

УДК: 532.54

Модель установившегося течения реки в поперечном сечении изогнутого русла

И. И. Потапов^{1,a}, Д. И. Потапов^{2,b}

¹Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65

²Институт горного дела Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Тургенева, д. 51

E-mail: ^a potapov2i@gmail.com, ^b shineon91@mail.ru

*Получено 06.09.2023, после доработки — 02.09.2024.
Принято к публикации 03.09.2024.*

Моделирование русловых процессов при исследовании береговых деформаций русла требует вычисления параметров гидродинамического потока, учитывающих существование вторичных поперечных течений, формирующихся на закруглении русла. Трехмерное моделирование таких процессов на текущий момент возможно только для небольших модельных каналов, для реальных речных потоков необходимы модели пониженной размерности. При этом редукция задачи от трехмерной модели движения речного потока к двумерной модели потока в плоскости створа канала предполагает, что рассматриваемый гидродинамический поток является квазистационарным, и для него выполнены гипотезы об асимптотическом поведении потока по потоковой координате створа. С учетом данных ограничений в работе сформулирована математическая модель задачи о движении стационарного турбулентного спокойного речного потока в створе канала. Задача сформулирована в смешанной постановке скорости — «вихрь — функция тока». В качестве дополнительных условий для редукции задачи требуется задание граничных условий на свободной поверхности потока для поля скорости, определяемого в нормальном и касательном направлении к оси створа. Предполагается, что значения данных скоростей должны быть определены из решения вспомогательных задач или получены из данных натуральных или экспериментальных измерений.

Для решения сформулированной задачи используется метод конечных элементов в формулировке Петрова–Галёркина. Получен дискретный аналог задачи и предложен алгоритм ее решения. Выполненные численные исследования показали в целом хорошую согласованность полученных решений при их сравнении с известными экспериментальными данными.

Полученные погрешности авторы связывают с необходимостью более точного определения циркуляционного поля скоростей в створе потока путем подбора и калибровки более подходящей модели вычисления турбулентной вязкости и граничных условий на свободной границе створа.

Ключевые слова: речной поток, открытый канал, изгиб русла, речной створ, метод конечных элементов

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 24-17-20009).

UDC: 532.54

Model of steady river flow in the cross section of a curved channel

I. I. Potapov^{1,a}, D. I. Potapov^{2,b}

¹Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
65 Kim Yu-Jong st., Khabarovsk, 680000, Russia

²Mining Institute of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
51 Turgenev st., Khabarovsk, 680000, Russia

E-mail: ^a potapov2i@gmail.com, ^b shineon91@mail.ru

Received 06.09.2023, after completion – 02.09.2024.

Accepted for publication 03.09.2024.

Modeling of channel processes in the study of coastal channel deformations requires the calculation of hydrodynamic flow parameters that take into account the existence of secondary transverse currents formed at channel curvature. Three-dimensional modeling of such processes is currently possible only for small model channels; for real river flows, reduced-dimensional models are needed. At the same time, the reduction of the problem from a three-dimensional model of the river flow movement to a two-dimensional flow model in the cross-section assumes that the hydrodynamic flow under consideration is quasi-stationary and the hypotheses about the asymptotic behavior of the flow along the flow coordinate of the cross-section are fulfilled for it. Taking into account these restrictions, a mathematical model of the problem of the a stationary turbulent calm river flow movement in a channel cross-section is formulated. The problem is formulated in a mixed formulation of velocity – “vortex – stream function”. As additional conditions for problem reducing, it is necessary to specify boundary conditions on the flow free surface for the velocity field, determined in the normal and tangential direction to the cross-section axis. It is assumed that the values of these velocities should be determined from the solution of auxiliary problems or obtained from field or experimental measurement data.

To solve the formulated problem, the finite element method in the Petrov – Galerkin formulation is used. Discrete analogue of the problem is obtained and an algorithm for solving it is proposed. Numerical studies have shown that, in general, the results obtained are in good agreement with known experimental data. The authors associate the obtained errors with the need to more accurately determine the circulation velocities field at cross-section of the flow by selecting and calibrating a more appropriate model for calculating turbulent viscosity and boundary conditions at the free boundary of the cross-section.

Keywords: river flow, open channel, riverbed bend, cross-section, finite element method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 1163–1178 (Russian).

This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project code 24-17-20009).

1. Введение

Важность учета поперечных (вторичных) течений, формирующихся на закруглении русла при моделировании русловых процессов, несмотря на относительную малость этих течений, весьма велика [Маккаев, 1940; Потапов, 1947; Розовский, 1957]. Это объясняется тем, что они определяют характер придонного движения водных масс, обогащенных наносами, способствуя заилению одних участков русла, и подводят осветленную воду поверхностных слоев потока к другим участкам, способствуя размыву донно-береговой поверхности. В связи с этим разработка теории движения потока при искривлении струй является необходимой основой как при исследовании закономерностей формирования естественных русел, так и при решении ряда практически важных инженерных задач. Значительный вклад в исследование данного направления внесен в основном отечественными учеными В. М. Маккаевым [Маккаев, 1940], М. В. Потаповым [Потапов, 1947], И. Л. Розовским [Розовский, 1957], К. В. Гришаниным [Гришанин, 1979] и многими другими.

В работах Маккаева [Маккаев, 1940] получено аналитическое решение задач о распределении поперечных и продольных скоростей на закруглении русла, рассмотрены вопросы возникновения и затухания поперечной циркуляции. В работах М. В. Потапова [Потапов, 1947] рассмотрены вопросы возбуждения циркуляции струенаправляющими конструкциями. Значительный вклад в теоретические и экспериментальные исследования поперечных циркуляций в открытых потоках произвел И. Л. Розовский [Розовский, 1957].

Однако, несмотря на значительные успехи в понимании гидродинамических процессов, протекающих в створах канала [Маккаев, 1940; Потапов, 1947; Розовский, 1957; Гришанин, 1979; Караушев, 1960; Доманевский и др., 1956], вопрос о математических моделях, позволяющих находить искомые поля в створе канала, остается открытым. Сформулировано достаточно много математических моделей для речного створа [Kean et al., 2009; Yang, Lim, 2005; Javid, Mohammadi, 2012; Figuérez, Galán, González, 2021], позволяющих определять характеристики речного потока без учета вторичных течений в створе, обзор по которым можно получить в работе [Figuérez, Galán, González, 2021].

Существует немало работ, исследующих вторичные циркуляционные течения в трехмерных модельных каналах [Huange et al., 2009; Stoesser, Ruether, Olsen, 2010; Gholami et al., 2014], однако данные подходы крайне затратны по вычислительным ресурсам [Gholami et al., 2014] и неприемлемы для расчета эволюционных русловых процессов в масштабах реальных прикладных задач.

Плановые модели движения осредненного по глубине речного потока позволяют достаточно хорошо определять осредненные скорости потока и глубину реки [Struiksmá et al., 1985; Almeida, Ota, 2020], но не могут воспроизводить вторичную циркуляцию в створах реки.

