

УДК: 519.6

Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря на многопроцессорной вычислительной системе

В. Н. Литвинов^а, А. Е. Чистяков^б, А. В. Никитина^с, А. М. Атаян^д,
И. Ю. Кузнецова^е

Донской государственный технический университет,
Россия, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1

E-mail: ^а litvinovvn@rambler.ru, ^б cheese_05@mail.ru, ^с nikitina.vm@gmail.com, ^д atayan24@mail.ru,
^е inna.yu.kuznetsova@gmail.com

Получено 08.08.2023, после доработки — 17.04.2024.
Принято к публикации 17.04.2024.

Статья посвящена моделированию гидродинамических процессов мелководных водоемов на примере Азовского моря. В статье приведена математическая модель гидродинамики мелководного водоема, позволяющая вычислить трехмерные поля вектора скорости движения водной среды. Применение регуляризаторов по Б. Н. Четверушкину в уравнении неразрывности привело к изменению способа расчета поля давления, базирующегося на решении волнового уравнения. Построена дискретная конечно-разностная схема для расчета давления в области, линейные размеры которой по вертикали существенно меньше размеров по горизонтальным координатным направлениям, что является характерным для геометрии мелководных водоемов. Описаны метод и алгоритм решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида. Предложенный метод применен для решения сеточных уравнений, возникающих при расчете давления для трехмерной задачи гидродинамики Азовского моря. Показано, что предложенный метод сходится быстрее модифицированного попеременно-треугольного метода. Представлена параллельная реализация предложенного метода решения сеточных уравнений и проведены теоретические и практические оценки ускорения алгоритма с учетом времени латентности вычислительной системы. Приведены результаты вычислительных экспериментов для решения задач гидродинамики Азовского моря с использованием гибридной технологии MPI + OpenMP. Разработанные модели и алгоритмы применялись для реконструкции произошедшей в 2001 году в Азовском море экологической катастрофы и решения задачи движения водной среды в устьевых районах. Численные эксперименты проводились на гибридном вычислительном кластере К-60 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН.

Ключевые слова: математическое моделирование, гидродинамика, итерационный метод, декомпозиция расчетной области, параллельный алгоритм

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-20050).

© 2024 Владимир Николаевич Литвинов, Александр Евгеньевич Чистяков, Алла Валерьевна Никитина, Ася Михайловна Атаян, Инна Юрьевна Кузнецова

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 519.6

Mathematical modeling of hydrodynamics problems of the Azov Sea on a multiprocessor computer system

V. N. Litvinov^a, A. E. Chistyakov^b, A. V. Nikitina^c, A. M. Atayan^d,
I. Yu. Kuznetsova^e

Don State Technical University,
1 Gagarina pl., Rostov-on-Don, 344003, Russia

E-mail: ^a litvinovvn@rambler.ru, ^b cheese_05@mail.ru, ^c nikitina.vm@gmail.com, ^d atayan24@mail.ru,
^e inna.yu.kuznetsova@gmail.com

*Received 08.08.2023, after completion — 17.04.2024.
Accepted for publication 17.04.2024.*

The article is devoted to modeling the shallow water hydrodynamic processes using the example of the Azov Sea. The article presents a mathematical model of the hydrodynamics of a shallow water body, which allows one to calculate three-dimensional fields of the velocity vector of movement of the aquatic environment. Application of regularizers according to B. N. Chetverushkin in the continuity equation led to a change in the method of calculating the pressure field, based on solving the wave equation. A discrete finite-difference scheme has been constructed for calculating pressure in an area whose linear vertical dimensions are significantly smaller than those in horizontal coordinate directions, which is typical for the geometry of shallow water bodies. The method and algorithm for solving grid equations with a tridiagonal preconditioner are described. The proposed method is used to solve grid equations that arise when calculating pressure for the three-dimensional problem of hydrodynamics of the Azov Sea. It is shown that the proposed method converges faster than the modified alternating triangular method. A parallel implementation of the proposed method for solving grid equations is presented and theoretical and practical estimates of the acceleration of the algorithm are carried out taking into account the latency time of the computing system. The results of computational experiments for solving problems of hydrodynamics of the Sea of Azov using the hybrid MPI + OpenMP technology are presented. The developed models and algorithms were used to reconstruct the environmental disaster that occurred in the Sea of Azov in 2001 and to solve the problem of the movement of the aquatic environment in estuary areas. Numerical experiments were carried out on the K-60 hybrid computing cluster of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences.

