

УДК: 519.257

Анализ прогностических свойств тремора земной поверхности с помощью разложения Хуанга

А. А. Любушин^а, Е. А. Родионов^б

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН,
Россия, 123242, г. Москва, Б. Грузинская ул., д. 10, стр. 1

E-mail: ^а lyubushin@yandex.ru, ^б evgeny_980@list.ru

Получено 23.05.2024, после доработки — 14.06.2024.

Принято к публикации 18.06.2024.

Предлагается метод анализа тремора земной поверхности, измеряемого средствами космической геодезии с целью выделения прогностических эффектов активизации сейсмичности. Метод иллюстрируется на примере совместного анализа совокупности синхронных временных рядов ежесуточных вертикальных смещений земной поверхности на Японских островах для интервала времени 2009–2023 гг. Анализ основан на разбиении исходных данных (1047 временных рядов) на блоки (кластеры станций) и последовательном применении метода главных компонент. Разбиение сети станций на кластеры производится методом *k*-средних из критерия максимума псевдо-*F*-статистики. Для Японии оптимальное число кластеров было выбрано равным 15. К временным рядам главных компонент от блоков станций применяется метод разложения Хуанга на последовательность независимых эмпирических мод колебаний (Empirical Mode Decomposition, EMD). Для обеспечения устойчивости оценок волновых форм EMD-разложения производилось усреднение 1000 независимых аддитивных реализаций белого шума ограниченной амплитуды. С помощью разложения Холецкого ковариационной матрицы волновых форм первых трех EMD-компонент в скользящем временном окне определены индикаторы аномального поведения тремора. Путем вычисления корреляционной функции между средними индикаторами аномального поведения и выделенной сейсмической энергии в окрестности Японских островов установлено, что всплески меры аномального поведения тремора предшествуют выбросам сейсмической энергии. Целью статьи является прояснение распространенных гипотез о том, что движения земной коры, регистрируемые средствами космической геодезии, могут содержать прогностическую информацию. То, что смещения, регистрируемые геодезическими методами, реагируют на последствия землетрясений, широко известно и многократно демонстрировалось. Но выделение геодезических эффектов, предвещающих сейсмические события, является значительно более сложной задачей. В нашей статье мы предлагаем один из методов обнаружения прогностических эффектов в данных космической геодезии.

Ключевые слова: тремор земной поверхности, кластерный анализ, метод главных компонент, разложение Хуанга, мера аномального поведения временных рядов, корреляционная функция

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания № FMWU-2022-0018.

UDC: 519.257

Analysis of predictive properties of ground tremor using Huang decomposition

A. A. Lyubushin^a, E. A. Rodionov^b

Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences,
10/1 Bolshaya Gruzinskaya st., Moscow, 123242, Russia

E-mail: ^a lyubushin@yandex.ru, ^b evgeny_980@list.ru

*Received 23.05.2024, after completion – 14.06.2024.
Accepted for publication 18.06.2024.*

A method is proposed for analyzing the tremor of the earth's surface, measured by means of space geodesy, in order to highlight the prognostic effects of seismicity activation. The method is illustrated by the example of a joint analysis of a set of synchronous time series of daily vertical displacements of the earth's surface on the Japanese Islands for the time interval 2009–2023. The analysis is based on dividing the source data (1047 time series) into blocks (clusters of stations) and sequentially applying the principal component method. The station network is divided into clusters using the K-means method from the maximum pseudo-F-statistics criterion, and for Japan the optimal number of clusters was chosen to be 15. The Huang decomposition method into a sequence of independent empirical oscillation modes (EMD – Empirical Mode Decomposition) is applied to the time series of principal components from station blocks. To provide the stability of estimates of the waveforms of the EMD decomposition, averaging of 1000 independent additive realizations of white noise of limited amplitude was performed. Using the Cholesky decomposition of the covariance matrix of the waveforms of the first three EMD components in a sliding time window, indicators of abnormal tremor behavior were determined. By calculating the correlation function between the average indicators of anomalous behavior and the released seismic energy in the vicinity of the Japanese Islands, it was established that bursts in the measure of anomalous tremor behavior precede emissions of seismic energy. The purpose of the article is to clarify common hypotheses that movements of the earth's crust recorded by space geodesy may contain predictive information. That displacements recorded by geodetic methods respond to the effects of earthquakes is widely known and has been demonstrated many times. But isolating geodetic effects that predict seismic events is much more challenging. In our paper, we propose one method for detecting predictive effects in space geodesy data.

Keywords: tremor of the earth's surface, cluster analysis, principal component method, Huang decomposition, measure of anomalous behavior of time series, correlation function

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 4, pp. 939–958 (Russian).

The work was supported by Ministry of Education and Science of Russia, within the framework of state assignments No. FMWU-2022-0018.

1. Введение

Одной из задач анализа данных о движениях земной коры, получаемых с помощью средств космической геодезии, является выяснение вопроса о том, содержат ли они информацию, предвещающую сейсмические события. В начале 1990-х годов, когда данные GPS только появились и начали распространяться, было высказано много надежд на то, что они будут важным инструментом получения прогностической информации. Однако оказалось, что средства космической геодезии прекрасно выделяют постсейсмические эффекты, такие как смещения тектонических плит в результате сильных землетрясений. Что же касается предвестниковых эффектов, то для их выделения традиционные методы анализа временных рядов GPS оказались не очень приспособленными. Одной из причин для этого является то, что эти методы ориентированы на выделение так называемых трендов, то есть систематических низкочастотных компонент, которые легко поддаются интерпретации как проявления медленных тектонических движений. Высокочастотная составляющая этих временных рядов, которую можно назвать тремором земной поверхности, чаще всего интерпретируется как проявление шумов, возникающих из-за атмосферных и ионосферных флуктуаций. Наша точка зрения заключается в том, что, несмотря на наличие этих технологических шумов, именно в высокочастотной компоненте GPS-данных находится скрытая прогностическая информация. Игнорирование статистических свойств тремора, по нашему мнению, приводит к отсутствию прогресса в выделении прогностических эффектов в данных GPS.

Ранее в работах [Filatov, Lyubushin, 2017; Filatov, Lyubushin, 2019] анализ спектров когерентности временных рядов GPS использовался для выделения областей с повышенной сейсмической опасностью в Японии и Калифорнии. Когерентность дрожания земной поверхности анализировалась в работах [Lyubushin, 2018; Lyubushin, 2019]. В данной статье представлено дальнейшее развитие методов анализа тремора земной поверхности, предложенных в [Lyubushin, 2022; Lyubushin, 2023; Lyubushin, 2024]. Отличие данной статьи от предыдущих работ заключается в применении разложения Хуанга, которое хорошо приспособлено для учета эффектов нестационарности и нелинейности во временных рядах [Huang et al., 1998; Huang, Wu, 2008]. Этот метод успешно применяется для анализа геодезических временных рядов [Pan et al., 2015; Li, Guo, 2024], при обработке гидрологических [Huang et al., 2009], финансовых [Huang et al., 2003] и биологических [Li et al., 2011; Wei et al., 2018] данных.

Следует отметить, что тонкая структура временных рядов смещений земной поверхности, измеряемых с помощью GPS, является предметом исследований большого числа специалистов. Подход максимального правдоподобия для оценки параметров моделей временных рядов GPS использовался в [Roncagliolo et al., 2007; Wang, Li, Lu, 2017]. В работах [Bos et al., 2008; Wang et al., 2012] метод максимального правдоподобия использовался для оценки параметров формы спектров мощности и амплитуды шума в различных регионах мира. Структура шума и оценки ошибок рассмотрены в [Agnew, 1992; Amiri-Simkooei, Tiberius, Teunissen, 2007]. В работах [Caporali, 2003; Zhang et al., 1997] анализировались ошибки оценки скорости смещения в зависимости от формы спектра и интенсивности шумовой составляющей временного ряда. Параметрические модели временных рядов GPS для анализа тектонически активных территорий, включая анализ фазовых корреляций, использовались в [Li et al., 2000; Kermarrec, Schon, 2018].

Структура высокочастотного шума и низкочастотной сезонной составляющей временных рядов GPS в связи с задачей оценки скоростей смещения тектонических плит изучалась в работах [Blewitt, Lavallee, 2002; Bos, Bastos, Fernandes, 2010]. Сезонные эффекты в рядах сигналов GPS, связанные с гидрологической нагрузкой и тектоническими движениями земной коры, изучались в работах [Liu et al., 2020; Tesmer et al., 2011; Yan et al., 2019; Pan et al., 2015; Liu,

Dai, Liu, 2017; Fu et al., 2013; Chanard et al., 2014] с использованием различных методов, в том числе многомерного статистического подхода. Гипотезы о возникновении аномальных гармоник во временных рядах GPS рассмотрены в [Ray et al., 2008]. Методы многомерной статистики (главные компоненты, эмпирические ортогональные функции и оценка сингулярного спектра) в [Teferle et al., 2008; Chen et al., 2013] использовались для выявления общих пространственных и временных компонентов временных рядов GPS.

2. Данные

Данные о смещениях земной поверхности, измеренные с помощью GPS, взяты с сайта Геодезической лаборатории Невады [Blewitt, Hammond, Kreemer, 2018] по адресу (http://geodesy.unr.edu/gps_timeseries/tenv3/IGS14/).