В данной работе предлагается модель движения установившегося речного потока в створе канала (радиальном сечении канала). Особенность предлагаемой модели заключается в гипотезе о слабом влиянии изменений окружных членов уравнений Рейнольдса на гидродинамическую картину в створе, т. е. все производные по окружной координате ϕ будут равны нулю [Маккаев, 1940; Потапов, 1947; Розовский, 1957]. Косвенный учет их влияния, позволяющий позиционировать створ на повороте русла, выполняется через определение граничных условий для поля скорости, определяемой в нормальном и касательном направлении к оси створа на свободной поверхности потока. Предполагается, что значения данной скорости должны быть определены из решения вспомогательных задач или получены из данных натурных или экспериментальных измерений.

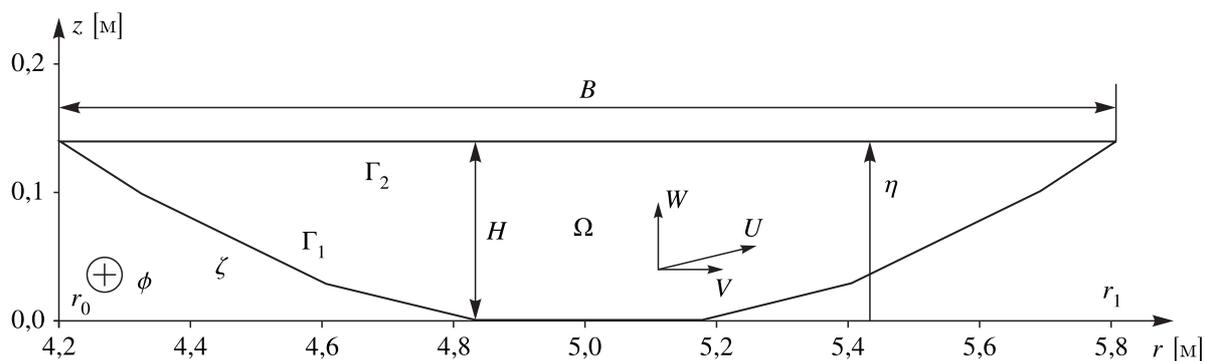


Рис. 1. Геометрия расчетной области Ω , являющейся радиальным сечением — створом канала и ее границы $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, ζ — отметки (уровень) донной поверхности канала, η — отметки (уровень) свободной поверхности потока, H — глубина потока, B — ширина канала, (U, V, W) — направление компоненты вектора скорости, осредненной по Рейнольдсу

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении гидродинамического потока в створе искривленного канала сложного сечения. Канал имеет постоянный малый продольный уклон J в направлении движения гидродинамического потока. Предполагается, что для канала выполняются условия малости в отношении глубины потока к его ширине ($\frac{H}{B} \ll 1$) и глубины потока к среднему радиусу его закругления ($\frac{H}{R} \ll 1$). Геометрия расчетной области Ω и ее границы Γ_1, Γ_2 представлены на рис. 1. Граница Γ_1 представляет собой смоченную береговую и донную поверхности канала, граница Γ_2 определяет свободную поверхность потока.

Предполагая, что установившийся поток в створе канала зависит только от координат створа r и z : $U = U(r, z)$, $V = V(r, z)$, $W = W(r, z)$, $P = P(r, z)$, и воспользовавшись уравнениями Рейнольдса [Розовский, 1957], записанными в цилиндрической системе координат, получим уравнения движения в створе канала:

$$\rho \left(V \frac{\partial V}{\partial r} + W \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{U^2}{r} \right) + \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \mu_e \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V}{r} \right) + \frac{\partial \mu_e}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial \mu_e}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\rho \left(V \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\mu_e}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - \rho g + \frac{\partial \mu_e}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \mu_e}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{V}{r} = 0, \quad (3)$$

$$\rho \left(V \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{VU}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \mu_e \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) + \rho g J - \frac{\partial \mu_e}{\partial r} \frac{U}{r}. \quad (4)$$

Используя подстановки для функции вихря ω и функции тока Φ :

$$\omega = \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (5)$$

$$V = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad W = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (6)$$

получим уравнение для функции тока Φ в створе канала:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r\omega = 0, \quad (7)$$

а из уравнений (1)–(3) получим уравнение для функций вихря ω в створе канала:

$$\left(\rho V - \frac{\partial \mu_e}{\partial r}\right) \frac{\partial \omega}{\partial r} + \left(\rho W - \frac{\partial \mu_e}{\partial z}\right) \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e \frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\omega}{r}\right)\right) + Q_\omega, \quad (8)$$

где

$$Q_\omega = -\frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial z} (U^2) + 2 \frac{\partial \mu_e}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial^2 \mu_e}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \mu_e}{\partial z^2}\right). \quad (9)$$

Определим граничные условия для уравнений задачи (4)–(9), определяющих движение гидродинамического потока, проходящего через створ канала. Поскольку через контур области Ω нет потока жидкости, то значение функции тока Φ на контуре постоянно и может быть принято равным нулю, тогда граничные условия на дне канала примут вид [Роуч, 1980]

$$U = 0, \quad \Phi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 n}, \quad (y, z) \in \Gamma_1. \quad (10)$$

Граничные условия на свободной поверхности потока:

$$U = U_\eta, \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = V_\eta, \quad \omega = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right), \quad (y, z) \in \Gamma_2. \quad (11)$$

Задача (4)–(11) замыкается алгебраической моделью турбулентной вязкости Лео К. ван Рейна [van Rijn, 1984]

$$\mu_e = \mu_t + \mu, \quad (12)$$

$$\mu_t = \rho k u_* H(r) \begin{cases} \left(1 - \frac{z}{H(r)}\right) \left(\frac{z}{H(r)}\right), & \frac{z}{H(r)} < 0,5, \\ 0,25, & \end{cases} \quad (13)$$

$$u_* = \frac{\kappa U_b}{\ln\left(\frac{z_b}{z_0}\right)}, \quad (14)$$

где U_b – скорость U на расстоянии $z_b = 0,05H$ от дна $z_0 = 0,03k_s$, k_s – эффективная высота шероховатости дна.

Здесь U , V и W – осредненная по Рейнольдсу скорость речного потока в области Ω , J – уклон речного русла, μ_t – турбулентная вязкость потока, μ – молекулярная вязкость потока, $H = \eta - \zeta$ – глубина потока, g – ускорение свободного падения, η и $\zeta = \zeta(r)$ – отметки свободной поверхности потока и донной поверхности русла соответственно, ρ – плотность воды, r_0 и r_1 – координаты выпуклого и вогнутого берега створа.