Keywords: mathematical modeling, hydrodynamics, iterative method, computational domain decomposition, parallel algorithm

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 3, pp. 647–672 (Russian).

The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 21-71-20050.

1. Введение

Изменение климатических условий и рост техногенных нагрузок на Юге России приводят к ухудшению условий водопользования и повышению частоты неблагоприятных явлений [Рыбак, Рыбак, 2015]. В настоящее время продолжаются фаза низкой водности и снижение стока реки Дон, что привело к снижению водности в Ростовской области более чем на 40 % [Волосухин, Бандурин, 2017]. Наблюдаются ежегодные сгоны в реке Дон и Таганрогском заливе Азовского моря, фиксируются разливы нефтепродуктов [Сапожников, Аржанова, Лапина, 2013]. Поэтому исследование гидродинамических процессов мелководных водоемов Юга России, наиболее подверженных природным и техногенным воздействиям, является актуальной задачей. К предупредительным мерам по возникновению чрезвычайных ситуаций в водных экосистемах следует отнести компьютерный мониторинг, который можно осуществлять с использованием методов и средств математического моделирования.

Построением математических моделей прибрежных и морских систем занимается большое количество специалистов всего мира. В России работы по созданию математических моделей сложных морских систем имеют более чем полувековую историю развития в ведущих научных центрах страны. Однако, несмотря на значительное число публикаций, многие эффекты, существенные для повышения точности и надежности долгосрочных прогнозов, связанные с пространственно-трехмерным характером движения водной среды с развитой турбулентностью, не учитывались ранее при построении математических моделей гидродинамических процессов.

Большое влияние на моделирование и анализ процессов гидрофизики оказали работы Б. Н. Четверушкина. В работе [Четверушкин, 2015] описывается подход к решению задач механики сплошной среды, при котором в уравнении неразрывности появляются дополнительные, по сравнению с классической постановкой, члены, которые можно трактовать как регуляризаторы, сглаживающие решение на пространственно-временных масштабах. Сопоставление результатов расчетов на основе описанного подхода с экспериментальными данными представлено в работе [Четверушкин и др., 2020]. Значительный вклад в разработку современных алгоритмов и методов построения адаптивных сеток, декомпозиции расчетной области, параллельных вычислений внесли ученые ИПМ им. Келдыша, среди которых стоит выделить работы М. В. Якобовского [Якобовский, Григорьев, 2018; Четверушкин, Якобовский, 2018]. Моделированием распространения ударного фронта на основе разрывного метода Галёркина в задачах газо- и гидродинамики занимается В. Ф. Тишкин [Брагин, Криксин, Тишкин, 2021]. В работе Ю. В. Янилкина [Янилкин и др., 2023] предложен новый подход к моделированию турбулентного перемешивания, который может быть применен для повышения точности моделирования распространения загрязнений в водоеме в результате техногенных катастроф.

Среди зарубежных исследователей, применяющих методы математического моделирования к решению задач динамики сложных систем, можно выделить D. Prandle [Prandle, Lane, 2015], H. von Storch [Woth, Weisse, Von Storch, 2006], M. Gade и S. Ermakov [Gade et al., 2013], Q. Peng, S. P. Xie и W. Wang [Peng et al., 2023] и др. Численное решение описываемых задач часто приводит к возникновению систем линейных алгебраических уравнений высокой размерности, решение которых требует задействования мощных вычислительных систем. Применение научно обоснованной комбинации усовершенствованных численных методов и алгоритмов, включающих как последовательные, так и параллельные реализации известных методов решения сеточных уравнений, адаптированных к гетерогенным распределенным вычислительным системам, позволит снизить суммарное время расчетов за счет снижения временных затрат на передачу данных по сети и внутри вычислительных узлов.

