, 0, 1$. Определим **правила перехода** для многомерного обобщения игры «Жизнь» следующим образом.

1. Состояние каждой клетки в следующем поколении определяется числом ее соседей в текущем поколении (под **соседями** понимаются **все** клетки, принадлежащие **шаблону**, за исключением самой рассматриваемой клетки).
2. Определим **нижнюю критическую численность** соседей данной клетки \underline{N} . Для пространства размерности n за нижнюю критическую численность примем 2^{n-1} . Так, для плоскости (двумерное пространство) нижняя критическая численность равна 2, для трехмерного пространства, соответственно, 4.
3. Определим **верхнюю критическую численность** \overline{N} соседей данной клетки как $2^n - 1$. Для плоскости (двумерное пространство) верхняя критическая численность равна 3, для трехмерного пространства, соответственно, 7.
4. Клетка следующего поколения из состояния «Жизнь» (1) переходит в состояние «смерть» (0) в тех случаях, когда численность соседей либо строго меньше **нижней критической численности**, либо строго больше **верхней критической численности**.
5. Определим оператор «рождения» новой клетки. Заметим, что отрезок $[\underline{N}, \overline{N}]$ включает в себя ровно 2^{n-1} чисел (от 2^{n-1} до $2^n - 1$). Определим **нижнюю границу рождения** новой клетки $\widetilde{N} = \underline{N} + 2^{n-1}/2 = \underline{N} + 2^{n-2}$. Для двумерной игры «Жизнь» **нижняя граница рождения** совпадает с **верхней критической численностью** и равна 3. Для **трехмерной** игры «Жизнь» **нижняя граница рождения** равна 6 (и отличается от **верхней критической численности**).
6. Будем считать, что в следующем поколении клетка переходит из состояния «смерть» (0) в состояние «Жизнь» (1), если число ее соседей лежит в диапазоне $[\widetilde{N}, \overline{N}]$. В двухмерном случае «рождение» происходит, если число соседей данной клетки в точности равно 3. В **трехмерном** случае «рождение» происходит, если число соседей равно 6 или 7. В случае пространств большей геометрической размерности отрезок $[\widetilde{N}, \overline{N}]$ будет включать в себя большее количество соседей, при которых происходит «рождение». Об особенностях такой неоднозначности оператора рождения новых клеток мы поговорим ниже.

Клеточный автомат «Жизнь» в пространстве произвольной размерности запишем как Life(N) $B2^{N-1} + 2^{N-1}/2, \dots, 2^N - 1/S^{2^{N-1}}, 2^{N-1} + 1, \dots, 2^N - 1$. В частности, игра «Жизнь» на прямой будет в такой нотации L(1) B1/S1, в двумерном случае L(2) B3/S2,3, в трехмерном случае L(3) B6,7/S4,5,6,7, в четырехмерном — L(4) B12,13,14,15,16/S8,9,10,11,12,13,14,15,16.

Рассмотрим качественные особенности **трехмерного** обобщения игры «Жизнь». Для него справедливы следующие предложения.

Предложение 1. *Структуры, существующие в двумерном варианте игры «Жизнь», включающие в себя на каждом шаге не более 5 «живых» клеток, включая стационарные структуры, «семафоры», «планеры», существуют и в трехмерном обобщении игры «Жизнь».*

Доказательство. Введем понятие «двойная двумерная структура». Зафиксируем первый индекс (i, j, k) $i = 0$. В качестве начального распределения для трехмерной структуры в плоскости $i = 0$ выберем соответствующую двумерную структуру. Теперь для трехмерного случая полностью повторим одномерное распределение и в плоскости $i = 1$. Полученная трехмерная

структура состоит из двух слоев клеток, причем каждый повторяет соответствующую двумерную. Заметим, что оба слоя такой двойной структуры совершенно равноправны, если утверждение справедливо для клетки $(0, k, l)$, то оно справедливо и для клетки $(1, k, l)$. Отметим, что правила перехода не зависят от конкретного значения индекса, а только от суммы значений на шаблоне, а замена (i, k, l) на $(1 - i, k, l)$ меняет слои «двойной структуры» местами.