3. Слабая формулировка задачи

Рассмотрим слабую вариационную формулировку Галёркина для задачи (4)–(11) с набором пробных функций $\{N_\alpha, L_\alpha\} \in H^1(\Omega)$. В задаче необходимо найти неизвестные функ-

ции $\{U, V, W, \omega, \Phi\} \in H^1(\Omega)$, такие, что

$$\int_{\Omega} \left[\rho L_{\alpha} \left(V \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{VU}{r} \right) + \mu_e \left(\frac{\partial L_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial L_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega} L_{\alpha} \left[\frac{\partial \mu_e}{\partial r} \frac{U}{r} - \mu_e \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} L_{\alpha} \rho g J d\Omega, \quad (15)$$

$$\int_{\Omega} \left[L_{\alpha} \left(\left(\rho V - \frac{\partial \mu_e}{\partial r} \right) \frac{\partial \omega}{\partial r} + \left(\rho W - \frac{\partial \mu_e}{\partial z} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \mu_e \left(\frac{\partial L_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial L_{\alpha}}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\omega}{r} \right) \right) \right] d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial z} \frac{\rho U^2}{r} \right] d\Omega + 2 \int_{\Omega} \left[L_{\alpha} \left(2 \frac{\partial^2 \mu_e}{\partial r \partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \mu_e}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \mu_e}{\partial z^2} \right) \right) \right] d\Omega, \quad (16)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{N_{\alpha}}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - r N_{\alpha} \omega \right] d\Omega = 0, \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_{\alpha} \left(V - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right] d\Omega = 0, \quad (18)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_{\alpha} \left(W + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right] d\Omega = 0. \quad (19)$$

Граничные условия:

$$U = 0, \quad (r, z) \in \Gamma_1, \quad U = U_{\eta}, \quad (r, z) \in \Gamma_2, \quad (20)$$

$$\Phi = 0, \quad \omega = \omega_b, \quad (r, z) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2; \quad (21)$$

значение ω_b определяется в алгоритме решения задачи (из ряда Тейлора для функции тока Φ [Роч, 1980]) с учетом условий (10), (11).

4. Дискретный аналог задачи

Используем метод конечных элементов в формулировке Петрова–Галёркина. Разобьем расчетную область Ω на трехузловые конечные элементы Ω_e , $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$. Введем на конечном элементе функции формы [Шабров, 1983] N_{α} :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2\Omega_e} [(r_2 z_3 - r_3 z_2) + (z_2 - z_3)r + (r_3 - r_2)z], \\ N_2 = \frac{1}{2\Omega_e} [(r_3 z_1 - r_1 z_3) + (z_3 - z_1)r + (r_1 - r_3)z], \\ N_3 = \frac{1}{2\Omega_e} [(r_1 z_2 - r_2 z_1) + (z_1 - z_2)r + (r_2 - r_1)z], \end{cases} \quad \Omega_e = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где r_k, z_k — координаты вершин (узлов) конечного элемента, Ω_e — площадь конечного элемента. Определим аппроксимацию искомых функций на конечном элементе

$$U = N_{\alpha} U_{\alpha}, \quad V = N_{\alpha} V_{\alpha}, \quad W = N_{\alpha} W_{\alpha}, \quad \mu_e = N_{\alpha} \mu_{e\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (23)$$

$$\omega = N_{\alpha} \omega_{\alpha}, \quad \Phi = N_{\alpha} \Phi_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (24)$$

где $U_{\alpha}, V_{\alpha}, W_{\alpha}, \omega_{\alpha}, \Phi_{\alpha}$ — значения искомых полей в α -х узлах конечного элемента, в выражениях (24), (25) и далее ниже по тексту, где это не приводит к неоднозначностям, используется

правило суммирования по «немым» узловым индексам $\left(N_\gamma U_\gamma \equiv \sum_{\gamma=1}^3 N_\gamma U_\gamma\right)$, $\mu_{e\alpha}$ – значение функции приведенной вязкости в узлах конечного элемента. $\bar{\mu}_e, \frac{\partial^2 \mu}{\partial r \partial z}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2}$ – осредненные величины функции вязкости и ее производных второго порядка на конечном элементе.

Для противоточной стабилизации дискретного аналога задачи воспользуемся методом Петрова – Галёркина (SUPG) [Булгаков, Потапов, 2003] с весовыми функциями

$$L_\alpha = N_\alpha + ah_r A_r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_\alpha}{\partial z}, \tag{25}$$

где

$$A_r = \frac{\bar{V}}{\sqrt{\bar{V}^2 + \bar{W}^2}}, \quad A_z = \frac{\bar{W}}{\sqrt{\bar{V}^2 + \bar{W}^2}}, \quad h_r = h_z = h = \frac{\sqrt{\Omega_e}}{2}, \quad 0,5 \leq a \leq 1. \tag{26}$$

Переход от узловых значений искомых функций к значениям на элементах будем выполнять по формулам

$$\bar{U} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 U_\alpha, \quad \bar{V} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 V_\alpha, \quad \bar{W} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 W_\alpha, \quad \bar{r} = r_0 + \frac{1}{3} \sum_{\gamma=1}^3 r_\gamma. \tag{27}$$

Используя интерполяцию (22)–(27), преобразуем интегральные тождества (15)–(19) в дискретные аналоги задачи:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \rho \left(N_\alpha + ah_r A_r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \right) \left(N_\gamma V_\gamma \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \frac{N_\beta}{\bar{r}} \right) + N_\gamma W_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega U_\beta + \\ & + \int_{\Omega_e} \left(N_\alpha + ah_r A_r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \right) \left[\mu_{e\gamma} \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \frac{N_\beta}{\bar{r}} - \bar{\mu}_e \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} - \frac{N_\beta}{\bar{r}^2} \right) \right] d\Omega U_\beta + \\ & + \int_{\Omega_e} \bar{\mu}_e \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega U_\beta = \int_{\Omega_e} \left(N_\alpha + ah_r A_r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \right) \rho g J d\Omega, \tag{28} \\ & \int_{\Omega_e} \rho \left(N_\alpha N_\gamma V_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + N_\gamma W_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega \omega_\beta - \\ & - \int_{\Omega_e} N_\alpha \left(\mu_{e\gamma} \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \mu_{e\gamma} \frac{\partial N_\gamma}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega \omega_\beta + \\ & + \int_{\Omega_e} \rho \left(ah_r A_r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \right) \left(N_\gamma V_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + N_\gamma W_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega \omega_\beta - \\ & - \int_{\Omega_e} \left(ah_r A_r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \right) \left(\mu_{e\gamma} \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \mu_{e\gamma} \frac{\partial N_\gamma}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega \omega_\beta + \\ & + \int_{\Omega_e} \bar{\mu}_e \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega \omega_\beta + \int_{\Omega_e} \bar{\mu}_e \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{N_\beta}{\bar{r}} d\Omega \omega_\beta = \\ & = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\rho N_\gamma (U^2)}{\bar{r}} \right) d\Omega + 2 \int_{\Omega_e} \left(N_\alpha + ah_r A_r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \left(2 \frac{\partial^2 \mu_e}{\partial r \partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \mu_e}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \mu_e}{\partial z^2} \right) \right) d\Omega, \quad (29)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} + \frac{N_\alpha}{\bar{r}} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right] d\Omega \Phi_\beta = \int_{\Omega_e} \bar{r} N_\alpha N_\gamma d\Omega \omega_\gamma, \quad (30)$$

$$\int_{\Omega_e} N_\alpha N_\beta d\Omega V_\beta = \int_{\Omega_e} \frac{N_\alpha}{\bar{r}} \frac{\partial N_\gamma}{\partial z} \Phi_\gamma d\Omega, \quad (31)$$

$$\int_{\Omega_e} N_\alpha N_\beta d\Omega W_\beta = - \int_{\Omega_e} \frac{N_\alpha}{\bar{r}} \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \Phi_\gamma d\Omega. \quad (32)$$