Положения 1047 станций GPS для прямоугольной области $30^\circ \leq \text{Lat} \leq 46^\circ$, $128^\circ \leq \text{Lon} \leq 146^\circ$, которые имеют суточные временные ряды с начала 2009 года до конца 2023 года (15 лет), для которых общее количество пропусков менее 365 отсчетов и самый длинный разрыв менее 182 отсчетов, представлены на рис. 1, а. Исследуются вертикальные компоненты смещения земной поверхности. Пробелы во временном ряду GPS заполняются с использованием информации из левых и правых окрестностей разрыва той же длины, что и длина разрыва [Lyubushin, 2018].

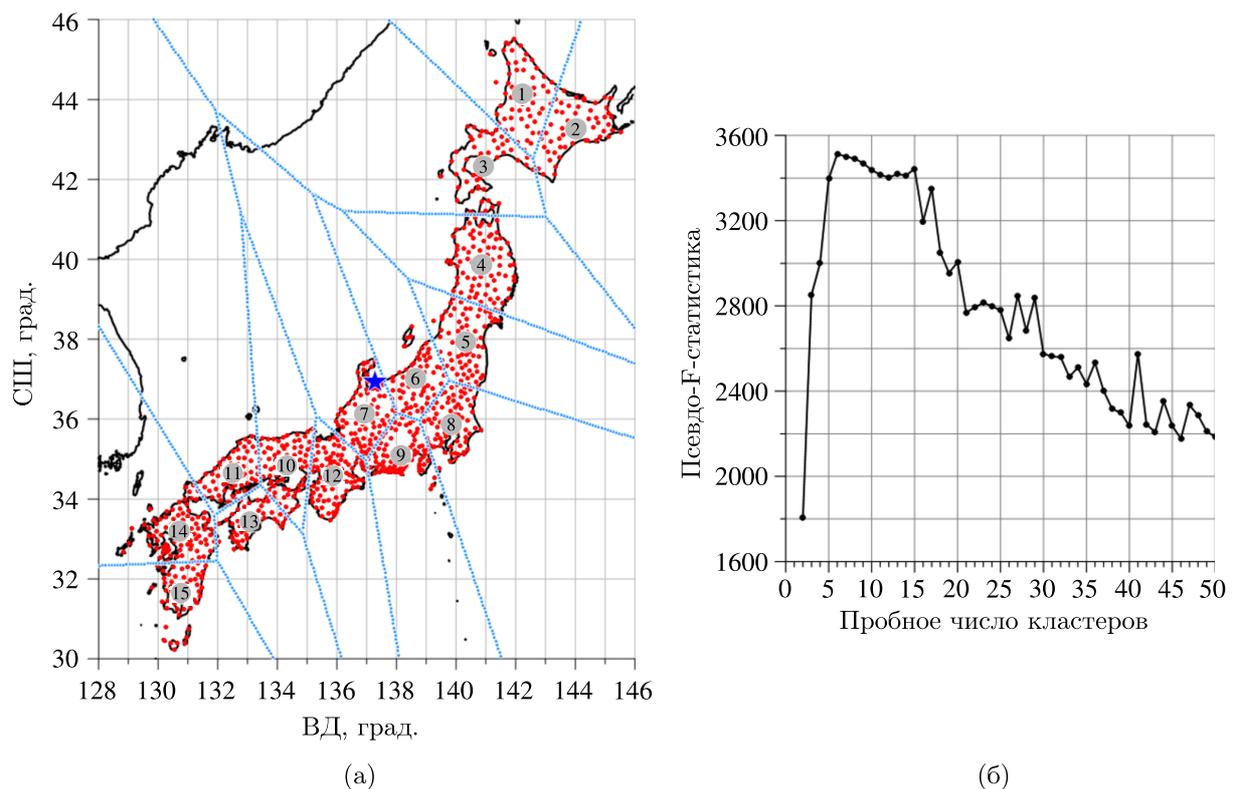


Рис. 1. а) Положения 1047 GPS-станций и их разделение на 15 кластеров. Пронумерованные кружки обозначают центры тяжести кластеров, синие линии — границы между ячейками Вороного. Синей звездой показано положение центра масс все центров кластеров. б) график псевдо-F-статистики, которая позволила выбрать 15 в качестве числа кластеров

Набор станций предварительно был разбит на кластеры. Для разделения сети станций на кластеры было выбрано 15 опорных точек (рис. 1). В качестве оптимального количества кластеров станций было выбрано число 15, которое разбивает их облако методом k-средних. Разобьем

набор векторов $\vec{\zeta}$ положения станций на заданное пробное количество q кластеров, используя популярный метод кластеризации k -средних [Duda, Hart, Stork, 2000]. Обозначим через C_r , $r = 1, \dots, q$, кластеры, пусть $\vec{z}_r = \sum_{\vec{\zeta} \in C_r} \frac{\vec{\zeta}}{n_r}$ — вектор центра масс кластера C_r , n_r — число векторов в кластере, $\sum_{r=1}^q n_r = N$. Вектор $\vec{\zeta} \in C_r$, если расстояние $|\vec{\zeta} - \vec{z}_r|$ минимально среди положений всех центров кластера. Метод k -средних минимизирует сумму квадратов расстояний:

$$G(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_q) = \sum_{r=1}^q \sum_{\vec{\zeta} \in C_r} |\vec{\zeta} - \vec{z}_r|^2 \rightarrow \min_{\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_q}$$

относительно положения центров кластеров \vec{z}_r . Пусть $\Phi(q) = \min_{\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_q} G(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_q)$. Мы использовали пробное количество кластеров в диапазоне $2 \leq q \leq 50$. Проблема выбора наилучшего числа q^* кластеров решалась с использованием критерия максимума псевдо-F-статистики [Vogel, Wong, 1979]:

$$PFS(q) = \frac{\sigma_1^2(q)}{\sigma_0^2(q)} \rightarrow \max_{2 \leq q \leq 50},$$

где

$$\sigma_0^2(q) = \frac{\Phi(q)}{N-q}, \quad \sigma_1^2(q) = \sum_{r=1}^q \frac{n_r}{N} \cdot |\vec{z}_r - \vec{z}_0|^2, \quad \vec{z}_0 = \frac{1}{N} \sum_1^N \vec{\zeta}.$$

График на рис. 1, б представляет значения псевдо-F-статистики в зависимости от пробного количества кластеров. Число 15 на графике псевдо-F-статистики является точкой излома зависимости от пробного числа кластеров и реализует один из наибольших локальных максимумов для числа кластеров от 2 до 50. На графике псевдо-F-статистики представляют собой два локальных максимума с близкими значениями числа кластеров 6 и 15. Из этих двух значений число 15 было выбрано как наибольшее с целью обеспечить наиболее детальное разбиение множества станций. На рис. 1, а показано разделение набора станций на 15 кластеров вместе с ячейками Вороного, которые указывают на принадлежность станций к тому или иному кластеру.

Кластеры станций упорядочены по возрастанию широты положения их центров тяжести. В таблице 1 для каждого кластера (первая строка) указано число станций в кластере (вторая строка).

Таблица 1. Количество станций N_{sta} в каждом кластере Clust#

Clust#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N_{sta}	57	56	54	83	69	61	78	77	91	76	57	95	48	88	57

3. Главные компоненты приращений в скользящем временном окне

Поскольку целью является исследование дрожания земной поверхности, то есть высокочастотной части смещений земной поверхности, анализ проводился для приращений временных рядов. Переход к приращениям снижает доминирующее влияние низких частот в суточном временном ряду GPS и обеспечивает стационарность фрагментов временного ряда в пределах 365-дневных временных окон, которые используются в дальнейшем.

Разбиение множества станций на 15 кластеров используется для последующего применения метода главных компонент [Айвазян и др., 1989; Jolliffe, 2002]. Для каждого кластера

станций рассчитывалась первая главная компонента временного ряда приращений вертикальных смещений земной поверхности в скользящем временном окне адаптации длиной 365 дней.

Пусть имеется p -мерное облако однотипных N -мерных сигналов $\{y_j(k)\}$, $k = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, p$. Выберем размер скользящего окна w и отцентрируем сигналы,

$$x_j(k) = y_j(k) - \overline{y_j(k)}, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = w, \dots, N, \quad (1)$$

где

$$\overline{y_j(k)} = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^w y_j(k-w+i), \quad k = w, \dots, N. \quad (2)$$

Следующим шагом является вычисление выборочной оценки ковариационной $p \times p$ -мерной матрицы в скользящем окне:

$$r_{XX}^{(m,n)} = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^w x_m(i-w+k)x_n(i-w+k), \quad k, j = 1, \dots, p, \quad k = w, \dots, N. \quad (3)$$

Пусть $\phi^{(s)} = (\phi_1^{(s)}, \dots, \phi_p^{(s)})^T$ — собственный вектор этой матрицы, отвечающий максимальному собственному значению. Положим

$$\xi_s(k) = \sum_{j=1}^p (\phi_j^{(k)})^2 x_j(k), \quad k = w, \dots, N. \quad (4)$$

С понятными изменениями формулы (1)–(4) обобщаются на случай $k = 1, \dots, w-1$.

Определим взвешенное среднее в скользящем временном окне длиной w по формуле

$$\xi(k) = \begin{cases} \xi_{w-1}(k), & k < w, \\ \xi_k(k), & k \geq w. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, формулы (1)–(5) определяют значения взвешенных средних приращений вертикальных временных рядов смещений земной поверхности. В качестве весов берутся квадраты значений собственного вектора ковариационной матрицы в скользящем временном окне, соответствующего наибольшему собственному числу. Сумма этих весов равна единице.

