**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2024 Т. 16 № 6 С. 1345–1360**
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-6-1345-1360

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 519.63

Численное решение третьей начально-краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности с дробными производными

А. Г. Омарова[a], В. Д. Бейбалаев[b]

Дагестанский государственный университет,
Россия, 367025, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, д. 43а

E-mail: [a] asya89.89@mail.ru, [b] kaspij_03@mail.ru

*Получено 31.05.2024, после доработки — 17.09.2024.
Принято к публикации 26.09.2024.*

В последнее время для описания различных математических моделей физических процессов широко используется дробно-дифференциальное исчисление. В связи с этим большое внимание уделяется уравнениям в частных производных дробного порядка, которые являются обобщением уравнений в частных производных целого порядка.

Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе называют уравнения, содержащие значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности, чем размерность области определения искомой функции. В настоящее время широко используются численные методы для решения нагруженных уравнений в частных производных целого и дробного порядка, поскольку аналитические методы решения сложны в реализации. Достаточно эффективным методом численного решения такого рода задач является метод конечных разностей, или метод сеток.

Исследована начально-краевая задача в прямоугольнике $\overline{D} = \{(x, t)\colon 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ для нагруженного дифференциального уравнения теплопроводности с композицией дробной производной Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова и с граничными условиями первого и третьего рода. С помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка в дифференциальной и в разностной форме. Полученные неравенства означают единственность решения и непрерывную зависимость решения от входных данных задачи. Получен разностный аналог для композиции дробной производной Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова порядка $(2-\beta)$ и построена разностная схема, аппроксимирующая исходную задачу с порядком $O\left(\tau + h^{2-\beta}\right)$. Доказана сходимость решения разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Ключевые слова: краевая задача, априорная оценка, метод энергетических неравенств, аппроксимация, дробная производная Капуто – Герасимова, дробная производная Римана – Лиувилля

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2024 VOL. 16 NO. 6 P. 1345–1360
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-6-1345-1360

UDC: 519.63

Numerical solution of the third initial-boundary value problem for the nonstationary heat conduction equation with fractional derivatives

A. G. Omarova[a], V. D. Beybalayev[b]

Dagestan State University,
43a st. M. Gadzhieva, Makhachkala, 367025, Russia

E-mail: [a] asya89.89@mail.ru, [b] kaspij_03@mail.ru

Received 31.05.2024, after completion — 17.09.2024.
Accepted for publication 26.09.2024.

Recently, to describe various mathematical models of physical processes, fractional differential calculus has been widely used. In this regard, much attention is paid to partial differential equations of fractional order, which are a generalization of partial differential equations of integer order. In this case, various settings are possible.

Loaded differential equations in the literature are called equations containing values of a solution or its derivatives on manifolds of lower dimension than the dimension of the definitional domain of the desired function. Currently, numerical methods for solving loaded partial differential equations of integer and fractional orders are widely used, since analytical solving methods for solving are impossible. A fairly effective method for solving this kind of problem is the finite difference method, or the grid method.

We studied the initial-boundary value problem in the rectangle $\overline{D} = \{(x, t)\colon 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ for the loaded differential heat equation with composition fractional derivative of Riemann – Liouville and Caputo – Gerasimov and with boundary conditions of the first and third kind. We have gotten an a priori assessment in differential and difference interpretations. The obtained inequalities mean the uniqueness of the solution and the continuous dependence of the solution on the input data of the problem. A difference analogue of the composition fractional derivative of Riemann – Liouville and Caputo – Gerasimov order $(2 - \beta)$ is obtained and a difference scheme is constructed that approximates the original problem with the order $O\left(\tau + h^{2-\beta}\right)$. The convergence of the approximate solution to the exact one is proven at a rate equal to the order of approximation of the difference scheme.

Keywords: boundary value problem, a priori estimate, method of energy inequalities, Caputo – Gerasimov fractional derivative, Riemann – Liouville fractional derivative

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 6, pp. 1345–1360 (Russian).

1. Введение

Благодаря большому количеству исследований последних нескольких десятилетий мы можем утверждать, что раздел дробного интегро-дифференциального исчисления имеет многочисленное применение во многих естественно-научных областях [Oldham, Spanier, 1974; Miller, Ross, 1993; Podlubny, 1999]. Интегралы и производные дробного порядка нашли свое применение при исследовании различных процессов в биологических, физических, биофизических и экономических системах [Magin, 2006; Metzler, Klafter, 2000]. Диапазон применения математических операций расширяется благодаря включению в него дробного интегро-дифференциального исчисления.

В свою очередь, краевые задачи для дифференциальных уравнений с производными дробного порядка часто используют для описания математических моделей различных нелокальных процессов, протекающих во фрактальных структурах с эффектами памяти и пространственными корреляциями [Нахушев, 1995; Нахушев, 2000; Mainardi, 1996].

Важным разделом теории дифференциальных уравнений являются нагруженные дифференциальные уравнения. Дифференциальное уравнение называется нагруженным, если оно содержит некоторые операции от следа искомого решения на многообразиях меньшей размерности, чем размерность области определения искомой функции [Нахушев, 2012]. Эти уравнения описывают процесс физической природы, в котором состояние в том или ином моменте или в точке отражается в целом на всем процессе. Весомый вклад в изучение и развитие этого класса задач внес А. М. Нахушев, об этом свидетельствует большое количество его работ [Нахушев, 1995; Нахушев, 2000; Нахушев, 2012], в которых изложены решения различных нагруженных дифференциальных и интегральных уравнений, описывающих процессы, возникающие в математической биологии, в теории эпидемии и в теории гидрогазодинамики.

Процесс теплопроводности в средах с нестандартной структурой, таких как полимеры, сыпучие и пористые материалы, композиционные материалы, а также в средах с фрактальной и хаотической структурой описывается с помощью различных модификаций дифференциального уравнения теплопроводности с производными дробного порядка [Podlubny, 1999; Самко, Килбас, Маричев, 1987].

Вопрос исследования и разработки методов решения такого рода задач является актуальным, поскольку означает качественно новый уровень в моделировании вышеуказанных процессов. В настоящее время существуют как аналитические, так и численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка. Поиск решения с помощью аналитических методов является сложным и трудоемким процессом, поэтому целесообразно использовать численные методы, которые дают решение с определенной погрешностью.

Аналитическим методам решения краевых задач для уравнения теплопроводности посвящены работы [Beybalaev, Aliverdiev, 2023; Beybalaev, Aliverdiev, Hristov, 2023], в которых получены операционным методом аналитические решения краевых задач для уравнения теплопроводности с дробной производной и граничными условиями второго и третьего рода и доказана единственность решения. Решение задач было найдено путем применения преобразования Фурье по пространственной переменной и преобразования Лапласа по времени. В работе [Kukla, Siedlecka, Ciesielski, 2022] исследовано дифференциальное уравнение теплопроводности с дробной производной Капуто – Герасимова для многослойного сферического тела. Аналитическое решение задачи получено в виде двойного ряда сферических функций Бесселя и функций Лежандра.