Для игры «Жизнь» на плоскости доказано, что эволюция структуры полностью определяется начальными условиями.

Рассмотрим характерную конфигурацию двумерной игры «Жизнь» (например, стационарную, «семафор», «планер»). Рассмотрим произвольную клетку при $i = 0$. Если клетка была «мертвой» (0), то в двумерном случае у нее было ровно l соседей (при этом число соседей неотрицательно и не более 8 — максимального числа соседних ячеек). Для «двойной двумерной структуры» у «мертвой» клетки будет ровно $2l$ соседей. Если для двумерной структуры у клетки было два соседа, то у «двойной двумерной структуры» число соседей будет 4, и клетка выживает. Если для двумерной структуры было 3 соседа, то для «двойной двумерной структуры» число соседей будет 6, и для этих структур «рождение» происходит одновременно.

Если для «живой» клетки число соседей двумерной структуры было m , то для «двойной двумерной структуры» число соседей клетки равно $2m + 1$. Тогда клетки «двойной двумерной структуры» и породившей ее двумерной выживают или погибают одновременно. Так как число «живых» клеток в соответствующей двумерной структуре не превосходит 5, то появление «живых» клеток в других плоскостях, кроме тех, где заданы начальные условия, невозможно. Процесс будет развиваться только в тех плоскостях, где заданы начальные условия.

Таким образом, «семафор» на плоскости переходит в «семафор» в пространстве, стационар переходит в стационар, периодическая структура переходит в периодическую, «планер» переходит в «планер». Утверждение доказано. \square

Остается открытым вопрос о том, переходит ли при этом «райский сад» в «райский сад».

Предложение 2. *Для пространства с любым числом измерений существуют все структуры, существующие на плоскости и включающие в себя на каждом шаге не более 5 элементов.*

Доказательство. Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 1. Для этого фиксируется один из индексов, в получившемся трехмерном пространстве строится «двойная двухмерная структура», затем значение индекса меняется на единицу и дублируется та же структура. \square

Предложение 3. *Динамика процессов в пространстве повышенной размерности не исчерпывается структурами, существующими на плоскости.*

Доказательство. Для подавляющего большинства случаев динамика процессов определяется взаимодействием подвижных структур («планеров») со стационарными структурами. Пусть в качестве начальных условий выбран «планер», полученный из одномерного путем построения «двойной двумерной структуры». Выберем в том же слое стационар, соответствующий «двойной двумерной структуре», состоящий из 8 клеток. Теперь уберем три любые клетки в этом стационаре. В результате получим новую стационарную структуру из 5 клеток, не имеющую аналогов в плоском случае. Тогда динамика столкновения «планера» и стационара не будет иметь аналогов на плоскости. \square

Среди других стационаров в трехмерном пространстве, невозможных в плоском случае, отметим структуру, в которой «живыми» являются клетки (i, k, l) $(i - 1, k, l)$ $(i + 1, k, l)$ $(i, k - 1, l)$ $(i, k + 1, l)$ $(i, k, l - 1)$ $(i, k, l + 1)$. Назовем эту структуру «Крест Гауди» в честь великого каталанского архитектора-модерниста Антонио Гауди, который впервые ввел в мировую

архитектуру объемный крест сначала при строительстве жилых домов в Барселоне и в парке Гуэль, а затем и при строительстве церкви Саграда Фамилия.



Рис. 12. Вход в парк Гуэль в Барселоне. Крест на шпилье смотрится именно как крест с любой точки из-за трехмерной структуры

Отметим, что в трехмерной игре «Жизнь» возможны стационарные структуры типа «креста Гауди» без одного или двух отростков, а также без центральной точки. Кроме того, структуры типа «креста Гауди» можно стыковать друг с другом, строить из них стационарные структуры типа «дендритов» или кубических кристаллических решеток.

«Жизнь» с двумя видами клеток. Так как в трехмерной (а также многомерной) «Жизни» рождение новой клетки происходит уже не в единственном случае, то для многомерной «жизни» правила могут быть слегка изменены.