Технологии параллельных вычислений, такие как MPI (Message Passing Interface), OpenMP и их комбинация — MPI + OpenMP, являются важными инструментами для эффективного использования современных многопроцессорных систем. В работе [Милюкова, 2022] для решения

системы сеточных уравнений высокой размерности применялась модификация метода сопряженных градиентов, ориентированная на комбинацию технологий MPI и OpenMP. Предложенное упорядочение узлов сетки, согласованное с декомпозицией расчетной области, позволило получить сверхлинейное ускорение при количестве задействованных процессоров, не превышающем 5. Сравнение эффективности применения технологии MPI и комбинации технологий MPI + OpenMP на примере решения уравнений Навье – Стокса продемонстрировано в работе [He et al., 2022], где применялся метод Галёркина. Распараллеливание MPI показало более высокий уровень эффективности распараллеливания (90 %), чем гибридное распараллеливание OpenMP + MPI. Таким образом, при решении практических задач необходимо проведение сравнительного анализа количественных показателей параллельных алгоритмов, задействующих различные комбинации технологий параллельного программирования, с целью выбора их наиболее рационального сочетания.

2. Математическая модель

В данном разделе рассмотрена разработанная авторским коллективом трехмерная модель гидродинамики, учитывающая определяющие физические факторы, такие как стгонно-нагонные явления, динамически перестраиваемую геометрию дна, возвышение уровня и береговой линии, ветровые течения и трение о дно, силу Кориолиса, турбулентный обмен, испарение, стоки рек Дон и Кубань, водообмен с Черным морем и озером Сиваш, отклонение значения поля давления от гидростатического приближения. Применение регуляризаторов по Б. Н. Четверушкину в уравнении неразрывности влечет за собой изменение способа расчета поля давления, базирующегося на решении волнового уравнения [Сухинов и др., 2022]. При таком подходе давление распространяется не быстрее скорости звука и уменьшается вычислительная трудоемкость, так как дискретный аналог волнового уравнения имеет диагональное преобладание в отличие от дискретного аналога уравнения Пуассона, вследствие чего уменьшается число обусловленности оператора, влияющего на скорость сходимости итерационного метода, используемого для решения возникающей в процессе дискретизации СЛАУ. При решении задач гидродинамики мелководных водоемов на основе схем расщепления по физическим процессам наиболее трудоемкой в плане вычислений является задача расчета поля давления. Для решения данной задачи приведена разностная схема, учитывающая степень «заполненности» ячеек.

2.1. Математическая модель гидродинамики

Изучение гидродинамических процессов Азовского моря основывается на модели гидродинамики мелководных водоемов, в результате решения которой рассчитываются трехмерные поля вектора скорости движения водной среды:

- уравнение движения (Навье – Стокса):

$$u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z = -\frac{1}{\rho}P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (\mu u'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \vartheta - w \cos \vartheta), \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z = -\frac{1}{\rho}P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\mu v'_z)'_z + 2\Omega u \sin \vartheta, \quad (2)$$

$$w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho}P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (\mu w'_z)'_z + 2\Omega u \cos \vartheta + g; \quad (3)$$

- уравнение неразрывности, регуляризированное по Б. Н. Четверушкину, в случае переменной плотности:

$$\rho'_t + \tau^* \rho''_{tt} + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости водной среды; $P(x, y, z) = p(x, y, z, t) + \rho_0 g z$ — полное гидродинамическое давление; p — превышение давления над гидростатическим приближением, рассчитанным в случае невозмущенной жидкости; ρ_0 — плотность пресной воды при температуре 20°C и атмосферном давлении; ρ — плотность водной среды; μ, ν — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена; $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \cdot (\cos \vartheta \cdot \mathbf{j} + \sin \vartheta \cdot \mathbf{k})$ — угловая скорость вращения Земли; ϑ — широта места; g — ускорение свободного падения; $\tau^* \sim \frac{h}{c}$ — параметр регуляризации; h — шаг расчетной сетки; c — скорость звука.