Представим работы, в которых проведены численные исследования дифференциальных уравнений с дробными производными. В статье [Бейбалаев, Ибавов, Омарова, 2021] исследована первая краевая задача для нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто – Герасимова, построена неявная разностная схема, устойчивость которой доказана с использованием метода гармоник. Также в работе [Омарова, 2022] для первой краевой задачи дробного порядка сконструирована разностная схема, устойчивость которой доказана при помощи принципа максимума. В исследовании [Бештоков, Бештокова, Худалов, 2020] рассматривается нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто – Герасимова с нестандартными краевыми условиями, когда на границе помещается сосредоточенная теплоемкость, а в [Бештоков, Худалов, 2020] исследуется уже третья начально-краевая задача для такого же уравнения. С помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка, из которой следуют единственность и существование решения. Построены разностные схемы для исследуемых задач со вторым порядком аппроксимации. Представлена априорная оценка в разностной форме, из которой следует сходимость предложенного численного метода со скоростью, равной порядку аппроксимации. Численное решение краевой задачи для уравнения теплопроводности с оператором дробной производной Капуто – Герасимова комбинированного типа, который ранее не рассматривался, изложено в [Омарова, 2024], где также получены априорные оценки в дифференциальной и разностной форме с помощью метода энергетических неравенств. Метод предиктора – корректора на основе формулы L1 для дробных дифференциальных уравнений, включающих обобщенную производную типа Капуто – Герасимова, представлен в [Sivalingam et al., 2024]. Доказывается погрешность и устойчивость предлагаемого метода. В работе [Liu et al., 2023] для решения задач теплопроводности, аномальной диффузии и вязкоупругого течения с дробной производной Капуто – Герасимова предложен приближенный метод. Для аппроксимации производных дробного порядка используются L1- и L2-формулы. Построена разностная схема с первым порядком по времени и со вторым по пространственной переменной, показано, что численный метод, безусловно, устойчив и сходится с порядком, равным порядку аппроксимации. В исследовании [Brociek, Hetmaniok, Slota, 2024] представлено численное решение уравнения теплопроводности с дробной производной Римана – Лиувилля по пространственной переменной со смешанными граничными условиями, т. е. первого и второго рода. Построена неявная конечно-разностная схема первого порядка аппроксимации. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие сходимость предложенного численного метода.

Уравнение, рассматриваемое в данной работе, содержит композицию операторов производной дробного порядка. Использование понятия эффективной скорости изменения ряда параметров моделируемых систем приводит к дифференциальным уравнениям, содержащим композицию операторов дробного дифференцирования [Рехвиашвили, 2004; Рехвиашвили, 2007]. При переходе к дробным операторам необходимо обезразмерить уравнение, чтобы сохранить размерность искомых физических величин. При этом вводится некоторая постоянная, называемая часто характерной константой задачи. Это характерные величины «время», «длина», «температура» и т. д. Часто характерная константа выбирается исходя из не совсем понятных соображений. Между тем выбор этой константы задачи также значительно влияет на решение уравнений дробного порядка. По этой причине вместо обычной дробной производной Капуто – Герасимова можно рассмотреть дробную производную Капуто – Герасимова с нормирующим множителем вида

$$\partial_{0\xi}^{\beta} u(\xi, \tau) = \frac{1}{x_0^{\beta}} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{\xi} \frac{u_z(z, \tau)}{(\xi - z)^{\beta}}\, dz.$$

Тогда композиция дробных производных Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова запишется в виде

$${}^{RL}D_{0x}^{\beta} \left(\partial_{0x}^{\beta} u(x, \tau)\right) = {}^{RL}D_{0\xi}^{\beta} \left(\frac{1}{x_0^{\beta}} \partial_{0\xi}^{\beta} u(\xi, \tau)\right).$$

В результате в уравнении дробную производную по координате можно рассмотреть как композицию дробной производной Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова. Исследованию такого рода уравнений и определению их физического смысла посвящены работы [Энеева, 2023; Atanackovic, Stankovic, 2007; Torres, 2014; Tokmagambetov, Torebek, 2016].

Данная работа посвящена исследованию нагруженного дифференциального уравнения теплопроводности, в которое входит композиция операторов дробного дифференцирования Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова с граничными условиями первого и третьего рода. Построена разностная схема, аппроксимирующая исходную краевую задачу. На основе метода энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и в разностной форме. Получен разностный аналог для композиции дробной производной Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова порядка $(2-\beta)$ и построена разностная схема, аппроксимирующая исходную задачу с порядком $O\left(\tau + h^{2-\beta}\right)$. Доказаны устойчивость, а также сходимость решения разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

2. Постановка задачи

В области $D = \{0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 < t \leqslant T\}$ исследуем начально-краевую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x, t) = {}^{RL}D_{0x}^{\beta}\left(\partial_{0x}^{\beta} u(x, t)\right) + r(x, t)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - q(x, t)u(x_0, t) + f(x, t), \tag{1}$$

$${}^{RL}D^{\beta-1}\left(\partial_{0x}^{\beta} u(0, t)\right) = b_1(t)u(0, t) - \mu_1(t), \tag{2}$$

$$-{}^{RL}D^{\beta-1}\left(\partial_{0x}^{\beta} u(l, t)\right) = b_2(t)u(l, t) - \mu_2(t), \tag{3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} u(x, t)$, $\partial_{0x}^{\beta} u(x, t)$ — частные дробные производные Капуто – Герасимова, ${}^{RL}D_{0x}^{\beta}\left(\partial_{0x}^{\beta} u(x, t)\right)$ — композиция дробной производной Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова, $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$,

$$|q(x, t)|,\ |r(x, t)|,\ |q(x, t)|,\ |b_1(t)|,\ |b_2(t)| \leqslant c, \tag{5}$$

$c = \mathrm{const} > 0$ — константа, зависящая от входных данных.

3. Априорная оценка в дифференциальной форме

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $r(x, t)$, $q(x, t)$, $f(x, t) \in C(\overline{D})$, $u(x, t) \in C^{2,0}(D) \cap$ $\cap\, C^{1,0}(\overline{D})$, $\partial_{0t}^{\alpha} u(x, t) \in C(\overline{D})$, ${}^{RL}D_{0x}^{\beta}\left(\partial_{0x}^{\beta} u(x, t)\right) \in C(\overline{D})$ *и выполнены условия* (5), *тогда для решения задачи* (1)–(4) *справедлива априорная оценка*:

$$\|u\|_0^2 + 2\,{}^{RL}D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \leqslant M\left({}^{RL}D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right) + \|u_0(x)\|_0^2\right), \tag{6}$$

где $M = \mathrm{const}$, *которая зависит от входных данных задачи.*

Лемма 1 (см. [Алиханов, 2010]). *Для любой абсолютно непрерывной на* $[0, T]$ *функции* $u(t)$ *справедливо неравенство*

$$u(t)\partial_{0x}^{\alpha} u(t) \geqslant \frac{1}{2}\partial_{0x}^{\alpha} u^2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Доказательство. Пусть $M_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, \ldots$, которые зависят от входных данных. Умножая уравнение (1) скалярно на $u(x, t)$, получим

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha} u,\ u\right) = \left({}^{RL}D_{0x}^{\beta}\left(\partial_{0x}^{\beta} u\right),\ u\right) + (ru_x,\ u) - (qu_0(x, t),\ u) + (f,\ u), \tag{7}$$

где $(g, h) = \int\limits_0^l gh\,dx$, $\|g\|_0^2 = (g, g)$, для заданных на отрезке $[0, 1]$ функций.