В рамках каждого из 15 кластеров было осуществлен переход к взвешенному среднему методом, описанным выше, длина скользящего временного окна принималась равной 365 отсчетам, т. е. 1 году. При этом, в целях устранения влияния больших выбросов, до вычисления взвешенного среднего была произведена так называемая процедура винзоризации [Huber, 1981], которая заключается в устранении выбросов, выпадающих за уровень $\mu \pm 4\sigma$, путем срезки значений временного ряда в скользящем временном окне (μ и σ — выборочные оценки математического ожидания и стандартного отклонения для текущего временного окна). Процедура повторяется итеративно до тех пор, пока значения μ и σ не перестанут меняться.

На рис. 2 представлены графики первых главных компонент приращений (в виде взвешенных средних) вертикальных смещений земной поверхности в каждом из выделенных 15 кластеров.

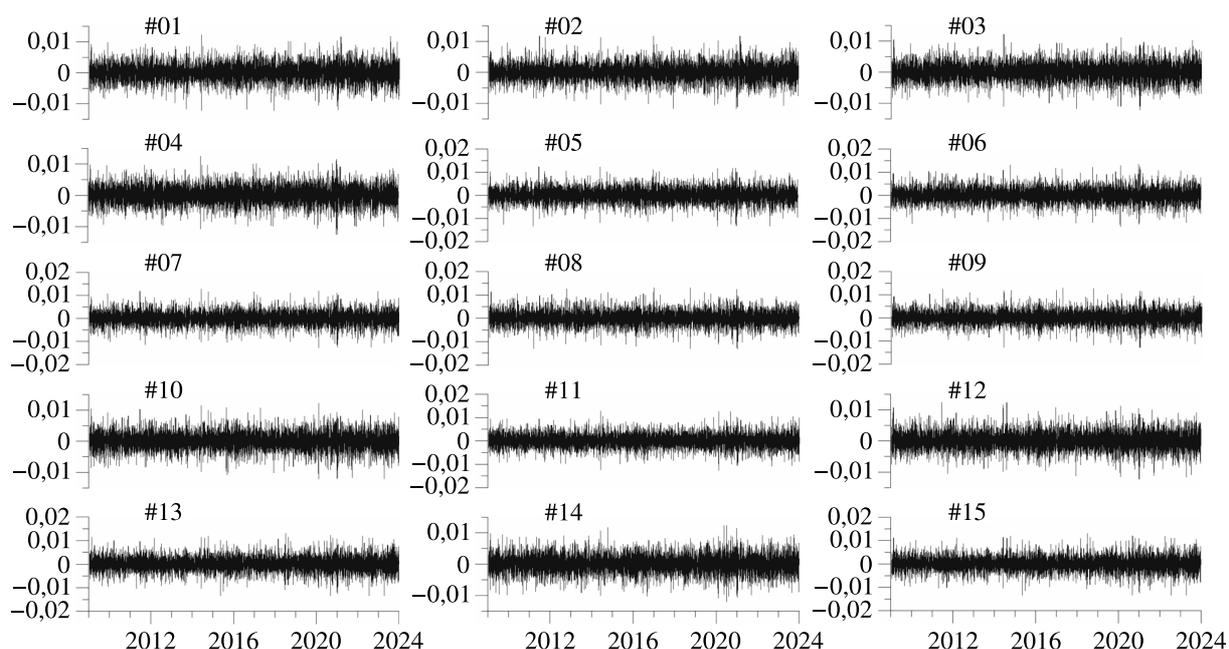


Рис. 2. Графики взвешенных средних вертикальных смещений земной поверхности в каждом из выделенных 15 кластеров в скользящем временном окне длиной 365 суток. По осям Y отложены приращения смещений в мм

4. Эмпирическая модовая декомпозиция

Пусть $x(k)$ — анализируемый дискретный сигнал. Эмпирическая модовая декомпозиция (EMD) [Huang et al., 1998; Huang, Wu, 2008; Ястребов, 2016; Давыдов, Давыдов, 2010; Миронов и др., 2017; Мурзагулов, Замятин, Романович, 2021; Павлов, Филатова, 2011] представляет собой разложение сигнала на эмпирические моды колебаний:

$$x(k) = \sum_{j=1}^n h_j(k) + r_n(k), \quad (6)$$

где $h_j(k)$ — j -я эмпирическая мода, $r_n(k)$ — остаток, n — количество эмпирических мод.

Алгоритм разложения на последовательность эмпирических мод является итерационным для каждого уровня j . Обозначим через m , $m = 0, 1, \dots, M_j$, индекс итераций, где M_j — максимальное число итераций для уровня j . Итерации описываются формулой

$$h_j^{(m+1)}(k) = h_j^{(m)}(k) - z_j^{(m)}(k). \quad (7)$$

Здесь $z_j^{(m)}(k) = \frac{p_j^{(m)}(k) + q_j^{(m)}(k)}{2}$, где $p_j^{(m)}(k)$ и $q_j^{(m)}(k)$ — верхняя и нижняя огибающие для сигнала $h_j^{(m)}(k)$, которые строятся с помощью сплайновой интерполяции (обычно сплайном 3-го порядка) по всем локальным максимумам и минимумам сигнала $h_j^{(m)}(k)$.

Итерации (7) инициализируются нулевым шагом для первого уровня ($j = 1$) разложения $h_1^{(0)}(k) = x(k)$. Далее находятся верхняя и нижняя огибающие $p_1^{(0)}(k)$ и $q_1^{(0)}(k)$, вычисляется средняя линия $z_1^{(0)}(k)$ и находится $h_1^{(1)}(k)$ по формуле (7). Для $h_1^{(1)}(k)$ определяются верхняя и нижняя огибающие $p_1^{(1)}(k)$ и $q_1^{(1)}(k)$ и средняя линия $z_1^{(1)}(k)$, находится $h_1^{(2)}(k)$ и так далее, до последнего индекса итераций M_1 , после которой считается, что первая эмпирическая мода $h_1(k)$ найдена.

Условие остановки итераций обычно выбирается в форме выполнения неравенства:

$$\frac{\sum_k (h_j^{(m+1)}(k) - h_j^{(m)}(k))^2}{\sum_k (h_j^{(m)}(k))^2} \leq \delta,$$

где δ — какое-нибудь малое число, например 0,01. После того как найдена мода $h_j(k)$, запускается итерационный процесс определения эмпирической моды $h_{j+1}(k)$ следующего уровня. Этот процесс инициализируется формулой для начального индекса итераций $m = 0$:

$$h_{j+1}^{(0)}(k) = x(k) - h_j(k). \quad (8)$$

Согласно формуле (8) из исходного сигнала вычитается высокочастотная часть и новый более низкочастотный сигнал рассматривается как новый сигнал для последующего разложения. Построение эмпирических мод колебаний продолжается до тех пор, пока число локальных экстремумов не станет слишком маленьким для того, чтобы по ним можно было построить огибающие. По мере увеличения номера уровня эмпирической моды j сигналы $h_j(k)$ становятся все более низкочастотными и стремятся к неизменяемой форме. Последовательность $h_1(k), h_2(k), \dots, h_n(k)$ построена таким образом, что ее сумма дает приближение к исходному сигналу $x(k)$, который может быть представлен в виде (6) [Huang et al., 1998; Huang, Wu, 2008]. Эмпирические моды являются ортогональными друг другу, составляя, таким образом, некий эмпирический базис разложения исходного сигнала.

При практической реализации метода возникают технические сложности из-за краевых эффектов, так как продолжение огибающих за пределы первых и последних точек локальных экстремумов является неоднозначным. Для преодоления этой трудности существуют несколько подходов, в частности зеркальное продолжение анализируемой выборки назад и вперед на достаточно длинный промежуток времени. Именно он использовался в данной работе.

5. Ансамблевая эмпирическая модовая декомпозиция

Одним из ключевых недостатков метода EMD является проблема смешивания мод, которая возникает, когда одна эмпирическая мода включает сигналы различных масштабов или же когда сигналы одного масштаба распределены по разным эмпирическим модам. Например, если в сигнале наблюдается перемежаемость, то есть на фоне плавного сигнала возникают кратковременные участки более высокочастотного поведения, то при EMD-разложении происходит смешивание мод поведения с разными частотами, так как сравнительно редкие точки локальных экстремумов плавного поведения перемежаются значительно более частыми точками локальных экстремумов высокочастотной компоненты.

Для борьбы с этим эффектом в работе [Huang, Wu, 2008] был предложен метод ансамблевой эмпирической модовой декомпозиции (EEMD). Он представляет собой регуляризацию метода EMD, в которой к исходным данным добавляется белый шум конечной амплитуды. Это позволяет определить истинные эмпирические моды как среднее значение по ансамблю испытаний, каждое из которых представляет собой сумму сигнала и белого шума.

Алгоритм EEMD включает следующие шаги:

- 1) добавление реализации белого шума к исходным данным,
- 2) разложение данных с добавлением белого шума в эмпирические моды,
- 3) повторение шагов 1 и 2 достаточно большое количество раз с разными реализациями белого шума,
- 4) получение среднего значения по ансамблю для соответствующих эмпирических мод.

Таким образом, имитируются многочисленные «искусственные» наблюдения:

$$x^{(i)}(k) = x(k) + \varepsilon_i(k),$$

где $\varepsilon_i(k)$ — i -я реализация белого шума.