5. Алгоритм решения задачи

Для каждого i -го узла донной поверхности (за исключением береговых узлов) с радиус-вектором узла $\vec{x}_i = (r_i, z_i) \in \Gamma_1$ выполним расчет векторов $(\vec{\tau}_i, \vec{n}_i, \vec{p}_i$ и $\vec{p}_i^V)$:

$$\vec{\tau}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_{i-1}, \quad \vec{n}_i = \begin{pmatrix} -\frac{\tau_{i2}}{\sqrt{\tau_{i1}^2 + \tau_{i2}^2}}, & \frac{\tau_{i1}}{\sqrt{\tau_{i1}^2 + \tau_{i2}^2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_i = \vec{x}_i + h\vec{n}_i, \quad \vec{p}_i^V = \vec{x}_i + h^V \vec{n}_i, \quad h^V = 0,05H(r_i),$$

и поиск приграничных конечных элементов с функциями формы $N_\alpha(\vec{p}_i)$, $N_\alpha(\vec{p}_i^V)$. Аналогичный поиск конечных элементов с функциями формы $N_\alpha(\vec{p}_i)$ выполняется для i -х узлов свободной поверхности $\vec{x}_i \in \Gamma_2$ с векторами

$$\vec{n}_i = (0, -1), \quad \vec{p}_i = \vec{x}_i + h\vec{n}_i.$$

Выполним расчет начальной придонной динамической скорости створа:

$$u_* = \sqrt{gJR}, \quad R = \frac{S_\Omega}{P}, \quad S_\Omega = \int_{r_0}^{r_1} H(r) dr, \quad P = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta(r)}{dy} \right)^2} dr.$$

Проведем расчет начального поля вязкости для всех i -х узлов расчетной области Ω^h :

$$\mu_{ei} = \mu_{ii} + \mu, \quad \mu_{ii} = \rho \kappa u_* H(r_i) \begin{cases} \left(1 - \frac{z_i}{H(r_i)} \right) \left(\frac{z_i}{H(r_i)} \right), & \frac{z_i}{H(r_i)} < 0,5, \\ 0,25. \end{cases}$$

Выполним следующие циклические действия.

1. Вычислим скорость U_α :

$$\bigcup [(K_{\alpha\beta}^{CU} + K_{\alpha\beta}^{DU} + K_{\alpha\beta}^{DRU}) U_\beta + F_\alpha^U] = 0.$$

2. Вычислим текущую придонную динамическую скорость:

$$u_*(r_i) = \frac{\kappa N_\alpha(\vec{p}_i^V) U_\alpha}{\ln\left(\frac{h^V}{z_0}\right)}.$$

3. Вычислим значение приведенной вязкости для всех узлов расчетной области $\vec{x}_i = (r_i, z_i) \in \Omega$:

$$\mu_{ei} = \mu_{ii} + \mu, \quad \mu_{ii} = \rho k u_*(r_i) H(y_i) \begin{cases} \left(1 - \frac{z_i}{H(r_i)}\right) \left(\frac{z_i}{H(r_i)}\right), & \frac{z_i}{H(r_i)} < 0,5, \\ 0,25. \end{cases}$$

4. Определим для функции вихря граничные условия (21) на контуре створа:

$$\omega_{bi} = -\frac{N_\alpha(\vec{p}_i)\Phi_\alpha}{r_i h^2}, \quad \vec{x}_i \in \Gamma_1,$$

$$\omega_{bi} = -\frac{N_\alpha(\vec{p}_i)\Phi_\alpha}{r_i h^2} + \frac{2V_\eta}{h}, \quad \vec{x}_i \in \Gamma_2.$$

5. Вычислим функцию вихря ω_a :

$$\bigcup \left[(K_{\alpha\beta}^{C\omega} + K_{\alpha\beta}^{D\omega} + K_{\alpha\beta}^{CRW}) \omega_\beta^* + F_\alpha^{M\omega} + F_\alpha^{U\omega} \right] = 0.$$

6. Выполним релаксацию функции вихря ω_a :

$$\omega_\beta = (1 - \gamma)\omega_\beta^* + \gamma\omega_\beta^0.$$

7. Вычислим функцию тока Φ_a :

$$\bigcup \left[K_{\alpha\beta}^\Phi \Phi_\beta^* + F_\alpha^\Phi \right] = 0.$$

8. Выполним релаксацию функции тока Φ_β :

$$\Phi_\beta = (1 - \gamma)\Phi_\beta^* + \gamma\Phi_\beta^0.$$

9. Вычислим компоненты вектора скорости в плоскости створа:

$$\bigcup \left[M_{\alpha\beta} V_\beta + F_\alpha^V \right] = 0, \quad \bigcup \left[M_{\alpha\beta} W_\beta + F_\alpha^W \right] = 0.$$

10. Вычислим невязку:

$$E_r = \frac{\sum_i^M (\omega_i - \omega_i^0)^2}{\sum_i^M \omega_i^2} + \frac{\sum_i^M (\Phi_i - \Phi_i^0)^2}{\sum_i^M \Phi_i^2},$$

при $E_r > \varepsilon$ переходим на пункт 1. При $E_r \leq \varepsilon$ завершаем расчет.

Здесь ε — допустимая невязка решения, $\gamma \leq 0,3$ — параметр релаксации решения, M — количество узлов в расчетной области, $\bigcup[*]$ обозначает операцию сборки локальных конечно-элементных дискретных аналогов задачи в глобальную систему алгебраических уравнений