Зададим краевые условия для системы уравнений (1)–(4):

- на входе (озеро Сиваш, устья рек Кубань и Дон): $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0, P'_n = 0$;
- на боковой границе (берега и дно Азовского моря): $\rho\mu(\mathbf{V}_\tau)'_n = -\tau, \mathbf{V}_n = 0, P'_n = 0$;
- на верхней границе (поверхность Азовского моря): $\rho\mu(\mathbf{V}_\tau)'_n = -\tau, w = -\omega - \frac{P'}{\rho g}, P'_n = 0$;
- на выходе (Керченский пролив): $P'_n = 0, \mathbf{V}'_n = 0$,

где ω — интенсивность испарения жидкости; $\mathbf{V}_n, \mathbf{V}_\tau$ — нормальная и тангенциальная составляющие вектора скорости водного потока; $\tau = \{\tau_x, \tau_y, \tau_z\}$ — вектор тангенциального напряжения [Сухинов и др., 2023b].

Введем равномерную прямоугольную расчетную сетку по времени $w_t = \{t^n = n\tau; n = 0, N_t - 1, (N_t - 1)\tau = T\}$, где τ — шаг по времени, N_t — количество временных слоев, T — верхняя граница по времени.

Исходная модель гидродинамики в результате применения метода поправки к давлению, представляющего собой аддитивную схему расщепления по физическим процессам и гарантирующего выполнение баланса массы, разделялась на три подзадачи [Сухинов, Чистяков, Алексеенко, 2011]. Первая подзадача, представляющая собой уравнение диффузии – конвекции – реакции, позволяет на основе известных значений компонент поля вектора скорости водного потока на предыдущем слое по времени u, v, w вычислить соответствующие компоненты на промежуточном временном слое $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$:

$$\frac{\tilde{u} - u}{\tau} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y + w\tilde{u}'_z = (\mu\tilde{u}'_x)'_x + (\mu\tilde{u}'_y)'_y + (\nu\tilde{u}'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \quad (5)$$

$$\frac{\tilde{v} - v}{\tau} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y + w\tilde{v}'_z = (\mu\tilde{v}'_x)'_x + (\mu\tilde{v}'_y)'_y + (\nu\tilde{v}'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \quad (6)$$

$$\frac{\tilde{w} - w}{\tau} + u\tilde{w}'_x + v\tilde{w}'_y + w\tilde{w}'_z = (\mu\tilde{w}'_x)'_x + (\mu\tilde{w}'_y)'_y + (\nu\tilde{w}'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta + g \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right). \quad (7)$$

Для аппроксимации уравнения диффузии – конвекции – реакции по времени использована схема с весами. Пусть $\sigma \in [0, 1]$ — вес схемы. Тогда $\tilde{u} = \sigma\tilde{u} + (1 - \sigma)u$ [Самарский, Николаев, 1978].

Вторая подзадача, базирующаяся на волновом уравнении, позволяет рассчитать поле давления:

$$-\frac{\hat{p} - 2p + \tilde{p}}{(c\tau)^2} + \hat{p}''_{xx} + \hat{p}''_{yy} + \hat{p}''_{zz} = \frac{\hat{p} - \rho}{\tau^2} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{w})'_z}{\tau}, \quad (8)$$

где $\hat{p}$ — функция давления на следующем временном слое.

Решение третьей подзадачи описывает распределение скоростей водного потока на следующем временном слое $\widehat{u}$, $\widehat{v}$, $\widehat{w}$:

$$\frac{\widehat{u} - \widetilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\widehat{\rho}} \widehat{p}'_x, \quad \frac{\widehat{v} - \widetilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\widehat{\rho}} \widehat{p}'_y, \quad \frac{\widehat{w} - \widetilde{w}}{\tau} = -\frac{1}{\widehat{\rho}} \widehat{p}'_z. \quad (9)$$

Уравнения (5)–(9) составляют непрерывную математическую модель гидродинамики мелководного водоема и лежат в основе соответствующей дискретной модели.

При решении задач гидродинамики мелководных водоемов на основе уравнений (5)–(9) наиболее трудоемкой в плане вычислений является задача расчета поля давления на основе подзадачи (8). Поэтому возникает необходимость в разработке эффективных методов решения этой задачи.