Истинная компонента, согласно определению EEMD, для последовательности всех уровней эмпирических мод вычисляется как среднее значение разложений зашумленных мод. Важно отметить, что EEMD в значительной степени устраняет указанную проблему смешивания [Huang, Wu, 2008]. Добавление независимых белых шумов к выборке обладает регуляризирующим эффектом, поскольку упрощает построение огибающих (локальных экстремумов после добавления малого белого шума сразу становится много). Операция усреднения по достаточно большому числу независимых реализаций белого шума позволяет избавиться от влияния шумовой компоненты и выделить истинные внутренние моды колебаний.

Для каждого из полученных 15 временных рядов были вычислены EEMD-волновые формы. EEMD-волновые формы получены путем усреднения 1000 разложений исходных сигналов, к которым добавлены независимые гауссовские белые шумы со стандартным отклонением 0,1 от стандартного отклонения взвешенного среднего от каждого кластера.

На рис. 3 приведены графики EEMD-волновых форм для первых 6 уровней разложения для трех из 15 кластеров.

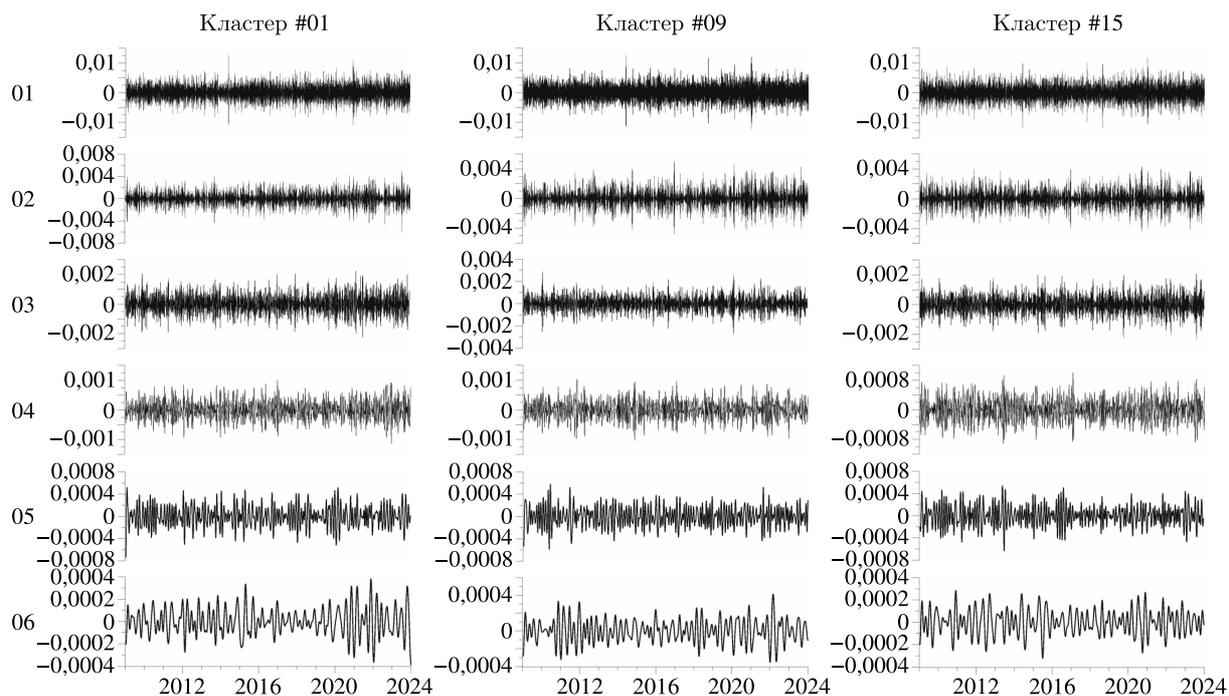


Рис. 3. Графики волновых форм EEMD для первых 6 уровней разложения для 3 кластеров (номера 1, 9 и 15). Номера уровней разложения указаны слева

Усредним волновые формы EEMD по всем 15 кластерам. В результате получим графики, изображенные на рис. 4.

6. Преобразование Гильберта

Изложенный выше метод разложения временных рядов в литературе известен как метод Гильберта – Хуанга. Хотя собственно преобразование Гильберта в данной статье не используется,

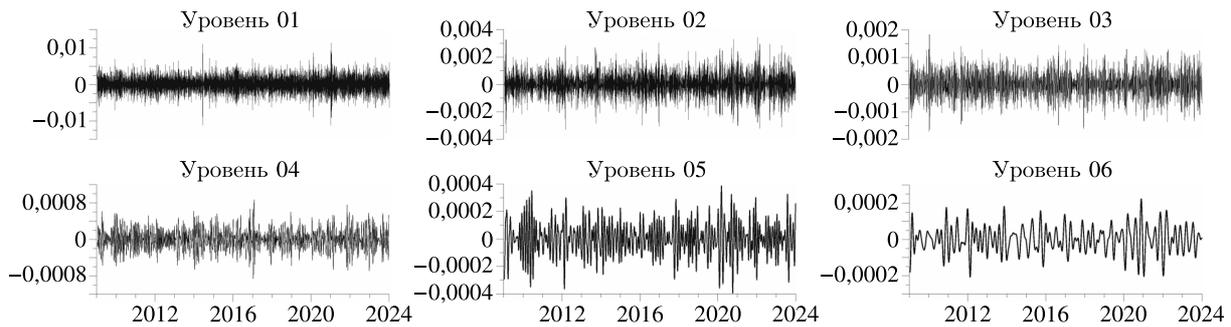


Рис. 4. Графики средних волновых форм EEMD для первых 6 уровней разложения

но для полноты изложения метода и во избежание недоумения у читателя мы приведем основные формулы и идеи применения преобразования Гильберта к полученным EEMD временным рядам разложения Хуанга исходных данных.

Преобразование Гильберта [Vendat, Piersol, 2010] $H_X(t)$ сигнала $X(t)$ определяется по формуле

$$H_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(u)}{\pi(t-u)} du = X(t) * \left(\frac{1}{\pi t}\right),$$

где $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot g(t-u) du$ — свертка двух функций. Если $\tilde{f}(\omega)$ и $\tilde{g}(\omega)$ — преобразования Фурье свертываемых функций, $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$, то, как известно, преобразование Фурье свертки равно произведению преобразований Фурье свертываемых функций. Преобразование Фурье от $\frac{1}{\pi t}$ равно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\pi t} dt = -i \cdot \text{sign}(\omega) = \begin{cases} -i, & \omega > 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ i, & \omega < 0. \end{cases}$$

Таким образом, если $\tilde{X}(\omega)$ есть преобразование Фурье от $X(t)$, то

$$\tilde{H}_X(\omega) = -i \cdot \text{sign}(\omega) \cdot \tilde{X}(\omega) = \begin{cases} -i \cdot \tilde{X}(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ i \cdot \tilde{X}(\omega), & \omega < 0. \end{cases}$$

Если представить $\tilde{X}(\omega) = |\tilde{X}(\omega)|e^{-i\varphi(\omega)}$, то

$$\tilde{H}_X(\omega) = \begin{cases} |\tilde{X}(\omega)|e^{-i(\varphi(\omega)+\pi/2)}, & \omega > 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ |\tilde{X}(\omega)|e^{-i(\varphi(\omega)-\pi/2)}, & \omega < 0. \end{cases}$$

Практически более удобно вычислять преобразование Гильберта, используя понятия *аналитического сигнала*:

$$Z_X(t) = X(t) + i \cdot H_X(t) = |Z_X(t)| \cdot e^{i\theta(t)} \equiv A_X(t) \cdot e^{i\theta(t)},$$

где $A_X(t) = \sqrt{X^2(t) + H_X^2(t)}$ — амплитуды огибающей сигнала $X(t)$, а $\vartheta(t)$ — мгновенная фаза. Производная $\nu(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt}$ называется мгновенной частотой. Преобразование Фурье от аналитического сигнала имеет вид $\tilde{Z}_X(\omega) = \tilde{X}(\omega) + i \cdot \tilde{H}_X(\omega) = \tilde{X}(\omega) \cdot (1 + \text{sign}(\omega))$, или

$$\tilde{Z}_X(\omega) = \begin{cases} 2\tilde{X}(\omega), & \omega > 0, \\ \tilde{X}(0), & \omega = 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

После чего преобразование Гильберта равно мнимой части от результата обратного преобразования Фурье от $\tilde{Z}_X(\omega)$:

$$H_X(t) = \text{Im} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Z}_X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right).$$

Для сигнала с дискретным временем $X(t)$, $t = 0, \dots, (N - 1)$, это преобразование может быть вычислено с помощью дискретного преобразования Фурье:

$$d_X^{(N)}(\omega_k) = \sum_{t=0}^{N-1} X(t) \cdot \exp(-i\omega_k t), \quad \omega_k = \frac{2\pi}{N}(k - 1), \quad k = 0, 1, \dots, (N - 1),$$

после чего вторую часть фурье-коэффициентов (соответствующую отрицательным частотам) следует обнулить: $h_X^{(N)}(\omega_k) = 0$, $k = \frac{N}{2} + 1, \dots, (N - 1)$, тогда как первую часть — удвоить: $h_X^{(N)}(\omega_k) = 2 \cdot d_X^{(N)}(\omega_k)$, $k = 1, \dots, \frac{N}{2}$. После этого преобразование Гильберта вычисляется как мнимая часть обратного дискретного преобразования Фурье:

$$H_X(t) = \text{Im} \left(\sum_{k=0}^{N-1} h_X^{(N)}(\omega_k) \cdot \frac{\exp(i\omega_k t)}{N} \right), \quad t = 0, 1, \dots, (N - 1).$$

Преобразование Гильберта применяется к результатам EEMD-разложения Хуанга, и получаемые временные ряды изменения мгновенных амплитуд огибающих и мгновенных частот могут быть предметом дальнейших исследований.