задачи,

$$\begin{aligned}
K_{\alpha\beta}^{CU} &= \int_{\Omega_e} \rho N_\alpha N_\gamma V_\gamma d\Omega \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \int_{\Omega_e} \rho N_\alpha N_\gamma W_\gamma d\Omega \frac{\partial N_\beta}{\partial z} + \int_{\Omega_e} \rho N_\alpha N_\beta \frac{\bar{V}}{\bar{r}} d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega_e} \rho \left(ah_r A_r \frac{\partial N_a}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \left(\bar{V} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} \rho \left(ah_r A_r \frac{\partial N_a}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{\bar{r}} N_\beta N_\gamma V_\gamma \right) d\Omega, \\
K_{\alpha\beta}^{DU} &= \int_{\Omega_e} \bar{\mu}_e \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega, \\
K_{\alpha\beta}^{DRU} &= \int_{\Omega_e} \left(N_\alpha N_\beta \left(\frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \frac{\mu_{e\gamma}}{\bar{r}} + \frac{\bar{\mu}_e}{\bar{r}^2} \right) - N_\alpha \frac{\bar{\mu}_e}{\bar{r}} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} \right) d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega_e} \left(ah_r A_r \frac{\partial N_a}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \left[\left(\frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \frac{\mu_{e\gamma}}{\bar{r}} + \frac{\bar{\mu}_e}{\bar{r}^2} \right) N_\beta - \frac{\bar{\mu}_e}{\bar{r}} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} \right] d\Omega, \\
F_\alpha^U &= \int_{\Omega_e} \left(N_\alpha + ah_r A_r \frac{\partial N_a}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \rho_w g J d\Omega, \\
K_{\alpha\beta}^{C\omega} &= \int_{\Omega_e} \left(\rho N_\alpha N_\gamma V_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \rho N_\gamma W_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} N_\alpha \left(\mu_{e\gamma} \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \mu_{e\gamma} \frac{\partial N_\gamma}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega_e} \rho \left(ah_r A_r \frac{\partial N_a}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \left(N_\gamma V_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + N_\gamma W_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega - \\
&- \int_{\Omega_e} \left(ah_r A_r \frac{\partial N_a}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \left(\mu_{e\gamma} \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \mu_{e\gamma} \frac{\partial N_\gamma}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega, \\
K_{\alpha\beta}^{D\omega} &= \int_{\Omega_e} \bar{\mu}_e \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} \bar{\mu}_e \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{N_\beta}{\bar{r}} d\Omega, \\
F_\alpha^{U\omega} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\rho N_\gamma (U^2)_\gamma}{\bar{r}} \right) d\Omega, \\
F_\alpha^{M\omega} &= 2 \int_{\Omega_e} \left(N_\alpha + ah_r A_r \frac{\partial N_a}{\partial r} + ah_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \times \\
&\times \left(2 \frac{\partial^2 \mu_e}{\partial r \partial z} \left(\frac{\partial N_\beta W_\beta}{\partial z} - \frac{\partial N_\beta V_\beta}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial N_\beta W_\beta}{\partial r} + \frac{\partial N_\beta V_\beta}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \mu_e}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \mu_e}{\partial z^2} \right) \right) d\Omega, \\
K_{\alpha\beta}^\Phi &= \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} + \frac{N_\alpha}{\bar{r}} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right] d\Omega, \\
F_\alpha^\Phi &= \int_{\Omega_e} \bar{r} N_\alpha N_\gamma d\Omega \omega_\gamma, \\
M_{\alpha\beta} &= \int_{\Omega_e} N_\alpha N_\beta d\Omega, \\
F_\alpha^V &= \int_{\Omega_e} \frac{N_\alpha}{\bar{r}} \frac{\partial N_\gamma}{\partial z} \Phi_\gamma d\Omega, \quad F_\alpha^W = - \int_{\Omega_e} \frac{N_\alpha}{\bar{r}} \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \Phi_\gamma d\Omega.
\end{aligned}$$

6. Результаты расчетов

Для верификации предложенной математической модели (13)–(21) был выполнен ряд расчетов, связанных с определением полей U, V, W, Φ, ω в створах 15, 18 и 21 канала (расположение которых приведено на рис. 2). Геометрия створов приведена в таблице 1 и согласуется с экспериментальным каналом, приведенным в работе [Розовский, 1957].

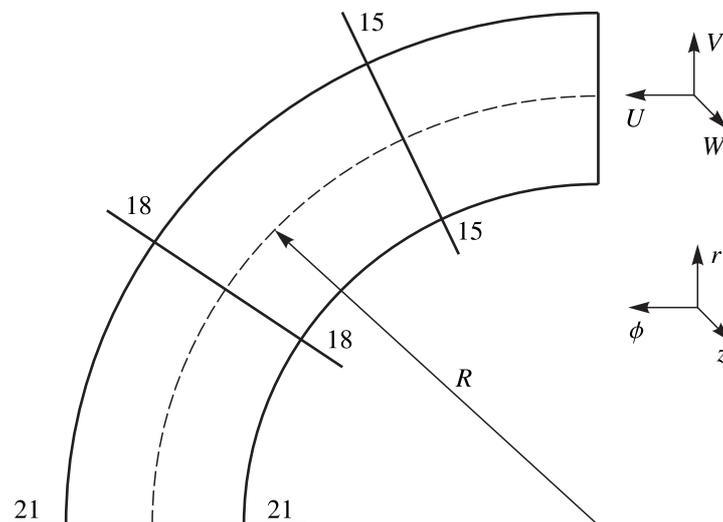


Рис. 2. Расположение расчетных створов (15, 18 и 21) на схеме экспериментального канала Розовского, R — средний радиус закругления канала, (U, V, W) — компоненты вектора скорости, осредненной по Рейнольдсу, в створах канала, согласованные с координатными осями $(\phi, r$ и $z)$

Таблица 1. Отметки донной поверхности ζ от внутренней границы канала до внешней границы

| | | | | | | | | | |
|---------|------|------|-------|-------|-----|-------|-------|------|------|
| r [М] | 0,0 | 0,12 | 0,4 | 0,635 | 0,8 | 0,965 | 1,2 | 1,48 | 1,6 |
| z [М] | 0,14 | 0,1 | 0,029 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,029 | 0,1 | 0,14 |

Расчеты искомых полей в створах канала выполнялись для потока с расходом $Q_w = 0,54$ л/с, средней скоростью потока $\bar{U} = 0,355$ м/с, площадью створа $S = 0,152$ м², глубиной канала $H = 0,14$ м и средним радиусом закругления канала $\bar{R} = 5$ м, $z_0 = 0,001$ м, которые согласуются с экспериментальными значениями [Розовский, 1957].

Вычисления проводились на нерегулярной конечно-элементной сетке. Сеточная сходимость задачи проверялась последовательным сгущением расчетной сетки. Была выбрана репрезентативная расчетная сетка, содержащая 53 972 конечных элемента, со средним диаметром конечного элемента $h_r = h_z = \frac{\sqrt{\Omega_c}}{2} \approx 2,5$ мм.

При вычислении искомых полей на свободной поверхности потока задавались граничные условия (27), (28) для функций U и V . Вид данных функций U_η и V_η (кривые 1–3), аппроксимированных по экспериментальным данным [Розовский, 1957], приведен на рис. 3, 4 (кривые 1–3).

Пример полученных расчетных полей для створа 18 приведен на рис. 5. Изолинии скоростей U, V, W и функции Φ тока показывают, что в плоскости створа возникает только один вихревой поток.

Приведенные на рис. 6 результаты сравнения придонной радиальной скорости потока, полученной на расстоянии $0,05H$ от дна, с экспериментальными данными Розовского в створах 15, 18 и 21 позволяют сделать вывод о принципиальной применимости предложенной модели при исследовании русловых процессов.