Преобразуем каждое из слагаемых равенства (7), используя неравенство Коши – Буняковского с ε и лемму 1:

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha} u,\, u\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^l u(x,\, t)\, dx \int\limits_0^t u_\tau(x,\, \tau)(t-\tau)^{-\alpha}\, d\tau \geqslant \frac{1}{2}\left(1,\, \partial_{0t}^{\alpha} u^2\right) = \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2. \tag{8}$$

Имеем [Энеева, 2019]

$$\int\limits_0^l u_x D_{0x}^{\beta-1}\left(\partial_{0x}^{\beta} u\right) dx = \int\limits_0^l u_x I_{0x}^{1-\beta}\left(\partial_{0x}^{\beta} u\right) dx = -\int\limits_0^l \left[\partial_{0x}^{\beta} u(x,\, t)\right]^2 dx.$$

Воспользовавшись этим равенством, получим

$$\left({}^{RL}D_{0x}^{\beta}\left(\partial_{0x}^{\beta} u\right),\, u\right) = \int\limits_0^l u^{RL}D_{0x}^{\beta}\left(\partial_{0x}^{\beta} u\right) dx = u(x,\, t)^{RL}D_{0x}^{\beta-1}\left(\partial_{0x}^{\beta} u(x,\, t)\right)\Big|_0^l - \int\limits_0^l u_x{}^{RL}D_{0x}^{\beta-1}\left(\partial_{0x}^{\beta} u\right) dx =$$

$$= u(l,\, t)^{RL}D_{0x}^{\beta-1}\left(\partial_{0x}^{\beta} u(l,\, t)\right) - u(0,\, t)^{RL}D_{0x}^{\beta-1}\left(\partial_{0x}^{\beta} u(0,\, t)\right) - \int\limits_0^l \left[\partial_{0x}^{\beta} u(x,\, t)\right]^2 dx =$$

$$= u(l,\, t)(\mu_2(t) - b_2(t)u(l,\, t)) + u(0,\, t)(\mu_1(t) - b_1(t)u(0,\, t)) - \int\limits_0^l \left[\partial_{0x}^{\beta} u(x,\, t)\right]^2 dx, \tag{9}$$

$$(ru_x,\, u) = \int\limits_0^l ru_x u\, dx \leqslant \frac{c_2^2}{4\varepsilon}\int\limits_0^l u^2 dx + \varepsilon\int\limits_0^l u_x^2\, dx \leqslant \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_2^{\varepsilon}\|u\|_0^2, \tag{10}$$

$$-(qu(x_0,\, t),\, u) = -\int\limits_0^l qu(x_0,\, t)u\, dx = -u(x_0,\, t)\int\limits_0^l qu\, dx \leqslant \varepsilon u^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left(\int\limits_0^l qu\, dx\right)^2 \leqslant \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_3^{\varepsilon}\|u\|_0^2, \tag{11}$$

$$(f,\, u) = \int\limits_0^l fu\, dx \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \tag{12}$$

Подставляя (8), (9), (10), (11) и (12) в (7), получим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \left\|\partial_{0x}^{\beta} u\right\|_0^2 \leqslant (u(l,\, t)(\mu_2(t) - b_2(t)u(l,\, t)) + u(0,\, t)(\mu_1(t) - b_1(t)u(0,\, t))) +$$
$$+ \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + M_2\|f\|_0^2. \tag{13}$$

Оценим первое слагаемое в правой части равенства (13):

$$u(l,\, t)(\mu_2(t) - b_2(t)u(l,\, t)) + u(0,\, t)(\mu_1(t) - b_1(t)u(0,\, t)) = -b_2(t)u^2(l,\, t) + \mu_2(t)u(l,\, t) -$$
$$- b_1(t)u^2(0,\, t) + \mu_1(t)u(0,\, t) \leqslant M_3\left(u^2(0,\, t) + u^2(l,\, t)\right) + \frac{1}{2}\left(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_4^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\left(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right). \tag{14}$$

Учитывая (14), равенство (13) примет вид

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \left\|\partial_{0x}^{\beta}u\right\|_0^2 \leqslant 2\varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_5^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + M_6\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right). \tag{15}$$

Для нормы $\left\|\partial_{0x}^{\beta}u\right\|_0^2$ имеет место оценка [Энеева, 2019]

$$\left\|\partial_{0x}^{\beta}u\right\|_0^2 \geqslant C_{\beta}\|u\|_0^2, \tag{16}$$

где $C_{\beta} = 2\beta(2\beta - 1)\Gamma^2(\beta)$. Подставляя (16) в (15), окончательно получим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \leqslant M_7\|u\|_0^2 + M_8\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right). \tag{17}$$

Применим к обеим частям неравенства (17) оператор дробного интегрирования ${}^{RL}D_{0t}^{-\alpha}$. Тогда на основании леммы 2 из [Алиханов, 2010] получим оценку

$$\|u\|_0^2 + 2\,{}^{RL}D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \leqslant M\left({}^{RL}D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right) + \|u_0(x)\|_0^2\right), \tag{18}$$

где $M = \mathrm{const}$, которая зависит от входных данных задачи (1)–(4).

Из оценки (18) следуют единственность и устойчивость решения задачи (1)–(4) по правой части и начальным данным.

4. Разностная аппроксимация композиции дробной производной Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова

Рассмотрим на отрезке $[0, L]$ производную дробного порядка в смысле Римана – Лиувилля от функции $u(x, t)$ [Самко, Килбас, Маричев, 1987]:

$${}^{RL}D_{0x}^{\beta}u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{u(s, t)}{(x-s)^{\beta}}\,ds, \quad \text{где } 0 < \beta < 1.$$

Для определения разностной аппроксимации композиции дробной производной Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова ${}^{RL}D_{0x}^{\beta}\left[\partial_{0x}^{\beta}u(x, t)\right]$ введем на отрезке $[0, L]$ сетку $\omega = \{x_m = mh$, $m = 0, 1, 2, \ldots, M$, $Mh = L$, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, $N\tau = T\}$. Через $u(x_m, t_n) = u_m^n$ обозначим сеточное значение функции в точке (x_m, t_n), а через $\overline{x} = x_{m+1/2} = x_m + 0{,}5h$.

В работе [Owolabi, Atangana, 2019] получена разностная аппроксимации дробной производной Римана – Лиувилля со вторым порядком аппроксимации:

$${}^{RL}D_{0x}^{\beta}u(\overline{x}, t_n) = b_m u_0^n + \sum_{j=0}^{m} a_j u_{m+1-j}^n + O\left(h^2\right), \tag{19}$$

где коэффициенты имеют вид

$$b_0 = 3p_0 - p_1 + 2q_1 - 2q_0, \quad b_m = p_m - p_{m-1} + (m-1)q_{m-1} - (m+1)q_m, \quad 1 \leqslant m \leqslant M-1,$$
$$a_0 = q_0 - p_0, \quad a_1 = 2p_0 - p_1 + 2q_1 - q_0,$$
$$a_m = (-p_{m-2} + 2p_{m-1} - p_m) + (m-2)q_{m-2} - (2m-1)q_{m-1} + (m+1)q_m, \quad m \geqslant 2,$$
$$p_m = \frac{h^{-\beta}}{(2-\beta)\Gamma(1-\beta)}\left[(m+1)^{2-\beta} - m^{2-\beta}\right], \quad q_m = \frac{h^{-\beta}}{(1-\beta)\Gamma(1-\beta)}\left[(m+1)^{1-\beta} - m^{1-\beta}\right].$$