В качестве примера на рис. 5 приведем графики мгновенных амплитуд огибающих средних EEMD-волновых форм, представленных на рис. 4, вычисленных с помощью их преобразования Гильберта.

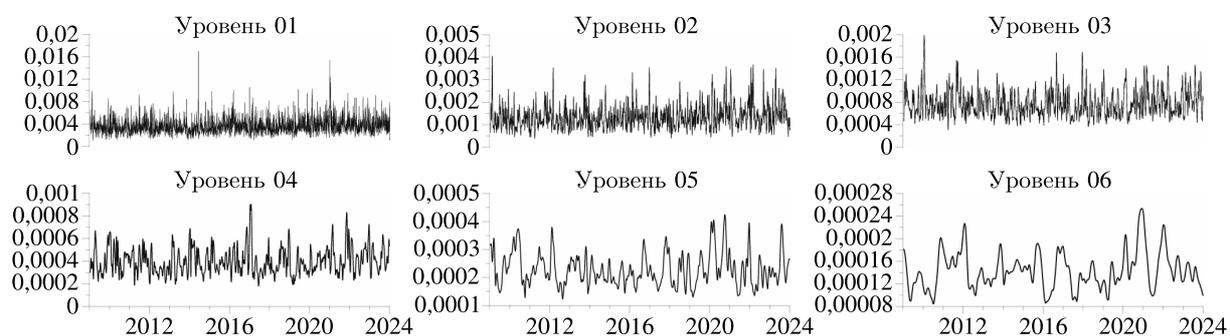


Рис. 5. Графики мгновенных амплитуд огибающих средних волновых форм EEMD для первых 6 уровней разложения

В поведении амплитуд огибающих на различных уровнях разложения имеется прогностическая информация, особенно в положении точек их локальных экстремумов. Но изложение исследований в этом направлении выходит за рамки данной статьи.

7. Алгоритм обнаружения аномального поведения временных рядов

В основе описанного ниже алгоритма лежит метод, изложенный в [Мурзагулов, Замятин, Романович, 2021]. Пусть дан временной ряд $x(k)$, $k = 1, \dots, N$. Для правого конца k временного окна длиной $(2w - 1)$ определим вектор, в который входят w временных фрагментов с положениями правых концов в точках $k, k - 1, k - 2, \dots, k - w + 1$,

$$x_k = (x(k - w + 1), x(k - w + 2), \dots, x(k))^T, \quad k = 2w - 1, \dots, N,$$

и $(w \times w)$ -матрицу

$$A'_k = \begin{pmatrix} x(k - 2w + 2) & x(k - 2w + 3) & \dots & x(k - w + 1) \\ x(k - 2w + 3) & x(k - 2w + 4) & \dots & x(k - w + 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(k - w + 1) & x(k - w + 2) & \dots & x(k) \end{pmatrix}, \quad k = 2w - 1, \dots, N.$$

Введем матрицу Q_k как разложение Холецкого матрицы $A_k = \text{cov}(A'_k)$: $A_k = Q_k \cdot Q_k^T$, где Q_k — верхняя треугольная матрица. Элементы матрицы A_k определяются по формулам

$$a_{i,j}^k = \frac{1}{w} \sum_{s=1}^w (x(k - 2w + i + s) - \bar{x}_i^k) (x(k - 2w + j + s) - \bar{x}_j^k), \quad \bar{x}_i^k = \frac{1}{w} \sum_{s=1}^w x(k - 2w + i + s).$$

Элементы верхней треугольной матрицы Q_k выше главной диагонали находятся из соотношения [Воеводин, Кузнецов, 1984]

$$q_{i,j}^k = \frac{1}{q_{i,i}^k} \left(a_{i,j}^k - \sum_{l=1}^{i-1} q_{l,i}^k q_{l,j}^k \right), \quad i = 1, \dots, w - 1, \quad j = i + 1, \dots, w,$$

где $a_{i,j}^k$ — соответствующие элементы матрицы A_k ; диагональные элементы матрицы Q_k определяются по формулам

$$q_{i,i}^k = \sqrt{a_{i,i}^k - \sum_{l=1}^{i-1} (q_{l,i}^k)^2}, \quad i = 1, \dots, w.$$

Следующим шагом получим вектор u_k , преобразовав x_k :

$$u_k = Q_j^{-1} \cdot (x_k - \bar{x}_k), \quad \bar{x}_k = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^w x_k(i), \quad k = 2w - 1, \dots, N,$$

где $x_k(i)$ — i -я компонента вектора x_k . Смысл перехода от переменных x_k к переменным u_k заключается в том, что при больших w ($w \rightarrow \infty$), когда выборочные оценки ковариационных матриц стремятся к истинным, средние значения u_k стремятся к нулю, а их дисперсии стремятся к единице.

Вычислим выборочные оценки средних и дисперсий для u_k :

$$d_k = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^w u_k(i), \quad \sigma_k^2 = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^w (u_k(i) - d_k)^2, \quad k = 2w - 1, \dots, N.$$

По выборкам $\{d_{2w-1}, d_{2w}, \dots, d_N\}$ и $\{\sigma_{2w-1}^2, \sigma_{2w}^2, \dots, \sigma_N^2\}$ строятся эмпирические функции распределения F_d и F_{σ^2} соответственно, графики которых представлены на рис. 6.

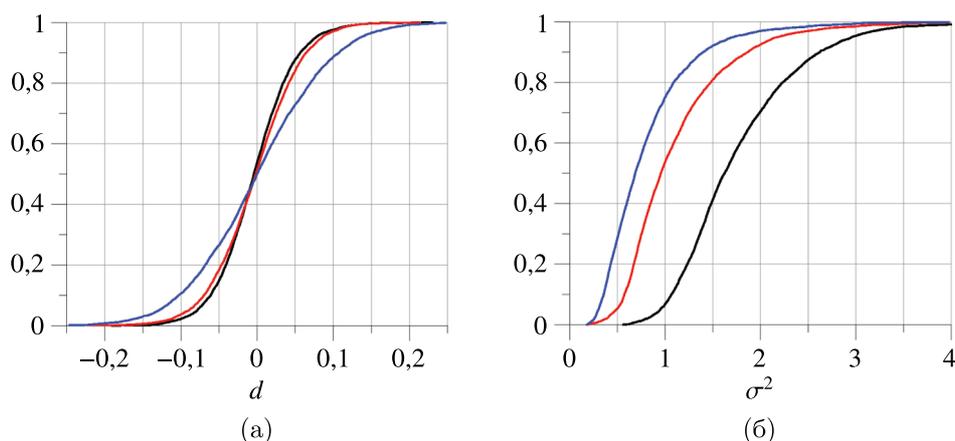


Рис. 6. Эмпирические функции распределения параметров разложения Холецкого для первых трех уровней разложения Хуанга: для параметров d_k (а), для параметров σ_k^2 (б). Черные линии — уровень 1, красные линии — уровень 2, синие линии — уровень 3

Теперь для статистик d_k и σ_k^2 , вычисленных для каждого положения правого конца k скользящего временного окна, по эмпирическим функциям распределения можно вычислить уровни значимости:

$$\alpha_{k,d} = F_d(d_k) \quad \text{и} \quad \alpha_{k,\sigma^2} = F_{\sigma^2}(\sigma_k^2), \quad k = 2w - 1, \dots, N,$$

которые затем сравниваются с определенным диапазоном, заданным через параметр α , и делается вывод о наличии ($S(k) = 1$) или отсутствии ($S(k) = 0$) аномалии в текущем временном окне с правым концом в точке k :

$$S(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{\alpha}{2} \leq \alpha_{k,d} \leq 1 - \frac{\alpha}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{\alpha}{2} \leq \alpha_{k,\sigma^2} \leq 1 - \frac{\alpha}{2}, \\ 1, & \text{если иначе,} \end{cases} \quad k = 2w - 1, \dots, N.$$

Таким образом, при малых α значения $\frac{\alpha}{2}$ и $1 - \frac{\alpha}{2}$ — это критические значения эмпирической вероятности того, что статистики d_k и σ_k^2 не принимают аномальных значений, вероятность которых мала и равна α . Одно из важных достоинств алгоритма заключается в отсутствии необходимости в априорной информации об аномалиях.