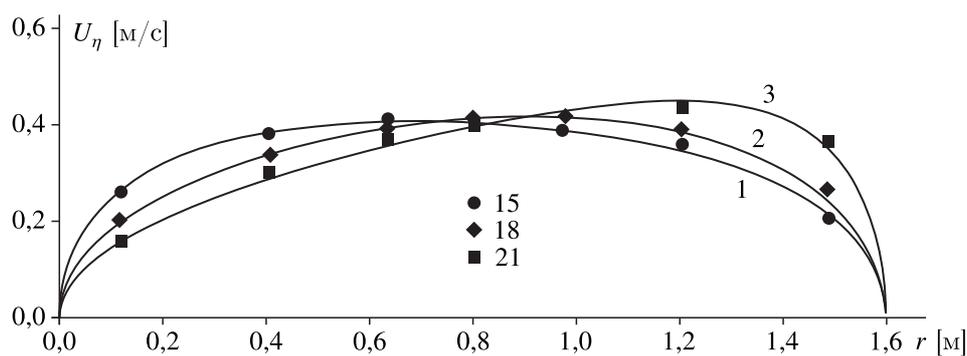


Рис. 3. Точечные экспериментальные данные полей скорости на поверхности потока в створах канала 15, 18 и 21 (работа [Розовский, 1957]) и их аппроксимация 1, 2, 3, использовавшаяся в качестве граничных условий U_η

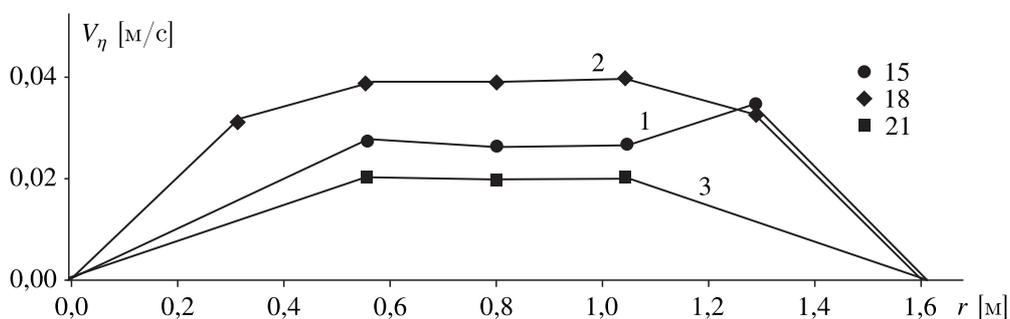


Рис. 4. Точечные экспериментальные данные полей радиальной поверхностной скорости в створах канала 15, 18 и 21 (работа [Розовский, 1957]) и их аппроксимация 1, 2, 3, использовавшиеся в качестве граничных условий V_η

К сожалению, количество экспериментальных точек, в которых проводились замеры окружной и радиальной скорости в створах 15, 18 и 21 соответственно, оказалось явно недостаточным для хорошей аппроксимации окружной и радиальной скоростей на свободной поверхности потока, используемых в граничных условиях задачи, и их грубая интерполяция искажает полученные численные результаты, не позволяя определить границы применимости предложенной математической модели.

Поля скоростей U , V и W функций тока Φ и вихря ω , полученные в створе 18. Поля визуализированы градиентной заливкой, масштаб полей определен их изолиниями. Поле вихря имеет ярко выраженный пограничный характер и масштабируется сеточными вставками с числовыми значениями поля в узлах сетки.

Особенно сильно это заметно в створе 15 канала (см. рис. 6, а), когда расчетные и экспериментальные скорости у вогнутого берега канала имеют качественные отличия. В створах 18 и 21 расчетные и экспериментальные радиальные скорости потока достаточно хорошо согласуются между собой, их отличия не превышают 17 %.

На рис. 7 приведено сравнение графика расчетных радиальных скоростей (кривая 9), полученных на оси симметрии канала в створе 18, с аналитическим решением Гришанина [Гришанин, 1979] (кривая 8). Оба решения сравниваются с экспериментальными данными [Маккаев, 1940; Розовский, 1957; Гришанин, 1979], полученными для развитого кругового потока (точечные множества 1–7). Сравнение показало согласованность полученного численного решения с экспериментальными данными.

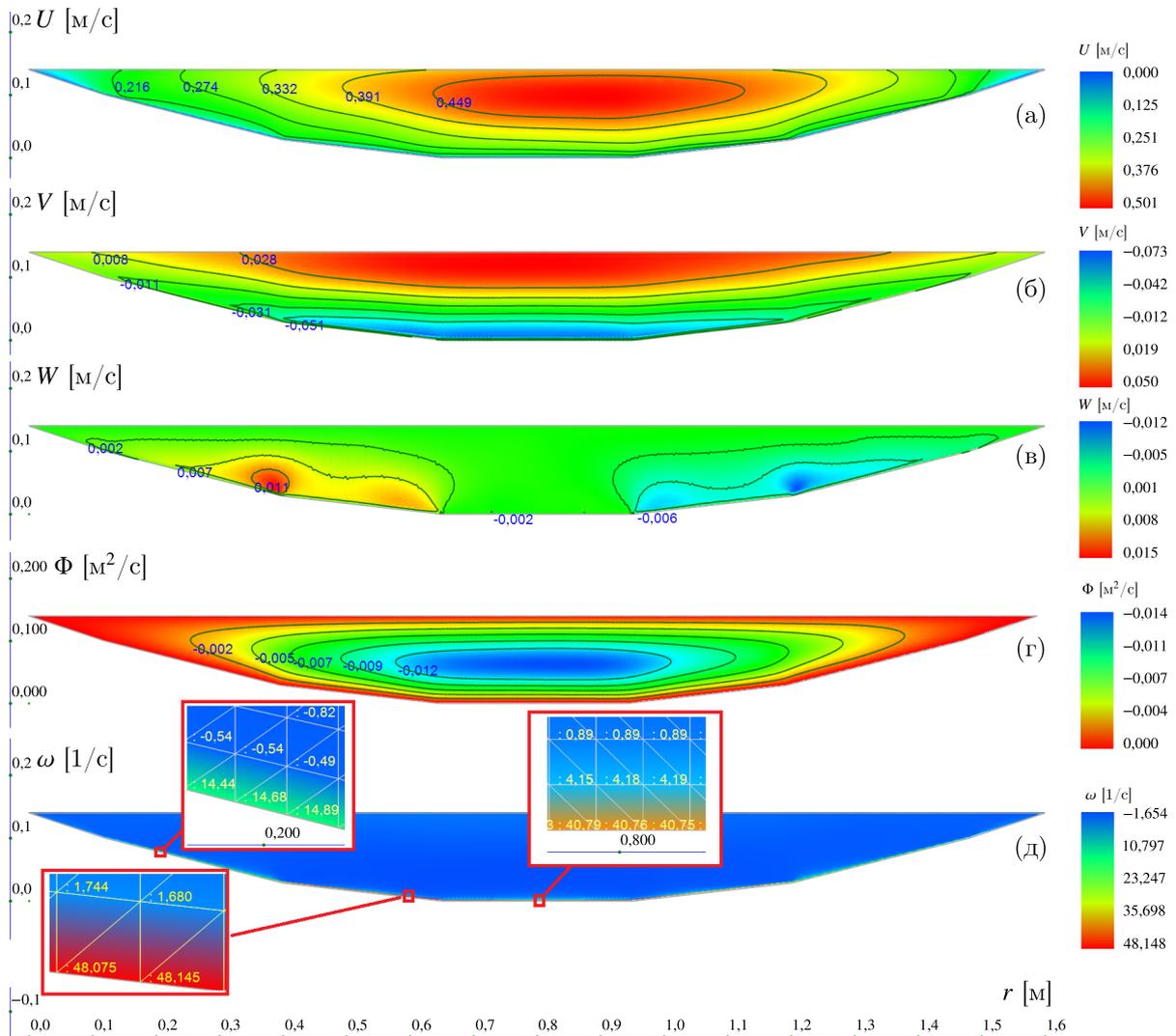


Рис. 5. Точечные экспериментальные данные полей радиальной поверхностной скорости в створах канала 15, 18 и 21 (работа [Розовский, 1957]) и их аппроксимация 1, 2, 3, использовавшиеся в качестве граничных условий V_n

Отметим, что отсутствует согласованность численного и асимптотического решения в придонном и приповерхностном слоях потока, поскольку полученное численное решение имеет два экстремума и является более наполненным в отличие от асимптотического решения, которое не имеет экстремумов. Наличие придонного максимума радиальной скорости физически обосновано условиями прилипания потока. Наличие максимума потока вблизи свободной поверхности может быть объяснено разными причинами, требующими дополнительных исследований. Например, поток в створе 18 не реализует состояние развитого кругового потока или использованная модель турбулентного замыкания приводит к полученному результату.