В монографии [Бейбалаев, 2022] определен разностный аналог дробной производной Капуто–Герасимова порядка ($0 < \beta < 1$) от функции $u(x) \in C^n([0, L])$, которая при каждом $x = x_m$ имеет вид

$$\partial_{0x}^{\beta} u(x_m, t_n) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)h} \sum_{k=0}^{m} \left(x_{m-k+1}^{1-\beta} - x_{m-k}^{1-\beta}\right) \Delta u(x_k, t_n) + O(h). \tag{20}$$

Определим порядок аппроксимации для выражения $\partial_{0x}^{\beta} u(0, t_n)$ на частичном отрезке $[x_0, x_1]$:

$$\partial_{0x}^{\beta} u(x, t)\Big|_{x=0} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{x_1} \frac{u'(z, t_n)}{(x_1 - z)^{\beta}}\, dz\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{x_1} \frac{\frac{u_1^n - u_0^n}{h} + O(h)}{(x_1 - z)^{\beta}}\, dz\Bigg|_{z=0} =$$

$$= \frac{u_1^n - u_0^n}{h} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{x_1} \frac{dz}{(x_1 - z)^{\beta}}\Bigg|_{z=0} + \frac{O(h)}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{x_1} \frac{dz}{(x_1 - z)^{\beta}}\Bigg|_{z=0} = \frac{u_1^n - u_0^n}{h\Gamma(2-\beta)} h^{1-\beta} + O(h)h^{1-\beta}.$$

Таким образом, имеем

$$\partial_{0x}^{\beta} u(0, t_n) = \frac{u_1^n - u_0^n}{\Gamma(2-\beta)h^{\beta}} + O\left(h^{2-\beta}\right), \tag{21}$$

тогда, используя аппроксимацию (19), (20) и (21), получим

$${}^{RL}D_{0x}^{\beta}\left[\partial_{0x}^{\beta} u(\overline{x}, t_n)\right] = b_m\left(\partial_{0x}^{\beta} u(0, t_n) + O\left(h^{2-\beta}\right)\right) + \sum_{j=0}^{m} a_j\left(\partial_{0x}^{\beta} u(x_{m+1-j}, t_n) + O(h)\right) + O\left(h^2\right)$$

или же

$${}^{RL}D_{0x}^{\beta}\left[\partial_{0x}^{\beta} u(\overline{x}, t_n)\right] = b_m\left(\frac{u_1^n - u_0^n}{\Gamma(2-\beta)h^{\beta}} + O\left(h^{2-\beta}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(2-\beta)h} \sum_{j=0}^{m} a_j \left[\sum_{k=0}^{m+1-j} \left(x_{m-j-k+2}^{1-\beta} - x_{m-j-k+1}^{1-\beta}\right) \Delta u(x_k, t_n) + O(h)\right] + O\left(h^2\right). \tag{22}$$

Теорема 2. *Пусть функция $u(x, t)$ непрерывна на отрезке $[0, L]$, тогда разностная аппроксимация (22) имеет порядок аппроксимации, равный $2 - \beta$, где $\frac{1}{2} < \beta < 1$.*

Доказательство. Пусть $C_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \ldots,$ — константы, которые не зависят от h. Разложим функции $u(x_{k+1}, t_n)$ в ряд Тейлора по степеням h. Подставим выражение

$$u(x_{k+1}, t_n) = u(x_k + h, t_n) \approx u(x_k, t_n) + hu'(x_k, t_n) + \frac{u''(\xi_k, t_n)h^2}{2}$$

в (22), получим

$${}^{RL}D_{0x}^{\beta}\left[\partial_{0x}^{\beta} u(\overline{x}, t_n)\right] = b_m\left(\partial_{0x}^{\beta} u(0, t_n) + O\left(h^{2-\beta}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(2-\beta)h} \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{k=0}^{m+1-j} \left[\left(x_{m-j-k+2}^{1-\beta} - x_{m-j-k+1}^{1-\beta}\right)(u(x_{k+1}, t_n) - u(x_k, t_n)) + O(h)\right] + O\left(h^2\right) =$$

$$= b_m\left(\partial_{0x}^{\beta} u(0, t_n) + O\left(h^{2-\beta}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(2-\beta)h} \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{k=1}^{m+1-j} \left(x_{m-j-k+2}^{1-\beta} - x_{m-j-k+1}^{1-\beta}\right)\left[hu'(x_k, t_n) + \frac{u''(\xi_k, t_n)h^2}{2} + O(h)\right] + O\left(h^2\right) =$$

$$= b_m \partial_{0x}^{\beta} u(0, t_n) + \sum_{j=0}^{m} a_j\, \partial_{0x}^{\alpha} u(x_{m+1-j}, t_n) + R_m,$$

где ξ_k — некоторая точка, расположенная в интервале $(x_k,\ x_k+h)$, и

$$R_m = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)h}\sum_{j=0}^{m} a_j\left[\sum_{k=0}^{m+1-j}\left(x_{m-j-k+2}^{1-\beta} - x_{m-j-k+1}^{1-\beta}\right)\left(\frac{u''(\xi_k,\ t_n)h^2}{2} + O(h)\right)\right] + O\left(h^2\right) + b_m O\left(h^{2-\beta}\right). \quad (23)$$

Оценим выражение (23). Так как $|u''(\xi_k,\ t_n)| \leqslant C_1$, то

$$R_m \leqslant \frac{C_1 h^2}{2\Gamma(2-\beta)}\sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{k=1}^{m+1-j}\left(\frac{\left(x_{m-j-k+2}^{1-\beta} - x_{m-j-k+1}^{1-\beta}\right)}{h} + O(h)\right) + b_m O\left(h^{2-\beta}\right) + O\left(h^2\right) =$$

$$= \frac{C_1 h^2}{2\Gamma(2-\beta)}\sum_{j=0}^{m} a_j\left(\sum_{k=1}^{m+1-j}\left(x_{m-j-k+1}^{1-\beta}\right)' + O(h)\right) + b_m O\left(h^{2-\beta}\right) + O\left(h^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3 h^2}{2\Gamma(2-\beta)}\sum_{j=0}^{m} a_j O(h) + b_m O\left(h^{2-\beta}\right) + O\left(h^2\right),$$

так как $\left|\left(x_{m-j-k+1}^{1-\beta}\right)'\right| \leqslant C_2$. Подставляя вместо a_j соответствующие значения, получим

$$R_m = \frac{C_3 h^2}{2\Gamma(2-\beta)}\sum_{j=0}^{m}[(-p_{j-2} + 2p_{j-1} - p_j) + (j-2)q_{j-2} - (2j-1)q_{j-1} + (j+1)q_j]O(h) +$$

$$+ b_m O\left(h^{2-\beta}\right) + O\left(h^2\right) \leqslant b_m O\left(h^{2-\beta}\right) + O\left(h^2\right).$$

Подставляя также вместо b_m соответствующие значения, получим

$$R_m \leqslant [p_m - p_{m-1} + (m-1)q_{m-1} - (m+1)q_m]O\left(h^{2-\beta}\right) + O\left(h^2\right). \quad (24)$$

Преобразуем выражения для q_m и p_m:

$$q_m = \frac{h^{-\beta}}{(1-\beta)\Gamma(1-\beta)}\frac{h^{1-\beta}}{h^{1-\beta}}\left[(m+1)^{1-\beta} - m^{1-\beta}\right] = \frac{x_{m+1}^{1-\beta} - x_m^{1-\beta}}{(1-\beta)\Gamma(1-\beta)h},$$

$$p_m = \frac{h^{-\beta}}{(2-\beta)\Gamma(1-\beta)}\frac{h^{2-\beta}}{h^{2-\beta}}\left[(m+1)^{2-\beta} - m^{2-\beta}\right] = \frac{x_{m+1}^{2-\beta} - x_m^{2-\beta}}{h^2(2-\beta)\Gamma(1-\beta)}.$$