1. Состояние каждой клетки в следующем поколении определяется числом ее соседей в текущем поколении (под **соседями** понимаются **все** клетки, принадлежащие **шаблону**, за исключением самой рассматриваемой клетки). При этом на поле существуют клетки двух «цветов» — «синего» и «красного».
2. Определим **нижнюю критическую численность** соседей данной клетки \underline{N} . Для пространства размерности n за нижнюю критическую численность примем 2^{n-1} . Так, для плоскости (двумерное пространство) нижняя критическая численность равна 2, для трехмерного пространства, соответственно, 4.
3. Определим **верхнюю критическую численность** \overline{N} соседей данной клетки как $2^n - 1$. Для плоскости (двумерное пространство) верхняя критическая численность равна 3, для трехмерного пространства, соответственно, 7.

4. Клетка следующего поколения из состояния «Жизнь» (1) переходит в состояние «смерть» (0) в тех случаях, когда численность соседей либо строго меньше **нижней критической численности**, либо строго больше **верхней критической численности** и среди соседей данной клетки есть хотя бы одна клетка противоположенного цвета, чем данная (у синей клетки есть хотя бы один красный сосед).
5. Определим два оператора «рождения» новой клетки. Заметим, что отрезок $[\underline{N}, \overline{N}]$ включает в себя ровно 2^{n-1} чисел (от 2^{n-1} до $2^n - 1$). Определим **нижнюю границу рождения** новой клетки $\underline{N} = \underline{N} + 2^{n-1}/2 = \underline{N} + 2^{n-2}$. Определим также границу оператора рождения клетки. Для **трехмерной** игры «Жизнь» **нижняя граница рождения** равна 6 (и отличается от **верхней критической численности**). Будем считать, что в следующем поколении клетка переходит из состояния «смерть» (0) в состояние «Жизнь» (1), если число ее соседей лежит в диапазоне $[\underline{N}, \overline{N}]$. В двухмерном случае «рождение» происходит, если число соседей данной клетки в точности равно 3. В **трехмерном** случае «рождение» происходит, если число соседей равно 6 или 7. В случае пространств большей геометрической размерности отрезок $[\underline{N}, \overline{N}]$ будет включать в себя большее количество соседей, при которых происходит «рождение». Пусть в трехмерном случае при числе соседей 6 рождается «синяя» клетка, а при числе соседей 7 — «красная».

Такое изменение правил «Жизни» приводит к драматическому изменению динамики. Так, теперь семафор типа «двойной двумерной структуры» устойчив только тогда, когда или обе средние клетки, или одна из средних клеток «красные». В противном случае «семафор» «умирает». Кресты Гауди теперь могут иметь разные «раскраски» («синий» крест с «красной» центральной клеткой или «красный» — с центральной «синей»). Дендриты и кристаллические решетки, составленные из крестов Гауди, теперь могут иметь при одинаковых структурах разные «раскраски» ветвей. «Планер», соответствующий «двойному двумерному», теперь исчезнет после передвижения на 1 клетку во втором поколении (или в первом поколении, в зависимости от «раскраски» начальной конфигурации).

Список литературы

- Bays C.* Candidates for the Game of Life in Three Dimensions // Complex Systems — 1987. — № 1. — P. 373-400.
- Bays C.* The Game of Three Dimensional Life (Java applet).
<http://www.cse.sc.edu/~bays/d4d4d4/>.
- Conway's Game of Life.
http://en.wikipedia.org/wiki/Conway's_Game_of_Life.
- Gontar V.* New Theoretical Approach for Physicochemical Reactions Dynamics with Chaotic Behavior // In: Chaos in Chemistry and Biology / Ed. R. J. Field, L. Gyorgyi. — London: Word Scientific, 1993. — С. 225-247.
- Oono Y., Kohmoto M.* Discrete model of chemical turbulence // Phys.Rev.Lett. — 1985. — Vol. 55, № 27. — P. 2927-2931.
- Wolfram S.* A New Kind of Science. — Champaign, IL: Wolfram Media, 2002. — 1192 p.
- Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992. — 544 с.
- Гарднер М.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Мир, 1972.
- Гарднер М.* Крестики-нолики; пер. с англ. — М.: Мир, 1988.
- Джоунз Г.* Программирование на языке ОККАМ. — М.: Мир, 1989. — 284 с.

Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. — М.: Наука, 1989.

Малинецкий Г. Г., Шакаева М. С. К исследованию клеточного автомата, моделирующего колебательные химические реакции // ДАН. — 1991. — Т. 321, № 4. — С. 711.

Малинецкий Г. Г., Шакаева М. С. Об одном незаконном двумерном автомате: Препринт / ИПМ. — М., 1992. — №39. — 30 с.

Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1988. — 736 с.

Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. — М.: Мир, 1991. — 280 с.

Приложение 1

Клеточный автомат как разностные схемы, аппроксимирующие простейшее уравнение параболического типа

Рассмотрим первый этап реализации клеточного автомата Кохомото–Ооно

$$\tilde{A}(k, m, t) = \frac{\alpha}{N} \sum_{\substack{(n,l) \neq (i,j), \\ (n,l) \in \theta(k,m)}} A(n, l, t) + (1 - \alpha)A(k, m, t).$$

Перепишем его в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{\tilde{A}(k, m, t) - A(k, m, t)}{\tau} = \frac{\alpha}{\tau N} \sum_{\substack{(n,l) \neq (i,j), \\ (n,l) \in \theta(k,m)}} A(n, l, t) - \frac{\alpha}{\tau} A(k, m, t). \tag{6a}$$

Здесь τ — положительный параметр. Будем считать, что последнее соотношение устойчиво, если все гармоники разложения произвольного начального возмущения в ряд Фурье не возрастают. Это аналог спектрального признака устойчивости разностных схем (признака фон Неймана). Для этого представим решение в виде

$$A(k, m, t) = \lambda^n e^{ik\varphi} e^{im\psi},$$

где φ, ψ — произвольные параметры. Тогда для коэффициента усиления гармоник имеем уравнение

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \frac{\alpha}{4\tau} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} + e^{i\psi} + e^{-i\psi}) - \frac{\alpha}{\tau}$$

для автомата, реализованного в окрестности Неймана, и

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \frac{\alpha}{8\tau} ((1 + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + (1 + e^{i\psi} + e^{-i\psi}) - 1) - \frac{\alpha}{\tau}$$

для автомата, реализованного в окрестности Мура.

Найдем, при каких условиях спектр оператора послыонного перехода λ лежит внутри единичной окружности на комплексной плоскости. Используя представление для комплексного числа $e^{i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$, убеждаемся, что все λ действительные. Для окрестности Неймана имеем

$$\lambda = 1 + \frac{\alpha}{2} (\cos \varphi + \cos \psi) - \alpha = 1 - \frac{\alpha}{2} (2 \sin^2 \varphi/2 + 2 \sin^2 \psi/2).$$

При произвольных значениях параметров φ, ψ условие $|\lambda| < 1$ выполняется при $\alpha \leq 0,5$.

Для окрестности Мура имеем (приведем последовательность вычислений без комментариев):

$$\begin{aligned}\frac{\lambda - 1}{\tau} &= \frac{\alpha}{8\tau} ((1 + 2 \cos \varphi) (1 + 2 \cos \psi) - 1) - \frac{\alpha}{\tau}, \\ \lambda &= \frac{\alpha}{8} ((1 + 2 \cos \varphi) (1 + 2 \cos \psi) - 1) - \alpha + 1, \\ \lambda &= \frac{\alpha}{8} (4 \cos \varphi \cos \psi + 2 \cos \varphi + 2 \cos \psi - 8) + 1, \\ \lambda &= 1 - \frac{\alpha}{8} (2 \sin^2 \varphi/2 + 2 \sin^2 \psi/2) + \frac{\alpha}{8} (4 \cos \varphi \cos \psi - 4), \\ \lambda &= 1 - \frac{\alpha}{4} (\sin^2 \varphi/2 + \sin^2 \psi/2) - \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \varphi \cos \psi), \\ \lambda &= 1 - \frac{\alpha}{4} (\sin^2 \varphi/2 + \sin^2 \psi/2) - \frac{\alpha}{2} (1 - (\cos^2 \varphi/2 - \sin^2 \varphi/2)(\cos^2 \psi/2 - \sin^2 \psi/2)).\end{aligned}$$