7. Заключение

Численные исследования подтверждают возможность редукции трехмерной модели движения речного потока к двумерной модели потока в плоскости створа канала. Расчеты показывают, что в качестве дополнительных условий для редукции задачи требуется задание граничных

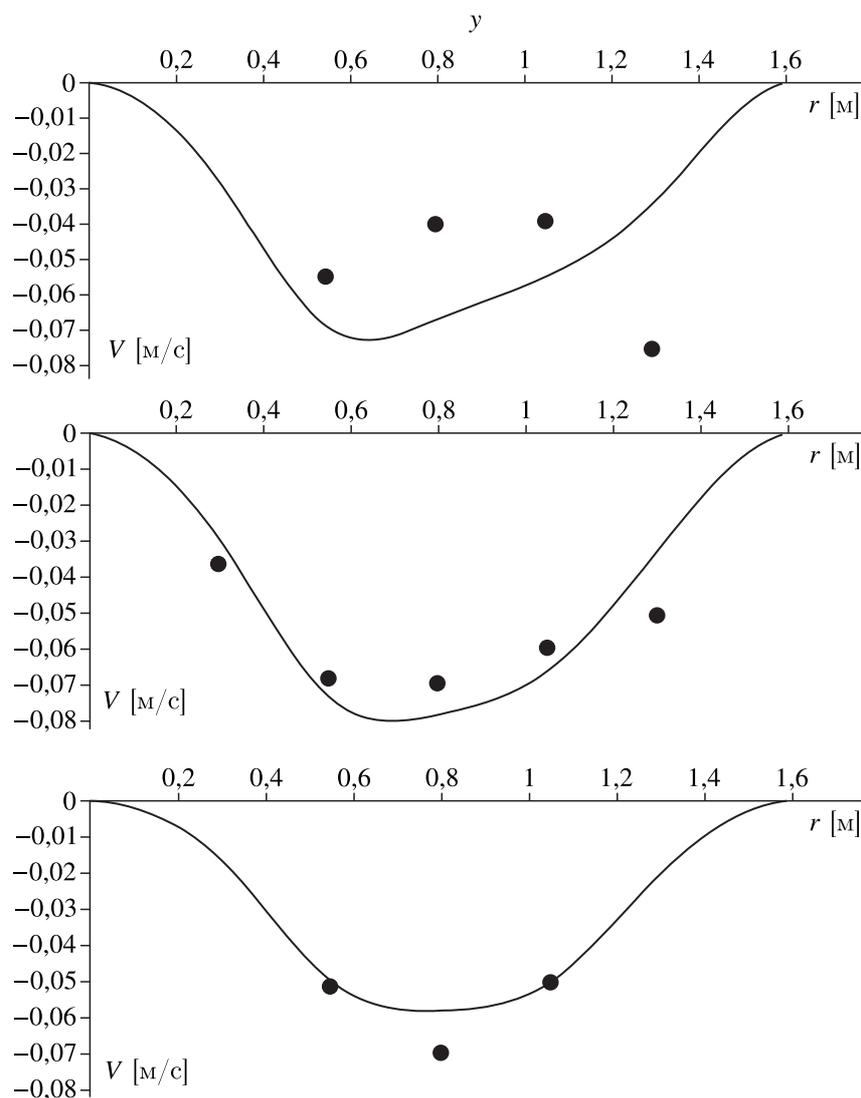


Рис. 6. Сравнение расчетных придонных радиальных скоростей потока (кривые), полученных на расстоянии $0,05H$ от дна канала, с экспериментальными данными Розовского [Розовский, 1957] в створах 15 (а), 18 (б) и 21 (в) соответственно

условий на свободной поверхности потока для поля скорости, определяемой в нормальном и касательном направлении к оси створа.

Сравнение вычисленных полей скорости с результатами экспериментальных измерений Розовского [Розовский, 1957] показывает хорошую согласованность расчетных и экспериментальных полей для скорости U , погрешность по которым не превышала 12% для всех створов. Различия по расходу в различных створах канала не превышают 1% по отношению к экспериментальному значению. Различия по полю радиальной скорости V по сечению канала не превышают 17% в створах 18 и 21 канала.

Существенные различия между экспериментальными и расчетными значениями придонной радиальной скорости V в створе 15 канала, вероятно, связаны с существованием в данном створе прибрежных зон вторичных потоков. Данные потоки предложенная модель не может воспроизвести из-за отсутствия необходимой точности при определении функций U_η , V_η .

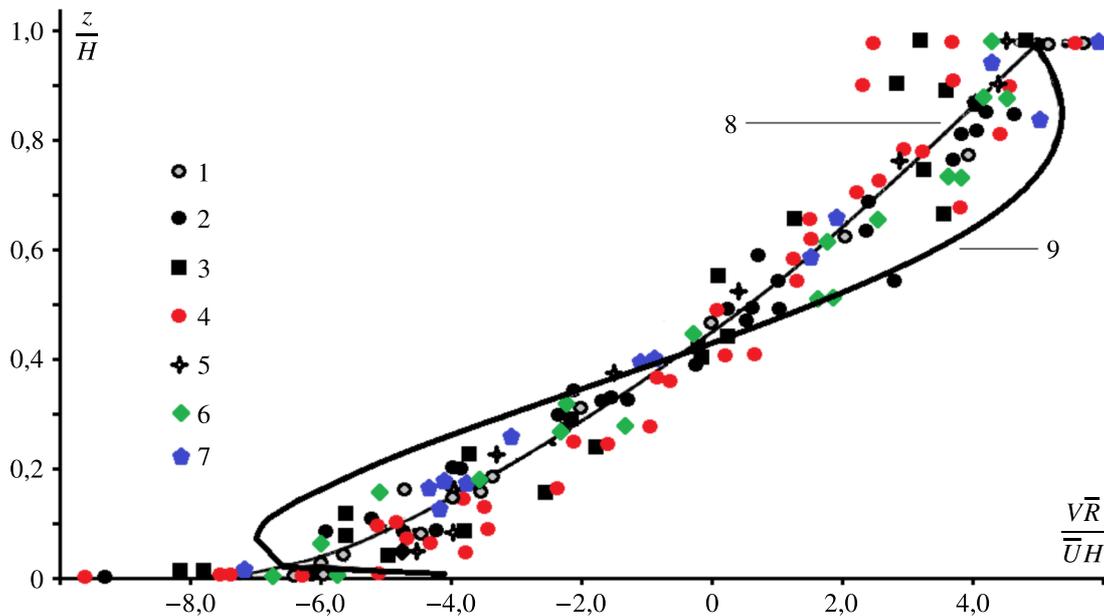


Рис. 7. Распределение радиальных скоростей по вертикали в открытых каналах: 1–4 — опыты в лотке прямоугольного сечения, 5 — то же с дном повышенной шероховатости [Маккавеев, 1940; Гришанин, 1979], 6, 7 — опыты в лотках трапецидального сечения [Розовский, 1957], 8 — кривая по асимптотической формуле [Гришанин, 1979], 9 — расчетная кривая на оси симметрии створа 18