Подставляя в (24), имеем

$$R_m \leqslant \left[\frac{x_{m+1}^{2-\beta} - 2x_m^{2-\beta} + x_{m-1}^{2-\beta}}{h^2(2-\beta)\Gamma(2-\beta)} - m\frac{x_{m+1}^{1-\beta} - 2x_m^{1-\beta} + x_{m-1}^{1-\beta}}{(1-\beta)\Gamma(1-\beta)h} + \frac{x_{m+1}^{1-\beta} - x_{m-1}^{1-\beta}}{(1-\beta)\Gamma(1-\beta)h}\right]O\left(h^{2-\beta}\right) + O\left(h^2\right) =$$

$$= \left[\frac{\left(x_m^{2-\beta}\right)'' + O\left(h^2\right)}{(2-\beta)\Gamma(1-\beta)} - m\frac{h\left(\left(x_m^{1-\beta}\right)'' + O\left(h^2\right)\right)}{(1-\beta)\Gamma(1-\beta)} + \frac{2\left(x_m^{1-\beta}\right)'' + O\left(h^2\right)}{(1-\beta)\Gamma(1-\beta)}\right]O\left(h^{2-\beta}\right) + O\left(h^2\right) \leqslant O\left(h^{2-\beta}\right).$$

Следовательно, $R_m \leqslant O\left(h^{2-\beta}\right)$. Таким образом, доказано, что выражение (22) имеет порядок аппроксимации, равный $O\left(h^{2-\beta}\right)$, т. е.

$$ {}^{RL}D_{0x}^{\beta}\left[\partial_{0x}^{\beta}u(\overline{x},\ t_n)\right] = b_m\,\partial_{0x}^{\beta}u(0,\ t_n) + \sum_{j=0}^{m} a_j\,\partial_{0x}^{\alpha}u(x_{m+1-j},\ t_n) + O\left(h^{2-\beta}\right). \quad (25)$$

5. Разностная схема, аппроксимирующая начально-краевую задачу

В области $D = \{(x, t)\colon 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ введем по переменным x и t равномерную сетку с шагом h по x и τ по t:

$$\begin{gathered}\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x_m, t_n)\colon x_m \in \omega_h,\ t_n \in \omega_\tau\},\\ \omega_h = \{x_m = mh\colon m = 0, 1, 2, \ldots, M,\ Mh = L\},\\ \omega_\tau = \{t_n = n\tau\colon n = 0, 1, 2, \ldots, N,\ N\tau = T\}.\end{gathered}$$

Точное решение задачи (1)–(4) обозначим через $u_m^n = u(x_m, t_n)$, а приближенное решение обозначим через $y_m^n = y(x_m, t_n)$. Тогда, используя аппроксимацию (25), дифференциальной задаче (1)–(4) поставим в соответствие разностную схему порядка $O\left(h^{2-\beta} + \tau\right)$:

$$\Delta_{0t}^\alpha y = D^\beta \Delta_{0x}^\beta y + r^+ y_{\overline{x}} + r^- y_x - q\left(y_{m_0} x_{m_0}^- + y_{m_0+1} x_{m_0}^+\right) + \varphi, \tag{26}$$

$$D^{\beta-1} \Delta_{0x}^\beta y_0 = b_1 y_0^n - \mu_1, \tag{27}$$

$$-D^{\beta-1} \Delta_{0x}^\beta y_M = b_2 y_M^n - \mu_2, \tag{28}$$

$$y_m^0 = u_0(x_m), \quad 0 \leqslant x_m \leqslant l, \tag{29}$$

где

$$\Delta_{0t}^\alpha y = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^{n} \left(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}\right) \Delta y(x_m, t_k),$$

$$\Delta_{0x}^\beta y = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)h} \sum_{k=0}^{m+1-j} \left(x_{m-j-k+2}^{1-\beta} - x_{m-j-k+1}^{1-\beta}\right) \Delta y(x_k, t_n),$$

$$D^\beta\left(\Delta_{0x}^\beta y\right) = b_m \Delta_{0x}^\beta y_0 + \sum_{j=0}^{m} a_j \Delta_{0x}^\beta y, \quad \Delta_{0x}^\beta y_0 = \frac{y_1^n - y_0^n}{\Gamma(2-\beta) h^\beta}, \quad y_{\overline{x}} = \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h}, \quad y_x = \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h},$$

$$r(\overline{x}, t_n) = r, \quad |r| = r^+ - r^-, \quad r^+ = 0{,}5(r + |r|) \geqslant 0, \quad r^- = 0{,}5(r - |r|) \leqslant 0,$$

$$y = y_m^n, \quad \varphi = f(\overline{x}, t_n), \quad b_i = b(t_n), \quad \mu_i = \mu(t_n), \quad i = 1, 2, \quad x_{m_0}^- = \frac{x_{m_0+1} - x_0}{h}, \quad x_{m_0}^+ = \frac{x_0 - x_{m_0}}{h}.$$

Исследуем устойчивость разностной схемы (26)–(29) с помощью метода энергетических неравенств [Самарский, Гулин, 1973]. Введем скалярное произведение и норму в виде

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h, \quad (u, u) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i^2 h = \|u\|_0^2, \quad (u, u] = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 h = \|u]|_0^2.$$

Лемма 2 (см. [Alikhanov, 2015]). *Для любой функции $y(x, t)$, определенной на сетке $\omega_{h\tau}$, справедливо неравенство*

$$y \Delta_{0t}^\alpha y \geqslant \frac{1}{2} \Delta_{0t}^\alpha \left(y^2\right).$$

Умножим выражение (10) скалярно на y:

$$\left(\Delta_{0t}^\alpha y, y\right) = \left(D^\beta\left(\Delta_{0x}^\beta y\right), y\right) + \left(r^+ y_{\overline{x}}, y\right) + (r^- y_x, y) - \left(q\left(y_{m_0} x_{m_0}^- + y_{m_0+1} x_{m_0}^+\right), y\right) + (\varphi, y). \tag{30}$$

Преобразуем слагаемые равенства (30) с помощью леммы 2, неравенства Коши – Буняковского и разностной формулы интегрирования по частям:

$$\left(\Delta_{0t}^{\alpha} y,\, y\right) \geqslant \frac{1}{2}\Delta_{0t}^{\alpha}\|y\|_0^2, \tag{31}$$

$$\left(D^{\beta}\left(\Delta_{0x}^{\beta} y\right),\, y\right) = D^{\beta-1}\left(\Delta_{0x}^{\beta} y_M\right) y_M - D^{\beta-1}\left(\Delta_{0x}^{\beta} y_0\right) y_1 - \left(y_{\overline{x}},\, D^{\beta-1}\left(\Delta_{0x}^{\beta} y\right)\right], \tag{32}$$

$$(\varphi,\, y) \leqslant \varepsilon\|y\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|_0^2. \tag{33}$$

Для третьего слагаемого правой части выражения (32) имеем

$$\left(y_{\overline{x}},\, D^{\beta-1}\left(\Delta_{0x}^{\beta} y\right)\right] \leqslant \varepsilon\|y_{\overline{x}}]|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left\|D^{\beta-1}\left(\Delta_{0x}^{\beta} y\right)\right]\Big|_0^2. \tag{34}$$