Первая скобка в последнем равенстве принимает максимальное значение, когда оба синуса равны единице. Тогда вторая обращается в ноль. Максимальное значение второй скобки равно 2, при этом один из синусов равен 0, а второй — единице. Отсюда условием устойчивости будет

$$|\lambda| = \left| 1 - \frac{5\alpha}{4} \right| \leq 1,$$

откуда $\alpha \leq 8/5$.

Определение 1. Однородные разностные схемы, сохраняющие монотонность пространственного профиля разностного решения, называются монотонными.

Теорема. Явная двухслойная линейная однородная схема, записанная в виде

$$y_m^{n+1} = \sum_l \beta_l y_{m+l}^n$$

монотонна тогда и только тогда, когда все $\beta_l \geq 0$.

Упражнение. Доказать, что из монотонности разностной схемы в смысле приведенной выше теоремы сразу следует ее устойчивость.

Заметим, что правила перехода клеточного автомата уже записаны именно в той форме, которая употребляется при исследовании разностных схем на монотонность. Из (6) сразу следует, что правила перехода на первом этапе сохраняют монотонность профиля при $\alpha < 1$. Как следует из численных результатов по исследованию клеточного автомата Кохомото–Ооно, все структуры получаются при значениях параметров, лежащих вблизи границы области устойчивости. Приведенные соображения показывают, что окрестность Мура предположительно более «богата» на нетривиальные структуры, чем окрестность Неймана.

Приложение 2

Адреса некоторых Интернет-ресурсов, посвященных игре «Жизнь»

<http://www.people.nnov.ru/fractal/Life/Game.htm>

<http://mathworld.wolfram.com/Life.html>

Callahan P. Patterns, Programs, and Links for Conway's Game of Life.

<http://www.radicaleye.com/lifepage/>

Chapman P. Life Universal Computer.

<http://www.igblan.com/ca/>

Flammenkamp A. Game of Life.

<http://www.uni-bielefeld.de/~achim/gol.html>

The Game of Life. — Math Horizons. p. 9, Spring 1994.

Gardner M. The Game of Life, Parts I-III. — Chs. 20-22 in *Wheels, Life, and other Mathematical Amusements*. New York: W. H. Freeman, 1983.

Hensel A. PC Life Distribution.

<http://www.mindspring.com/~alanh/lifep.zip>

Hensel A. Conway's Game of Life.

<http://www.ibiblio.org/lifepatterns/>

Includes a Java applet for the Game of Life.

Koenig H. Game of Life Information.

<http://pentadecathlon.com/lifeInfo.php>

McIntosh H. V. Life.

<http://www.cs.cinvestav.mx/mcintosh/oldweb/life.html>

Poundstone W. *The Recursive Universe: Cosmic Complexity and the Limits of Scientific Knowledge*. — New York: Morrow, 1985.

Rendell P. Turing Machine Implemented in Conway's Game of Life.

<http://www.rendell.uk.co/gol/tm.htm>

Resnick M., Silverman B. A Zoo of Life Forms.

<http://lcs.www.media.mit.edu/groups/el/projects/emergence/life-zoo.html>

Под игрой Zoo понимаются трехмерные варианты игры «Жизнь» с правилами B5/S7, B5/S3 и B6/S3,4,5. Последние правила наиболее близки к сформулированным выше в данном тексте.

Wainwright R. T. LifeLine.

<http://members.aol.com/lifeline/life/lifepage.htm>

Weisstein E. W. Eric Weisstein's Encyclopedia of the Game of Life.

<http://www.ericweisstein.com/encyclopedias/life/>

<http://www.smerity.com/conway.html>