2.2. Дискретная конечно-разностная схема для расчета давления

Задача расчета давления (5)–(9) рассматривается в области Γ , линейные размеры которой по вертикали существенно меньше размеров по горизонтальным координатным направлениям, что является характерным для геометрии мелководных водоемов. Дискретная конечно-разностная схема для расчета давления получена для трехмерной равномерной расчетной сетки ранее [Сухинов, Белова, Чистяков, 2021] и аппроксимирует волновое уравнение (8) со вторым порядком точности по пространству и по времени, а также отражает информацию о граничных условиях, которые могут различаться по каждому из пространственных направлений. Для описания динамически перестраиваемой геометрии расчетной области в дискретном случае применялся метод заполненности ячеек [Сухинов и др., 2019]. Отличительной особенностью схемы [Сухинов, Чистяков, Алексеенко, 2011] является возможность описания сложной геометрии расчетной области, которая может динамически перестраиваться в процессе вычислений.

Впишем Γ в прямоугольный параллелепипед, который покроем трехмерной равномерной расчетной сеткой $w = w_l \times w_h$:

$$w_h = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z; i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}, k = \overline{0, N_z - 1}; \\ (N_x - 1)h_x = l_x, (N_y - 1)h_y = l_y, (N_z - 1)h_z = l_z\},$$

где h_x, h_y, h_z — шаги по пространству; N_x, N_y, N_z — количество узлов по пространству; l_x, l_y, l_z — характерные размеры области Γ .

Для описания геометрии расчетной области в дискретном случае вводится параметр $o_{i,j,k} = \frac{V_{\Omega_{i,j,k}}}{V_{D_{i,j,k}}} \left(V_{\Omega_{i,j,k}} \right.$ — объем ячейки, заполненной средой; $V_{D_{i,j,k}} = h_x \cdot h_y \cdot h_z$ — общий объем ячейки), который описывает степень заполненности ячейки (i, j, k) . Для построения разностной схемы также понадобятся коэффициенты $q_i, i = \overline{0, 6}$, описывающие степень заполненности контрольных областей [Сухинов и др., 2019]. Разностная схема для уравнения (8) при описанных граничных условиях запишется в виде

$$q_{0,i,j,k} \frac{\widehat{p}_{i,j,k} - 2p_{i,j,k} + \widetilde{p}_{i,j,k}}{(c\tau)^2} + ((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k}) H((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k}) \left(\frac{\widehat{p}_{i,j,k} - p_{i,j,k}}{\tau^2 h_z g} + \frac{\omega \widehat{p}_{i,j,k}}{\tau h_z} \right) - \\ - (q_1)_{i,j,k} \frac{\widehat{p}_{i+1,j,k} - \widehat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} + (q_2)_{i,j,k} \frac{\widehat{p}_{i,j,k} - \widehat{p}_{i-1,j,k}}{h_x^2} - (q_3)_{i,j,k} \frac{\widehat{p}_{i,j+1,k} - \widehat{p}_{i,j,k}}{h_y^2} + \\ + (q_4)_{i,j,k} \frac{\widehat{p}_{i,j,k} - \widehat{p}_{i,j-1,k}}{h_y^2} - (q_5)_{i,j,k} \frac{\widehat{p}_{i,j,k+1} - \widehat{p}_{i,j,k}}{h_z^2} + (q_6)_{i,j,k} \frac{\widehat{p}_{i,j,k} - \widehat{p}_{i,j,k-1}}{h_z^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= -(q_0)_{i,j,k} \frac{\widehat{\rho}_{i,j,k} - \rho_{i,j,k}}{\tau^2} - \frac{(q_1)_{i,j,k}(\widehat{\rho} \widetilde{u})_{i+1/2,j,k} - (q_2)_{i,j,k}(\widehat{\rho} \widetilde{u})_{i-1/2,j,k}}{\tau h_x} - \\
&- \frac{(q_3)_{i,j,k}(\widehat{\rho} \widetilde{v})_{i,j+1/2,k} - (q_4)_{i,j,k}(\widehat{\rho} \widetilde{v})_{i,j-1/2,k}}{\tau h_y} - \frac{(q_5)_{i,j,k}(\widehat{\rho} \widetilde{w})_{i,j,k+1/2} - (q_6)_{i,j,k}(\widehat{\rho} \widetilde{w})_{i,j,k-1/2}}{\tau h_z} - \\
&- \left(\frac{(q_2)_{i,j,k} - (q_1)_{i,j,k}}{\tau h_x} (\widehat{\rho} \widetilde{u})_{i,j,k} + \frac{(q_4)_{i,j,k} - (q_3)_{i,j,k}}{\tau h_y} (\widehat{\rho} \widetilde{v})_{i,j,k} \right) m_{i,j,k}, \quad (10)
\end{aligned}$$