Покажем, что выполняется неравенство

$$\left\|D^{\beta-1}\left(\Delta_{0x}^{\beta} y\right)\right]\Big|_0^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(b_i\Delta_{0x}^{\beta} y_0 + \sum_{j=0}^{i} a_j\Delta_{0x_{i+1-j}}^{\beta} y\right)^2 h \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{N}\left(b_i\Delta_{0x}^{\beta} y_0\right)^2 h + 2\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j\Delta_{0x_{i+1-j}}^{\beta} y\right)^2 h \leqslant \frac{2x_{i+1}^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\Delta_{0x}^{\beta}\|y]|_0^2, \tag{35}$$

так как

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j\Delta_{0x_{i+1-j}}^{\beta} y\right)^2 h = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j\frac{1}{\Gamma(2-\beta)h}\sum_{k=0}^{i+1-j}\left(x_{i-j-k+2}^{1-\beta} - x_{i-j-k+1}^{1-\beta}\right)\left(y_i^{k+1} - y_i^{k}\right)\right)^2 h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{[\Gamma(2-\beta)]^2 h^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{i} a_j^2\sum_{k=0}^{i+1-j}\left(x_{i-j-k+2}^{1-\beta} - x_{i-j-k+1}^{1-\beta}\right)\sum_{k=0}^{i+1-j}\left(x_{i-j-k+2}^{1-\beta} - x_{i-j-k+1}^{1-\beta}\right)\left(y_i^{k+1} - y_i^{k}\right)^2 h =$$

$$= \frac{1}{[\Gamma(2-\beta)]^2 h^2}\sum_{j=0}^{i} a_j^2\sum_{k=0}^{i+1-j}\left(x_{i-j-k+2}^{1-\beta} - x_{i-j-k+1}^{1-\beta}\right)\sum_{k=0}^{i+1-j}\left(x_{i-j-k+2}^{1-\beta} - x_{m-j-k+1}^{1-\beta}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(y_i^{k+1} - y_i^{k}\right)^2 h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x_{i+1}^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\Delta_{0x}^{\beta}\|y]|_0^2,$$

в силу неравенства $\sum\limits_{j=0}^{i} a_j \leqslant 1$, доказанного в [Малиева, Бейбалаев, 2018].

Далее докажем, что

$$\sum_{i=1}^{N}\left(b_i\Delta_{0x}^{\beta} y_0\right)^2 h = 0.$$

Для этого сначала преобразуем b_i следующим образом:

$$b_i = p_i - p_{i-1} + (i-1)q_{i-1} - (i+1)q_i = \frac{h^{1-\beta}\left((i-1)^{3-\beta} - 2i^{3-\beta} + (i+1)^{3-\beta}\right)}{(3-\beta)(2-\beta)\Gamma(2-\beta)}.$$

После подстановки имеем

$$\sum_{i=1}^{N}\left(b_i\Delta_{0x}^{\beta}y_0\right)^2 h = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{h^{1-\beta}\left((i-1)^{3-\beta}-2i^{3-\beta}+(i+1)^{3-\beta}\right)}{(3-\beta)(2-\beta)\Gamma(2-\beta)}\Delta_{0x}^{\beta}y_0\right)^2 h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{h^{1-\beta}(i-1)^{3-\beta}-2i^{3-\beta}+(i+1)^{3-\beta}h^2}{(3-\beta)(2-\beta)\Gamma(2-\beta)h^2}\Delta_{0x}^{\beta}y_0\right)^2 h =$$

$$= \left(\frac{2\left(\left(x_{N+1}^{3-\beta}-x_N^{3-\beta}\right)-\left(x_1^{3-\beta}-x_0^{3-\beta}\right)\right)}{(3-\beta)(2-\beta)\Gamma(2-\beta)h^2}\Delta_{0x}^{\beta}y_0\right)^2 h = 0,$$

так как $x_1^{3-\beta}-x_0^{3-\beta}=h^{3-\beta}$ и $x_{N+1}^{3-\beta}-x_N^{3-\beta}=h^{3-\beta}$.

Следовательно, неравенство (35) действительно.

Лемма 3 (см. [Андреев, 1968]). *Для любой функции $y(x)$, заданной на сетке ω_h, справедливо неравенство*

$$\max_{1\leqslant m\leqslant M} y_m^2 \leqslant \varepsilon\|y_{\bar{x}}]|_0^2+\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\|y\|_0^2,$$

где ε — произвольная положительная постоянная, l — длина интервала, на котором введена сетка ω_h.

Пусть $M_i=\mathrm{const}$, $i=1,2,\ldots$, которые зависят от входных данных. Для оценки первого и второго слагаемого в правой части (32) воспользуемся леммой 3 и разложением функции $y_1 = y_0+h$ в ряд Тейлора по степеням h: $y_1=y_0+h\approx y_0+hy'_\zeta$, где ζ — некоторая точка, расположенная в интервале $(0, 0+h)$,

$$D^{\beta-1}\left(\Delta_{0x}^{\beta}y_M\right)y_M^n - D^{\beta-1}\left(\Delta_{0x}^{\beta}y_0\right)y_1^n = -\left(b_2y_M^n-\mu_2\right)y_M^n-\left(b_1y_0^n-\mu\right)y_1^n =$$

$$= -b_2\left(y_M^n\right)^2+\mu_2y_M^n-b_1\left(y_0^n\right)^2+\mu_1y_0^n-hy'_\zeta\left(b_1y_0^n+\mu_1\right)\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\|y_{\bar{x}}]|_0^2+M_1^{\varepsilon}\|y\|_0^2+\frac{\mu_1^2}{2}+\frac{\mu_2^2}{2}-hy'_\xi\left(b_1y_0^n+\mu_1\right)\leqslant \varepsilon\|y_{\bar{x}}]|_0^2+M_1^{\varepsilon}\|y\|_0^2+\frac{1}{2}\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right). \quad (36)$$

После подстановки (34), (35) и (36) в (32) получим

$$\left(D^{\beta}\left(\Delta_{0x}^{\beta}y\right),\, y\right)\leqslant M_1^{\varepsilon}\|y\|_0^2+\frac{1}{2}\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)-\frac{x_{i+1}^{1-\beta}}{2\varepsilon\Gamma(2-\beta)}\Delta_{0x}^{\beta}\|y]|_0^2. \quad (37)$$

Далее оценим оставшиеся слагаемые равенства (30). Так как

$$\left(r^+y_{\bar{x}},\, y\right)\leqslant c^2\varepsilon\|y_{\bar{x}}\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|y\|_0^2, \quad \left(r^-y_x,\, y\right)\leqslant c^2\varepsilon\|y_{\bar{x}}\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|y\|_0^2,$$

тогда имеем

$$\left(r^+y_{\bar{x}}+r^-y_x,\, y\right)\leqslant M_2^{\varepsilon}\|y_{\bar{x}}\|_0^2+\frac{1}{2\varepsilon}\|y\|_0^2. \quad (38)$$

С помощью леммы 3 преобразуем слагаемое

$$\left(q\left(y_{m_0}x_{m_0}^-+y_{m_0+1}x_{m_0}^+\right),\, y\right)=\left(y_{m_0}x_{m_0}^-+y_{m_0+1}x_{m_0}^+\right)(q,\, y)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(y_{m_0}x_{m_0}^-+y_{m_0+1}x_{m_0}^+\right)^2+\frac{1}{2}(q,\, y)^2\leqslant\varepsilon\|y_{\bar{x}}]|_0^2+M_3^{\varepsilon}\|y\|_0^2. \quad (39)$$