Зададимся максимальным порогом α_{\max} и построим регулярную сетку на отрезке $[0, \alpha_{\max}]$ с некоторым шагом r_α . Пусть наборы сигналов, равных 0 или 1,

$$\{S_\alpha^j(k)\}, \quad k = 2w - 1, \dots, N, \quad 1 \leq j \leq 3, \quad \alpha = r_\alpha, 2r_\alpha, \dots, \alpha_{\max},$$

получены в результате применения описанного выше алгоритма обнаружения аномалий к каждой усредненной эмпирической моде; j — номер эмпирической моды; w и α — параметры алгоритма обнаружения аномалий. Мы не рассматриваем тривиальное значение, соответствующее левому концу отрезка $[0, \alpha_{\max}]$, то есть нулю, так как для него сигналы S_α^j будут нулевыми. Таким образом, статистики $S_\alpha^j(k)$ вычисляются последовательно для уровней EEMD-разложения 1, 2 и 3. Для каждого момента времени просуммируем аномалии по всем доступным значениям параметра α :

$$\tilde{S}_w^j(k) = \sum_{\alpha \in \{r_\alpha, \dots, \alpha_{\max}\}} S_{w,\alpha}^j(k), \quad k = 2w - 1, \dots, N, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Введем еще один параметр метода — длину L окна усреднения признаков наличия или отсутствия аномалии. Для каждого уровня EEMD-разложения в скользящем временном окне длиной L для каждого положения правого конца этого окна вычислим средние сигналы $\tilde{S}_w^j(k)$, $1 \leq j \leq 3$:

$$\tilde{U}_w^j(k) = \frac{1}{L} \sum_{s=1}^L \tilde{S}_w^j(k-L+s), \quad 1 \leq j \leq 3, \quad k = 2w-1, \dots, N.$$

Для вычисления среднего по начальным значениям индекса k сигнал \tilde{S}_w^j дополняется слева нулевым вектором длиной $L-1$. Получившиеся таким образом сигналы $\tilde{U}_w^j(k)$, $1 \leq j \leq 3$, $k = 2w-1, \dots, N$, которые назовем индексами аномального поведения временных рядов, усредняются дополнительно для каждого момента времени по всем используемым уровням EEMD-разложения j :

$$U_w(k) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \tilde{U}_w^j(k), \quad k = 2w-1, \dots, N. \quad (9)$$

Таким образом, алгоритм имеет 4 свободных параметра: w , α_{\max} , r_α и L . Выберем максимальное пороговое значение $\alpha_{\max} = 0,1$ и шаг регулярной сетки $r_\alpha = 0,01$. Длину скользящего временного окна L определим равной 91 отсчету, т. е. примерно j года. Дальнейшее увеличение параметра α_{\max} не влияет на результат, заключающийся в предвестниковом эффекте, который будет проиллюстрирован ниже.

8. Связь индекса аномального поведения с выделением сейсмической энергии

Рассмотрим сейсмический процесс в окрестности Японских островов, взятой в виде окружности радиусом 1500 км с центром в точке центра масс положений кластеров сейсмических станций, представленных на рис. 1.

Данные взяты с сайта USGS (<https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/search/>). На рис. 7 представлено распределение эпицентров достаточно сильных землетрясений (с магнитудой не ниже 5) в этой окрестности.

Определим $\lg E$ как логарифм суммарной высвободившейся сейсмической энергии в интервалах длиной 30 суток со смещением 1 сутки, график которой представлен на рис. 8, *а*. На рис. 8, *б* представлен итоговый индикатор аномального поведения (9) U_{120} . Значение параметра $w = 120$ было выбрано эмпирически путем перебора. Критерием служило количество отрицательных временных сдвигов, которые обеспечивают максимум модуля кросс-корреляционной функции Пирсона для сигналов U_{120} и $\lg E$, вычисленной в скользящем временном окне длиной 6 лет (2192 отсчетов — с учетом того, что в окне длиной 6 лет 2 года являются високосными).

Вычислим в пределах каждого временного окна длиной 6 лет коэффициенты корреляции между $U_{120}(t)$ и $\lg E(t+k)$, где временной сдвиг k изменяется в пределах $-k_{\max} \leq k \leq k_{\max}$, и выберем такой оптимальный временной сдвиг k^* , для которого абсолютное значение коэффициента корреляции максимально. На рис. 9 представлены результаты такой оценки. Для временного окна длиной 2192 значений мы брали максимальные временные сдвиги $k_{\max} = 182$: эти максимальные временные сдвиги соответствуют половине года.

Как видно из графика на рис. 9, *б*, значение временного сдвига k^* , который обеспечивает максимальные значения модуля коэффициента корреляции, всегда отрицательно. Отрицательные значения оптимального сдвига k^* , обеспечивающего максимум модуля корреляций, означают, что «в среднем» особенности поведения (локальные экстремумы) индикатора аномалий $U_{120}(t)$ предшествуют особенностям поведения логарифма выброса сейсмической энергии $\lg E$. Для тех интервалов времени длиной 6 лет, для которых на рис. 9, *а* максимальная абсолютная корреляция

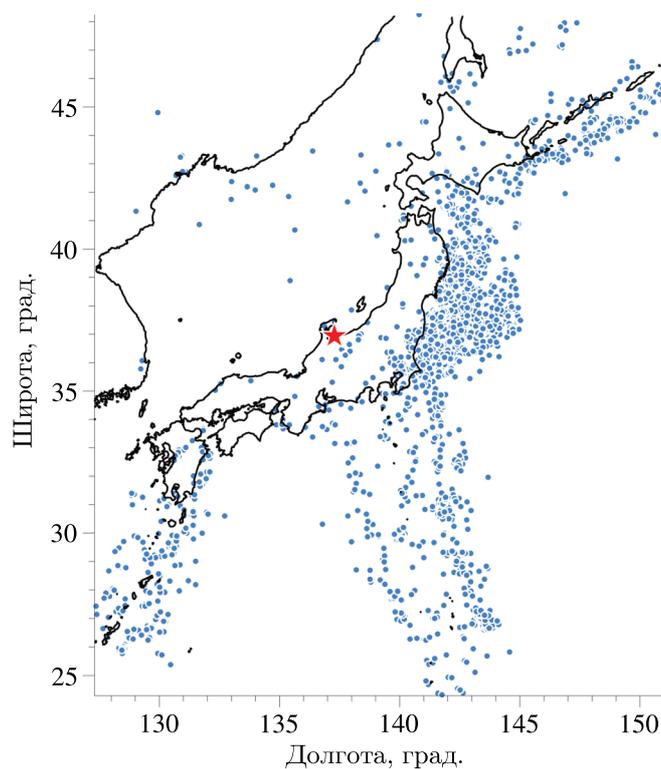


Рис. 7. Распределение эпицентров землетрясений с магнитудой не ниже 5 в окрестности Японских островов в радиусе 1500 км от центра масс всех центров кластеров (красная звездочка) для интервала времени 2009–2023 гг.

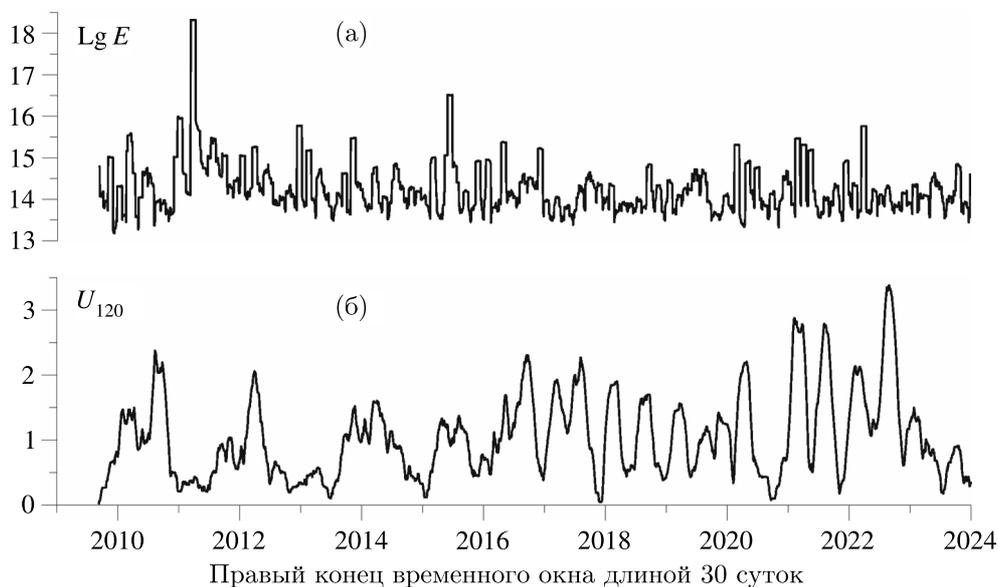


Рис. 8. а) График значений десятичного логарифма выделившейся сейсмической энергии (джоули) в скользящем временном окне длиной 30 суток со смещением 1 сутки в области, показанной на рис. 7; б) сигнал U_{120} . По горизонтальной оси отложены временные метки в годах

отрицательна, увеличение индикатора U_{120} через промежуток времени длиной k^* соответствует уменьшению выброса сейсмической энергии. Там же, где абсолютная корреляция положительна,