где $(\widehat{\rho} \widetilde{u})_{i+1/2,j,k} = \frac{\widehat{\rho}_{i+1,j,k} \widetilde{u}_{i+1,j,k} + \widehat{\rho}_{i,j,k} \widetilde{u}_{i,j,k}}{2}$, $m_{i,j,k}$ — маска граничного условия. Если узел (i, j, k) принадлежит боковой или верхней границам, то $m_{i,j,k} = 0$, в противном случае (на входе или на выходе) $m_{i,j,k} = 1$, $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ — функция Хэвисайда.

Разностная схема (10) аппроксимирует волновое уравнение (8) со вторым порядком точности по пространству и по времени, отражает информацию о граничных условиях, которые могут различаться по каждому из пространственных направлений. Отличительной особенностью схемы (10) является возможность описания сложной геометрии расчетной области, которая может динамически перестраиваться в процессе вычислений.

3. Решение сеточных уравнений

Для сокращения времени численного решения поставленной задачи расчета давления, являющейся одним из этапов реализации математической модели гидродинамики Азовского моря, коллективом авторов разработан метод решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида в расчетной области с «вытянутой геометрией», то есть в области, характерные размеры которой в горизонтальном направлении значительно превышают вертикальный размер. В предложенном методе решения сеточных уравнений при формировании предобуславливателя вместо операторов, описывающих перенос вдоль горизонтальных направлений, используются их диагональные части. Аналитическим путем получена оценка числа обусловленности, от которого зависит скорость сходимости разработанного метода. Предложенный метод решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида тестировался на задаче расчета давления, возникающей при аппроксимации трехмерной математической модели гидродинамики Азовского моря. Экспериментальным путем было установлено, что при использовании гидростатического приближения в качестве начальных значений давления, полученного в результате аппроксимации модели гидродинамики мелководного водоема, включающей три уравнения движения, методы решения сеточных уравнений сходятся быстрее.

3.1. Метод решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида

Запишем сеточное уравнение (10), используемое для расчета давления, в матричной форме, заменив искомые значения давления p в узлах на x и представив коэффициенты при неизвестных в форме линейного самосопряженного положительно определенного оператора $A = A^* > 0$:

$$Ax = f. \quad (11)$$

Представим A в виде суммы линейных операторов:

$$A = D + \Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z, \quad \Lambda_x = \frac{1}{h_x^2} \Lambda_{D,x} \otimes E_y \otimes E_z, \quad \Lambda_y = \frac{1}{h_y^2} E_x \otimes \Lambda_{D,y} \otimes E_z, \quad \Lambda_z = \frac{1}{h_z^2} E_x \otimes E_y \otimes \Lambda_{D,z}, \quad (12)$$

где $\otimes$ — символ, обозначающий произведение Кронекера; E_x, E_y, E_z — единичные матрицы $N_x - 2, N_y - 2, N_z - 2$ порядков соответственно; Λ_D — линейный оператор, содержащий коэффициенты сеточных уравнений.