Выполненное сравнение профиля радиальной скорости на оси симметрии канала в створе 18 с асимптотическим решением Гришанина [Гришанин, 1979] и экспериментальными данными Розовского [Розовский, 1957; Гришанин, 1979] показывает, что расчетный профиль согласуется с экспериментальными данными. Однако обнаружено существование двух экстремумов для радиальной скорости в приповерхностной и придонной части потока.

Различия численного и асимптотического решения в придонной области объясняются тем, что при получении асимптотического решения Гришанина на дне канала использовались не граничные условия прилипания, а граничные условия скольжения. Наличие экстремума для радиальной скорости в приповерхностной части потока требует дополнительных исследований на более подробных наборах экспериментальных данных.

Список литературы (References)

- Булгаков В. К., Потанов И. И. Сравнительный анализ противопоточных конечно-элементных схем высокого порядка для задачи Навье–Стокса на основе модифицированного SUPG-метода // Дальневосточный математический журнал. — 2003. — Т. 4, № 1. — С. 5–17.
 Bulgakov V. K., Potanov I. I. Sravnitel'nyi analiz protivopotochnih konechno-elementnih skhem visokovo poriyadka dlya zadachi Navie–Stoksa na osnove modivitsirovannogo SUPG-metoda [Comparative analysis of high-order upwind finite element schemes for the Navier–Stokes problem based on the modified SUPG method] // Dalnevostochniy matematicheskiy zhurnal. — 2003. — Vol. 4, No. 1. — P. 5–17 (in Russian).
- Гришанин К. В. Динамика русловых потоков. — Л.: Гидрометеоздат, 1979. — 312 с.
 Grishanin K. V. Dynamika ruslovihi potokov [Dynamics of channel flows]. — Leningrad: Hydrometeoizdat, 1979. — 312 p. (in Russian).
- Доманевский Н. А., Лосиевский А. И., Маккавеев Н. И., Матлин Г. М., Ржаницын Н. А. Русловые процессы и путевые работы на свободных реках // Труды ЦНИИЭВТ. — 1956. — Вып. 8. — 458 с.
 Domanevsky N. A. et al. Ruslovihi processi i putevie raboti na svobodnih rekah [Channel processes and track works on free rivers] // Trudi CNIEVET. — 1956. — Vol. 8. — 458 p. (in Russian).

- Караушев А. В.* Проблемы динамики естественных водных потоков. — Л.: Гидрометеиздат, 1960. — 392 с.
Karushev A. V. Problemi dinamiki estestvennih vodnih potokov [Problems of natural water dynamics]. — Leningrad: Hydrometeoizdat, 1960. — 392 p. (in Russian).
- Маккавеев В. М.* Режим естественных водных потоков // Гидравлика. — Л.–М., 1940. — С. 565–636.
Makkaveev V. M. Rejim estestvennih vodnih potokov [Regime of natural water flows] // Hydraulika. — Leningrad, Moscow, 1940. — P. 565–636 (in Russian).
- Потапов М. В.* Регулирование водных потоков методом искусственной поперечной циркуляции. — М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1947. — 76 с.
Potapov M. V. Regulirovanie vodnih potokov metodom iskustvennoy poperechnoi cirkulatsiyi [Regulation of water flows using the method of artificial transverse circulation]. — Moscow: Izd-vo Akad. nauk USSR, 1947. — 76 p. (in Russian).
- Розовский И. Л.* Движение воды на повороте русла. — К.: Наука, 1957. — 187 с.
Rozovskiy I. L. Dvijenie vodi na povorote rusla [Movement of water at a bend in the riverbed]. — Kiev: Nauka, 1957. — 187 p. (in Russian).
- Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
Rouch P. Vichislitel'naya hydrodinamika [Computational fluid dynamics]. — Moscow: Mir, 1980. — 616 p. (in Russian).
- Шабров Н. Н.* Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. — Л.: Машиностроение, 1983. — 212 с.
Shabrov N. N. Metod konechnih elementov v raschyotov detalei teplovi dvigateley [Finite element method in calculations of heat engine parts]. — Leningrad: Mashinostroeniye, 1983. — 212 p. (in Russian).
- Almeida J. R., Ota J.* Comparative study between turbulence models in curved channels // RBRH. — 2020. — Vol. 25.
- Figuérez J. A., Galán A., González J.* An enhanced treatment of boundary conditions for 2D RANS streamwise velocity models in open channel flow // Water. — 2021. — Vol. 13. — P. 1001.
- Gholami A., Akhtari A. A., Minatour Y., Bonakdari H., Javadi A. A.* Experimental and numerical study on velocity fields and water surface profile in a strongly-curved 90° Open Channel Bend // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. — 2014. — Vol. 8. — P. 447–461.
- Huang S. L., Jia Y. F., Chan H. C., Wang S. S. Y.* Three dimensional numerical modeling of secondary flows in a wide curved channel // Journal of Hydrodynamics. — 2009. — Vol. 21, No. 6. — P. 758–766.
- Javid S., Mohammadi M.* Boundary shear stress in a trapezoidal channel // IJE Transactions A: Basics. — 2012. — Vol. 25, No. 4. — P. 323–331.
- Kean J. W., Kuhnle R. A., Dungan Smith J., Alonso C. V., Langendoen E. J.* Test of a method to calculate near-bank velocity and boundary shear stress // Journal of Hydraulic Engineering. — 2009. — Vol. 135, No. 7.
- Van Rijn L. C.* Sediment transport, Part II: Suspended load transport // Journal of Hydraulic Engineering. — 1984. — Vol. 110, No. 11. — P. 1613–1641.
- Stoesser T., Ruether N., Olsen N. R. B.* Calculation of primary and secondary flow and boundary shear stresses in a meandering channel // Advances in Water Resources. — 2010. — Vol. 33. — P. 158–170.
- Struiksma N., Olesen K., Flokstra C., de Vriend H.* Bed deformation in curved alluvial channels // Journal of Hydraulic Research. — 1985. — Vol. 23, No. 1. — P. 57–79.
- Yang S.-Q., Lim S.-Y.* Boundary shear stress distributions in trapezoidal channels // Journal of Hydraulic Research. — 2005. — Vol. 43, No. 1. — P. 98–102.