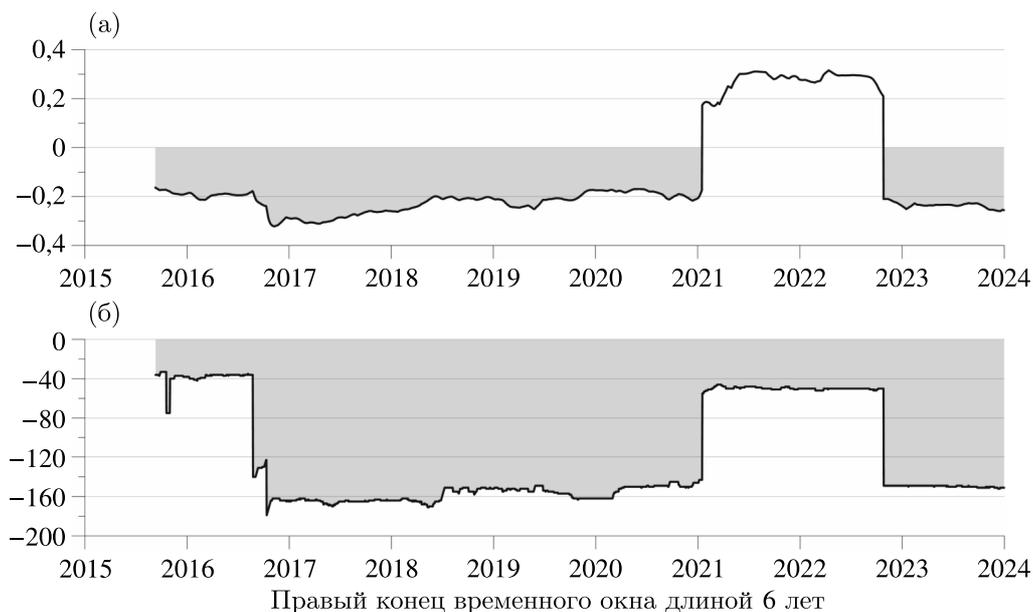


Рис. 9. а) Максимальные значения корреляций по их абсолютной величине между сигналами U_{120} и $\lg E$ во временном окне длиной 6 лет (2192 отсчета); б) временные сдвиги внутри временного окна, обеспечивающие максимальные значения модулей корреляций. В каждом временном окне сдвиги варьируются в пределах ± 182 отсчета

но значение k^* все равно отрицательно, означает, что, наоборот, всплески индикатора аномального поведения U_{120} со средней временной задержкой k^* предшествуют увеличению выброса сейсмической энергии.

И в том и в другом случае отрицательные значения оптимальных временных сдвигов k^* интерпретируются как проявление прогностического эффекта в поведении тремора земной поверхности на временном масштабе, определяемом параметром максимального временного сдвига k_{\max} , который у нас выбран равным половине года.

9. Обсуждение и выводы

Предложен метод исследования тремора земной поверхности, регистрируемого средствами космической геодезии, основанный на использовании кластерного анализа, метода главных компонент и разложения Хуанга. Целью анализа является обнаружение прогностических эффектов с использованием статистики аномального поведения, основанного на операции нормализации ковариационной матрицы компонент Хуанга в скользящем временном окне путем ее разложения Холецкого. В результате оптимизации параметров статистики аномального поведения удалось показать существование прогностического эффекта относительно интенсивности выделения сейсмической энергии для данных ежесуточных вертикальных смещений земной поверхности на сети из 1047 GPS-станций на Японских островах для промежутка времени 2009–2023 гг.

Следует отметить, что предложенный метод анализа «больших» данных мониторинга является многоступенчатым и требует процедуры «наладки», заключающейся в подборе таких параметров, которые обеспечили бы наиболее выразительный результат. Часть параметров определяется с помощью формальных процедур, например число и положение центров кластеров станций, представленных на рис. 1. Важный свободный параметр метода — это длина скользящего окна адаптации для вычисления средне взвешенных временных рядов на основе метода главных компонент, которая была выбрана равной 365 суткам для рассматриваемых ежесуточных

временных рядов. Этот выбор был сделан из геофизических соображений, поскольку почти все процессы в твердой и жидкой оболочках Земли подчиняются сильным годовым периодичностям. Алгоритм выделения аномального поведения в средних волновых EEMD-формах также содержит настраиваемые параметры, указанные выше. Для сопоставления с сейсмическим режимом была выбрана круговая область радиусом 1500 км с центром в центре тяжести положений кластеров. Это расстояние обеспечивает включение в анализ сейсмических событий во всех основных разломах между четырьмя тектоническими плитами, которые сходятся в районе Японских островов.

Реализация метода не требует привлечения мощных вычислительных ресурсов и может быть проведена в течение одного рабочего дня с использованием персонального компьютера класса desktop с процессором Intel(R) Core(TM) i9-7940X и 32 гигабайтами оперативной памяти. Наиболее трудоемкая часть метода — это усреднение EMD-волновых форм с целью получения EEMD-реализаций путем усреднения 1000 разложений Хуанга с добавлением независимых белых шумов.

Список литературы (References)

- Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. — М.: Финансы и статистика, 1989.
- Ayvazyan S. A., Buhstaber V. M., Enyukov I. S., Meshalkin L. D.* Prikladnaya statistika. Klassifikaciya i snizhenie razmernosti [Applied statistics. Classification and reduction of dimensionality]. — Moscow: Finansy i statistika, 1989 (in Russian).
- Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
- Voevodin V. V., Kuznetsov Yu. A.* Matricy i vychisleniya [Matrices and calculations]. — Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
- Давыдов В. А., Давыдов А. В.* Очистка геофизических данных от шумов с использованием преобразования Гильберта–Хуанга // Актуальные инновационные исследования: наука и практика. Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина. — 2010. — № 1. — <https://elibrary.ru/item.asp?id=16366484>
- Davydov V. A., Davydov A. V.* Ochistka geofizicheskikh dannykh ot шумov s ispol'zovaniem preobrazovaniia Gil'berta–Huanga [Denosing geophysical data using the Hilbert–Huang transform] // Aktual'nye innovacionnye issledovaniia: nauka i praktika. Tambovskij gosudarstvennyj universitet imeni G. R. Derzhavina. — 2010. — No. 1 (in Russian).
- Миронов Д. С., Лебига В. А., Мяс Дж. Дж., Пак А. Ю., Зиновьев В. Н.* Применение преобразования Гильберта–Хуанга для анализа пульсаций за прямым круговым цилиндром // Сибирский физический журнал. — 2017. — Т. 12, № 3. — С. 49–59. — <https://doi.org/10.25205/2541-9447-2017-12-3-49-59>
- Mironov D. S., Lebiga V. A., Miasu Dzh. Dzh., Pak A. Yu., Zinov'ev V. N.* Primenenie preobrazovaniia Gil'berta–Huanga dlia analiza pul'sacij za priamym krugovym cilindrom [Application of the Hilbert–Huang transform to analyze pulsations behind a right circular cylinder] // Sibirskij fizicheskij zhurnal. — 2017. — Vol. 12, No. 3. — P. 49–59 (in Russian).
- Мурзагулов Д. А., Замятин А. В., Романович О. В.* Подход к обнаружению аномалий в технологических сигналах с применением преобразования Гильберта–Хуанга // Автметрия. — 2021. — Т. 21, № 7. — С. 31–41. — <https://doi.org/10.15372/AUT20210104>
- Murzagulov D. A., Zamiatin A. V., Romanovich O. V.* Podhod k obnaruzheniiu anomalij v tehnologicheskikh signalah s primeneniem preobrazovaniia Gil'berta–Huanga [An approach to detecting anomalies in process signals using the Hilbert–Huang transform] // Avtometriia. — 2021. — Vol. 21, No. 7. — P. 31–41 (in Russian).
- Павлов А. Н., Филатова А. Е.* Метод эмпирических мод и вейвлет-фильтрация: применение в задачах геофизики // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2011. — Т. 19, № 1. — С. 3–13. — <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2011-19-1-3-13>
- Pavlov A. N., Filatova A. E.* Metod empiricheskikh mod i vejvlet-fil'traciia: primenenie v zadachah geofiziki [Empirical mode method and wavelet filtering: application in geophysics problems] // Izvestiia vuzov. Prikladnaia nelinejnaja dinamika. — 2011. — Vol. 19, No. 1. — P. 3–13 (in Russian).
- Ястребов И. П.* О свойствах и применениях преобразования Гильберта–Хуанга // Проектирование и технология электронных средств. — 2016. — № 1. — С. 26–33. — <https://elibrary.ru/item.asp?id=26379116>
- Yastrebov I. P.* O svoystvah i primeneniiah preobrazovaniia Gil'berta–Huanga [On the properties and applications of