Принимая во внимание (31), (33), (37), (38) и (39) и допуская, что $\varepsilon = \frac{1}{2}$, получим

$$\Delta_{0t}^{\alpha}\|y\|_0^2 + \frac{2X^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\Delta_{0x}^{\beta}\|y]|_0^2 + \|y_{\overline{x}}]|_0^2 \leqslant M_5^{\varepsilon}\|y\|_0^2 + M_4^{\varepsilon}\|y_{\overline{x}}\|_0^2 + M_6\left(\|\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right). \qquad (40)$$

Лемма 4 (см. [Бештоков, 2018]). *Допустим, что неотрицательные последовательности* $\{y^i,\ \varphi^i,\ i = 0, 0, 1, 2, \ldots\}$ *удовлетворяют неравенству*

$$\Delta_{0t_{i+1}}^{\alpha} y^i \leqslant \lambda_1 y^{i+1} + \lambda_2 y^i + \varphi^i, \quad i \geqslant 1,$$

где λ_1, $\lambda_2 \geqslant 0$ *— константы. Тогда существует такое* τ_0, *что если* $\tau \leqslant \tau_0$, *то*

$$y^{i+1} \leqslant 2\left(y^0 + \frac{t_i^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\leqslant i'\leqslant i}\varphi^{i'}\right)E_{\alpha}\left(2\lambda t_i^{\alpha}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant i_0,$$

где

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$$

— функция Миттаг-Леффлера, $\lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2+2^{1-\alpha}}$.

На основании леммы 4 из (40) находим априорную оценку

$$\left\|y^{i+1}\right\|_0^2 \leqslant M\left(\left\|y^0\right\|_0^2 + \max_{0\leqslant i'\leqslant i}\left(\left\|\varphi^{i'}\right\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right)\right), \qquad (41)$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, которая не зависит от τ и h.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (5)*, тогда разностная задача* (26)–(29) *устойчива при* $\tau \leqslant \tau_0$ *и для ее решения справедлива априорная оценка* (41).

Из априорной оценки (41) следуют единственность и устойчивость решения задачи (26)–(29) по начальным данным и правой части.

Так как разностная схема (26)–(29) устойчива и аппроксимирует краевую задачу (1)–(4), то, согласно теореме Лакса [Годунов, Рябенький, 1977], решение разностной задачи сходится к решению краевой задачи. Порядок точности совпадает с порядком аппроксимации и равен $O\left(h^{2-\beta} + \tau\right)$.

6. Заключение

Исследовано нагруженное дифференциальное уравнение теплопроводности, содержащее композицию дробных операторов Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова с граничными условиями третьего рода. Получена разностная аппроксимация композиции дробных операторов Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова высокого порядка. При использовании полученной аппроксимации построена разностная схема, аппроксимирующая исходную задачу с порядком $O\left(h^{2-\beta} + \tau\right)$. С помощью метода энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и в разностной форме. Доказаны устойчивость и сходимость решения разностной схемы к решению исследуемой дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Дифференциальные уравнения, содержащие композицию дробных операторов Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова, появляются при моделировании различных физических и геофизических явлений. К их появлению приводит использование понятия эффективной скорости изменения параметров моделируемых процессов. Численное исследование такого рода задач является необходимостью в силу сложности уравнений и невозможности получать аналитические решения.

Сконструированная разностная аппроксимация композиции операторов производных дробного порядка Римана – Лиувилля и Капуто – Герасимова может быть применена при численных исследованиях такого рода уравнений, что позволяет достигнуть высокого порядка аппроксимации разностных схем для исследуемых задач различных прикладных исследований.

Список литературы (References)

Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 5. — С. 658–664.

Alikhanov A. A. Apriornye otsenki reshenii kraevykh zadach dlya uravnenii drobnogo poryadka [A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations] // Diff. equations. — 2010. — Vol. 46, No. 5. — P. 658–664 (in Russian).

Андреев В. Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Ж. вычис. матем. и матем. физ. — 1968. — Т. 8, № 6. — С. 1218–1231.

Andreev V. B. O skhodimosti raznostnykh skhem, approksimiruyushchikh vtoruyu i tret'yu krayevyye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy [On the convergence of difference schemes approximating the second and third boundary value problems for elliptic equations] // Zh. vychisl. math. and math. physical. — 1968. — Vol. 8, No. 6. — P. 1218–1231 (in Russian).

Бейбалаев В. Д. Математические модели динамических процессов во фрактальных и пористых средах: монография. — Махачкала: Издательство ДГУ, 2022. — С. 278.

Beybalayev V. D. Matematicheskiye modeli dinamicheskikh protsessov vo fraktal'nykh i poristykh sredakh: monografiya [Mathematical models of dynamic processes in fractal and porous media]. — Makhachkala: Izdatel'stvo DGU, 2022. — P. 278 (in Russian).

Бейбалаев В. Д., Ибавов Т. И., Омарова А. Г. Численное исследование нелинейного уравнения теплопроводности с производной дробного порядка // Вестник ДГУ. — 2021. — Вып. 2. — С. 47–53.

Beibalaev V. D., Ibavov T. I., Omarova A. G. Chislennoye issledovaniye nelineynogo uravneniya teploprovodnosti s proizvodnoy drobnogo poryadka [Numerical study of the nonlinear heat equation with a fractional order derivative] // Vestnik DGU. — 2021. — Vol. 2. — P. 47–53 (in Russian).

Бештоков М. Х. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова – Капуто // Изв. вузов. Математика. — 2018. — № 10. — С. 3–16.

Beshtokov M. Kh. K krayevym zadacham dlya vyrozhdayushchikhsya psevdoparabolicheskikh uravneniy s drobnoy proizvodnoy Gerasimova – Kaputo [On boundary value problems for degenerate pseudoparabolic equations with fractional derivatives Gerasimov – Caputo] // Izv. universities. Mathematics. — 2018. — No. 10. — P. 3–16 (in Russian).

Бештоков М. Х., Бештокова З. В., Худалов М. З. Конечно-разностный метод решения нелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка // Владикавказский математический журнал. — 2020. — Т. 22, вып. 4. — С. 45–57.

Beshtokov M. Kh., Beshtokova Z. V., Khudalov M. Z. Konechno-raznostnyy metod resheniya nelokal'noy krayevoy zadachi dlya nagruzhennogo uravneniya teploprovodnosti drobnogo poryadka [Finite-difference method for solving a nonlocal boundary value problem for a loaded fractional order heat equation] // Vladikavkazskyy matematicheskyy zhurnal. — 2020. — Vol. 22, No. 4. — P. 45–57 (in Russian).

Бештоков М. Х., Худалов М. З. Третья краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто – Герасимова // Математика и математическое моделирование. — 2020. — № 3. — С. 52–64.

Beshtokov M. Kh., Khudalov M. Z. Tret'ya krayevaya zadacha dlya nagruzhennogo uravneniya teploprovodnosti s drobnoy proizvodnoy Kaputo – Gerasimova [The third boundary value problem for a loaded thermal conductivity equation with a fractional Caputo – Gerasimov derivative] // Matematika i matematicheskoye modelirovaniye. — 2020. — № 3. — P. 52–64 (in Russian).

Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1977. — С. 440.

Godunov S. K., Ryabenkiy V. S. Raznostnyye skhemy [Difference schemes]. — Moscow: Nauka, 1977. — P. 440 (in Russian).

Малиева Ф. Ф., Бейбалаев В. Д. О сходимости разностного метода решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования Римана – Лиувилля // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. — 2018. — № 2. — С. 30–34.

Malieva F. F., Beibalaev V. D. O skhodimosti raznostnogo metoda resheniya zadachi Koshi dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya s operatorom drobnogo differentsirovaniya Rimana – Liuvillya [On the convergence of the difference method for solving the Cauchy problem for an ordinary differential equation with the Riemann – Liouville fractional differentiation operator] // Proceedings of higher educational institutions. North Caucasus region. Ser. Natural sciences. — 2018. — No. 2. — P. 30–34 (in Russian).

Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применения. — М.: Наука, 2012. — С. 232.

Nakhushev A. M. Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniya [Loaded equations and their applications]. — Moscow: Nauka, 2012. — P. 232 (in Russian).

Нахушев А. М. Уравнение математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995. — С. 301.

Nakhushev A. M. Uravneniye matematicheskoy biologii [Mathematical biology equation]. — Moscow: Higher school, 1995. — P. 301 (in Russian).

Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. — Нальчик, 2000. — С. 299.

Nakhushev A. M. Elementy drobnogo ischisleniya i ikh primeneniye [Elements of fractional calculus and their application]. — Nalchik, 2000. — P. 299 (in Russian).

Омарова А. Г. Об устойчивости и сходимости разностной схемы, аппроксимирующей краевую задачу для одного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто – Герасимова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. — 2022. — № 1. — С. 23–27.

Omarova A. G. Ob ustoychivosti i skhodimosti raznostnoy skhemy, approksimiruyushchey krayevuyu zadachu dlya odnogo differentsial'nogo uravneniya s drobnoy proizvodnoy Kaputo – Gerasimova [On the stability and convergence of a difference scheme that approximates a boundary value problem for one differential equation with a Caputo – Gerasimov fractional derivative] // News of Higher Educational Institutions. North Caucasus region. Ser. Natural sciences. — 2022. — No. 1. — P. 23–27 (in Russian).

Омарова А. Г. Численное решение краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто – Герасимова // Труды ИСА РАН. — 2024. — Т. 74, № 2. — С. 3–10.

Omarova A. G. Chislennoye resheniye krayevoy zadachi dlya uravneniya teploprovodnosti s drobnoy proizvodnoy Kaputo – Gerasimova [Numerical solution of the boundary value problem for the heat equation with the fractional derivative of Caputo – Gerasimov] // Proceedings of ISA RAS. — 2024. — Vol. 74, No. 2. — P. 3–10 (in Russian).

Рехвиашвили С. Ш. К определению физического смысла дробного интегродифференцирования // Нелинейный мир. — 2007. — Т. 5, № 4. — С. 194–197.

Rekhviashvili S. Sh. K opredeleniyu fizicheskogo smysla drobnogo integrodifferentsirovaniya [To determine the physical meaning of fractional integrodifferentiation] // Nelineynyy mir. — 2007. — Vol. 5, No. 4. — P. 194–197 (in Russian).

Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в ЖТФ. — 2004. — Т. 30, № 2. — С. 33–37.

Rekhviashvili S. Sh. Formalizm Lagranzha s drobnoy proizvodnoy v zadachakh mekhaniki [Lagrange formalism with fractional derivatives in problems of mechanics] // Pis'ma v ZhTF. — 2004. — Vol. 30, No. 2. — P. 33–37 (in Russian).

Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973. — С. 415.

Samarsky A. A., Gulin A. V. Ustoychivost' raznostnykh skhem [Stability of difference schemes]. — Moscow: Nauka, 1973. — 415 p. (in Russian).

Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives, theory and applications. — Yverdon: Gordon and Breach, 1993. — 688 p. (Russ. ed.: *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya. — Minsk: Nauka i tekhnika, 1987. — 688 p.)

Энеева Л. М. Априорная оценка для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2019. — Т. 29, № 4. — С. 41–47.

Eneeva L. M. Apriornaya otsenka dlya uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami [A priori estimate for an equation with derivatives of fractional order with different beginnings] // Vestnik KRAUNC. Phys.-math. sciences. — 2019. — Vol. 29, No. 4. — P. 41–47 (in Russian).

Энеева Л. М. Нелокальная краевая задача для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2023. — Т. 44, № 3. — С. 58–66.

Eneyeva L. M. Nelokal'naya krayevaya zadacha dlya uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami [Nonlocal boundary value problem for an equation with derivatives of fractional order with different beginnings] // Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki. — 2023. — Vol. 44, No. 3. — P. 58–66 (in Russian).

Alikhanov A. A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation // Applied Mathematics and Computation. — 2015. — No. 268. — P. 12–22.

Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2007. — Vol. 10, No. 2. — P. 139–150.

Beybalaev V. D., Aliverdiev A. A. Mathematical model of heat conduction for a semi-infinite body, taking into account memory effects and spatial correlations // Fractal Fractional. — 2023. — Vol. 7 (3), No. 265. — DOI: org/10.3390/fractalfract7030265

Beybalaev V. D., Aliverdiev A. A., Hristov J. Transient heat conduction in a semi-infinite domain with a memory effect: analytical solutions with a robin boundary condition // Fractal Fractional. — 2023. — Vol. 7 (10), No. 770. — DOI: org/10.3390/fractalfract7100770

Brociek R., Hetmaniok E., Slota D. Numerical solution for the heat conduction model with a fractional derivative and temperature-dependent parameters // Symmetry. — 2024. — Vol. 16, No. 6. — P. 667.

Kukla S., Siedlecka U., Ciesielski M. Fractional order dual-phase-lag model of heat conduction in a composite spherical medium // Materials. — 2022. — Vol. 15, No. 20. — P. 7251.

Liu L., Chen S., Feng L., Zhu J., Zhang J., Zheng L., Xie Ch. A novel distributed order time fractional model for heat conduction, anomalous diffusion, and viscoelastic flow problems // Computers & Fluids. — 2023. — Vol. 265. — P. 105991.

Magin R. L. Fractional calculus in bioengineering. — Begell House, 2006. — P. 684.

Mainardi F. The fundamental solution for the fractional diffusion-ware equation // Appl. Math. Lett. — 1996. — Vol. 9, No. 6. — P. 23–28.

Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. — 2000. — P. 1–77.

Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. — N. Y.: Wiley, 1993. — P. 366.

Oldham K. B., Spanier J. The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. — N. Y.: Academic Press, 1974. — P. 234.

Owolabi K. M., Atangana A. Numerical methods for fractional differentiation. — Singapore: Springer, 2019. — P. 328.

Podlubny I. Fractional differential equations. — San Diego: Academic Press, 1999. — P. 340.

Sivalingam S. M., Kumar P., Trinh H., Govindaraj V. A novel L1-Predictor-Corrector method for the numerical solution of the generalized-Caputo type fractional differential equations // Mathematics and Computers in Simulation. — 2024. — Vol. 220. — P. 462–480.

Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional analogue of Sturm – Liouville operator // Documenta Mathematica. — 2016. — Vol. 21. — P. 1503–1514.

Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. — 2014. — Vol. 13, No. 1. — P. 125–142.