- the Hilbert–Huang transform] // *Proektirovanie i tehnologiiia elektronnyh sredstv.* — 2016. — No. 1. — P. 26–33 (in Russian).
- Agnew D.* The time domain behavior of power law noises // *Geophys. Res. Lett.* — 1992. — Vol. 19. — P. 333–336. — <https://doi.org/10.1029/91GL02832>
- Amiri-Simkooei A. R., Tiberius C. C. J. M., Teunissen P. J. G.* Assessment of noise in GPS coordinate time series: Methodology and results // *J. Geophys. Res.* — 2007. — Vol. 112. — B07413. — <https://doi.org/10.1029/2006JB004913>
- Bendat J. S., Piersol A. G.* Random data. Analysis and measurement procedures. — Fourth Edition. — New Jersey: Wiley & Sons, 2010.
- Blewitt G., Hammond W. C., Kreemer C.* Harnessing the GPS data explosion for interdisciplinary science // *Eos.* — 2018. — No. 99. — <https://doi.org/10.1029/2018EO104623>
- Blewitt G., Lavallee D.* Effects of annual signal on geodetic velocity // *J. Geophys. Res.* — 2002. — Vol. 107, No. B7. — P. 2145. — <https://doi.org/10.1029/2001JB000570>
- Bos M. S., Bastos L., Fernandes R. M. S.* The influence of seasonal signals on the estimation of the tectonic motion in short continuous GPS time-series // *J. Geodynamics.* — 2010. — Vol. 49, No. 3–4. — P. 205–209. — <https://doi.org/10.1016/j.jog.2009.10.005>
- Bos M. S., Fernandes R. M. S., Williams S. D. P., Bastos L.* Fast error analysis of continuous GPS observations // *J. Geod.* — 2008. — Vol. 82, No. 3. — P. 157–166. — <https://doi.org/10.1007/s00190-007-0165-x>
- Caporali A.* Average strain rate in the Italian crust inferred from a permanent GPS network. — I. Statistical analysis of the time-series of permanent GPS stations // *Geophys. J. Int.* — 2003. — Vol. 155. — P. 241–253. — <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.2003.02034.x>
- Chanard K., Avouac J. P., Ramillien G., Genrich J.* Modeling deformation induced by seasonal variations of continental water in the Himalaya region: Sensitivity to Earth elastic structure // *J. Geophys. Res. Solid Earth.* — 2014. — Vol. 119. — P. 5097–5113. — <https://doi.org/10.1002/2013JB010451>
- Chen Q., van Dam T., Sneeuw N., Collilieux X., Weigelt M., Rebischung P.* Singular spectrum analysis for modeling seasonal signals from GPS time series // *J. Geodyn.* — 2013. — Vol. 72. — P. 25–35. — <https://doi.org/10.1016/j.jog.2013.05.005>
- Duda R. O., Hart P. E., Stork D. G.* Pattern classification. — New York, Chichester, Brisbane, Singapore, Toronto: Wiley-Interscience Publication, 2000.
- Filatov D. M., Lyubushin A. A.* Fractal analysis of GPS time series for early detection of disastrous seismic events // *Phys. A.* — 2017. — Vol. 469, No. 1. — P. 718–730. — <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2016.11.046>
- Filatov D. M., Lyubushin A. A.* Precursory analysis of GPS time series for seismic hazard assessment // *Pure and Applied Geophysics.* — 2019. — Vol. 177, No. 1. — P. 509–530. — <https://doi.org/10.1007/s00024-018-2079-3>
- Fu Y., Argus D. F., Freymueller J. T., Heflin M. B.* Horizontal motion in elastic response to seasonal loading of rain water in the Amazon Basin and monsoon water in Southeast Asia observed by GPS and inferred from GRACE // *Geophys. Res. Lett.* — 2013. — Vol. 40. — P. 6048–6053. — <https://doi.org/10.1002/2013GL058093>
- Huang N. E., Shen Z., Long S. R., Wu V. C., Shih H. H., Zheng Q., Yen N. C., Tung C. C., Liv H. H.* The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis // *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.* — 1998. — Vol. 454. — P. 903–995. — <https://doi.org/10.1098/rspa.1998.0193>
- Huang N. E., Wu Z.* A review on Hilbert–Huang transform: Method and its applications to geophysical studies // *Rev. Geophys.* — 2008. — Vol. 46, No. 2. — RG2006. — <https://doi.org/10.1029/2007RG000228>

- Huang N. E., Wu M., Qu W., Long S. R., Shen S. S. P. Applications of Hilbert–Huang transform to non-stationary financial time series analysis // *Appl. Stochastic Models Bus. Ind.* — 2003. — Vol. 19. — P. 245–268. — <https://doi.org/10.1002/asmb.501>
- Huang Y., Schmitt F. G., Lu Zh., Liu Y. Analysis of daily river flow fluctuations using empirical mode decomposition and arbitrary order Hilbert spectral analysis // *Journal of Hydrology.* — 2009. — Vol. 373. — P. 103–111. — <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2009.04.015>
- Huber P. J. Robust statistics. — N. Y., Chichester, Brisbane, Toronto: Wiley, 1981.
- Jolliffe I. T. Principal component analysis — Springer Series in Statistics. — New York, NY: Springer, 2002.
- Kermarrec G., Schon S. On modelling GPS phase correlations: a parametric model // *Acta Geod Geophys.* — 2018. — Vol. 53. — P. 139–156. — <https://doi.org/10.1007/s40328-017-0209-5>
- Li H., Kwong S., Yang L., Huang D., Xiao D. Hilbert–Huang transform for analysis of heart rate variability in cardiac health // *IEEE/ACM Trans Comput. Biol. Bioinform.* — 2011. — Vol. 8, No. 6. — P. 1557–1567. — <https://doi.org/10.1109/TCBB.2011.43>
- Li J., Miyashita K., Kato T., Miyazaki S. GPS time series modeling by autoregressive moving average method. Application to the crustal deformation in central Japan // *Earth Planets Space.* — 2000. — Vol. 52. — P. 155–162. — <https://doi.org/10.1186/BF03351624>
- Li W., Guo J. Extraction of periodic signals in Global Navigation Satellite System (GNSS) vertical coordinate time series using the adaptive ensemble empirical modal decomposition method // *Nonlin. Processes Geophys.* — 2024. — Vol. 31. — P. 99–113. — <https://doi.org/10.5194/npg-31-99-2024>
- Liu B., Dai W., Liu N. Extracting seasonal deformations of the Nepal Himalaya region from vertical GPS position time series using Independent Component Analysis // *Adv. Space Res.* — 2017. — Vol. 60. — P. 2910–2917. — <https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.02.028>
- Liu B., Xing X., Tan J., Xia Q. Modeling seasonal variations in vertical GPS coordinate time series using independent component analysis and varying coefficient regression // *Sensors.* — 2020. — Vol. 20. — P. 5627. — <https://doi.org/10.3390/s20195627>
- Lyubushin A. Entropy of GPS-measured Earth tremor // *Revolutionizing Earth Observation. New Technologies and Insights.* — 2024. — <http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.1004399>
- Lyubushin A. Field of coherence of GPS-measured earth tremors // *GPS Solutions.* — 2019. — Vol. 23. — P. 120. — <https://doi.org/10.1007/s10291-019-0909-0>
- Lyubushin A. Global coherence of GPS-measured high-frequency surface tremor motions // *GPS Solutions.* — 2018. — Vol. 22. — P. 116. — <https://doi.org/10.1007/s10291-018-0781-3>
- Lyubushin A. Identification of areas of anomalous tremor of the Earth’s surface on the Japanese Islands according to GPS data // *Applied Sciences.* — 2022. — Vol. 12. — P. 7297. — <https://doi.org/10.3390/app12147297>
- Lyubushin A. Singular points of the tremor of the Earth’s surface // *Applied Sciences.* — 2023. — Vol. 13. — P. 10060. — <https://doi.org/10.3390/app131810060>
- Pan Y., Shen W.-B., Ding H., Hwang C., Li J., Zhang T. The quasi-biennial vertical oscillations at Global GPS stations: identification by ensemble empirical mode decomposition // *Sensors.* — 2015. — Vol. 15. — P. 26096–26114. — <https://doi.org/10.3390/s151026096>
- Ray J., Altamimi Z., Collilieux X., van Dam T. Anomalous harmonics in the spectra of GPS position estimates // *GPS Solutions.* — 2008. — Vol. 12. — P. 55–64. — <https://doi.org/10.1007/s10291-007-0067-7>
- Roncagliolo P. A., García J. G., Mercader P. I., Fuhrmann D. R., Muravchik C. H. Maximum-likelihood attitude estimation using GPS signals // *Digital Signal Processing.* — 2007. — Vol. 17. — P. 1089–1100. — <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2006.09.001>

- Teferle F.N., Williams S.D.P., Kierulf H.P., Bingley R.M., Plag H.P.* A continuous GPS coordinate time series analysis strategy for high-accuracy vertical land movements // *Phys. Chem. Earth, Parts A/B/C.* — 2008. — Vol. 33, No. 3–4. — P. 205–216. — <https://doi.org/10.1016/j.pce.2006.11.002>
- Tesmer V., Steigenberger P., van Dam T., Mayer-Gurr T.* Vertical deformations from homogeneously processed GRACE and global GPS long-term series // *J. Geod.* — 2011. — Vol. 85. — P. 291–310. — <https://doi.org/10.1007/s00190-010-0437-8>
- Vogel M.A., Wong A.K.C.* PFS clustering method // *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* — 1979. — Vol. 1, No. 3. — P. 237–245. — <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/21868854/>
- Wang F., Li H., Lu M.* GNSS spoofing detection and mitigation based on maximum likelihood estimation // *Sensors.* — 2017. — Vol. 17. — P. 1532. — <https://doi.org/10.3390/s17071532>
- Wang W., Zhao B., Wang Q., Yang S.* Noise analysis of continuous GPS coordinate time series for CMONOC // *Adv. Space Res.* — 2012. — Vol. 49, No. 5. — P. 943–956. — <https://doi.org/10.1016/j.asr.2011.11.032>
- Wei H.-Ch., Xiao M.-X., Chen H.-Y., Li Y.-Q., Wu H.-T., Sun Ch.-K.* Instantaneous frequency from Hilbert–Huang transformation of digital volume pulse as indicator of diabetes and arterial stiffness in upper-middle-aged subjects // *Scientific Reports.* — 2018. — Vol. 8. — P. 15771. — <https://doi.org/10.1038/s41598-018-34091-6>
- Yan J., Dong D., Burgmann R., Materna K., Tan W., Peng Y., Chen J.* Separation of sources of seasonal uplift in China using independent component analysis of GNSS time series // *J. Geophys. Res. Solid Earth.* — 2019. — Vol. 124. — P. 11951–11971. — <https://doi.org/10.1029/2019JB018139>
- Zhang J., Bock Y., Johnson H., Fang P., Williams S., Genrich J., Wdowinski S., Behr J.* Southern California permanent GPS geodetic array: Error analysis of daily position estimates and site velocities // *J. Geophys. Res.* — 1997. — Vol. 102, No. B8. — P. 18035–18055. — <https://doi.org/10.1029/97JB01380>