В случае граничных условий $p'_n = \alpha p + \beta$ 3-го ($\alpha > 0$) и 2-го ($\alpha = 0$) рода оператор Λ_D запишется в виде

$$(\Lambda_D)_{i,j} = \begin{cases} 1 + \alpha h, & \text{если } (i + j = 2) \vee (i + j = 2N), \\ 2, & \text{если } (i = j) \wedge (2 < i + j < 2N), \\ -1, & \text{если } |i - j| = 1, \\ 0, & \text{если } |i - j| > 1, \end{cases} \quad \Lambda_D = \begin{pmatrix} 1 + \alpha h & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для решения задачи (11) используем неявный итерационный процесс:

$$B \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f, \quad (14)$$

где B — предобуславливатель, n — номер итерации, $\tau_{n+1} > 0$ — итерационный параметр.

Параметры ρ и τ находятся из условий $\frac{1-\rho}{\tau} = \lambda_{\min}$, $\frac{1+\rho}{\tau} = \lambda_{\max}$. Получим, что

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}, \quad \rho = \frac{\nu - 1}{\nu + 1}, \quad \nu = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}. \quad (15)$$

Здесь $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ — минимальное и максимальное значения собственных чисел оператора C , $\nu = \nu(C)$ — число обусловленности оператора C .

Предобуславливатель сформируем следующим образом:

$$B = D + \omega D_{xy} + \Lambda_z, \quad \omega > 0, \quad (16)$$

где D_{xy} — оператор, составленный из диагональной части оператора $\Lambda_{xy} = \Lambda_x + \Lambda_y$.

Выполним оценку максимального собственного числа с учетом $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$, $B^{-1/2}x = y$:

$$\lambda_{\max}(C) = \max_{|x|>0} \frac{(Cx, x)}{(x, x)} = \max_{|y|>0} \frac{(B^{-1/2}Ay, B^{1/2}y)}{(B^{1/2}y, B^{1/2}y)} = \max_{|y|>0} \frac{(Ay, y)}{(By, y)}.$$

Обозначим $S = D_{xy}^{-1}D + D_{xy}^{-1/2}\Lambda_z D_{xy}^{-1/2}$, тогда оценка числа обусловленности оператора C будет иметь вид

$$\nu(C) \leq \begin{cases} \frac{\Delta + \lambda_{\max}(S)}{\delta + \lambda_{\min}(S)} \left(1 - \frac{\lambda_{\max}(S) - \lambda_{\min}(S)}{\omega + \lambda_{\max}(S)} \right), & \Delta \leq \omega, \\ \frac{\Delta + \lambda_{\min}(S)}{\delta + \lambda_{\min}(S)}, & \delta \leq \omega \leq \Delta, \\ \frac{\Delta + \lambda_{\min}(S)}{\delta + \lambda_{\max}(S)} \left(1 + \frac{\lambda_{\max}(S) - \lambda_{\min}(S)}{\omega + \lambda_{\min}(S)} \right), & \omega \leq \delta. \end{cases} \quad (17)$$

Из полученной оценки следует, что число обусловленности оператора C минимально при $\delta \leq \omega \leq \Delta$. Для работы стационарных итерационных методов требуется априорная информация о значениях максимального и минимального собственных чисел операторов. В случае выбора предобуславливателя в виде (16) для произвольной геометрии расчетной области возникает проблема оценки минимальных собственных чисел операторов.

3.2. Решение сеточных уравнений, возникающих при расчете давления для трехмерной задачи гидродинамики Азовского моря

Для проверки работоспособности предложенного метода проведены вычислительные эксперименты по определению количества итераций, необходимых для получения решения поставленной задачи с заданной точностью. Область расчетов выбрана совпадающей с размерами акватории Азовского моря: 355 км в длину, 233 км в ширину, 13,2 м в глубину. Под подъем уровня воды отводится 4 м над поверхностью водоема. Пространственный шаг по горизонтальным направлениям принят равным 1000 м, по вертикали — 0,5 м. При этом отношение шагов по горизонтали к шагам по вертикали составило 2000 раз. Размеры расчетной сетки составили $255 \times 350 \times 35$ узлов. Для расчета давления задавались граничные условия 3-го рода на поверхности Азовского моря, на всех остальных поверхностях — граничные условия 2-го рода.

Эксперимент по определению зависимости нормы вектора невязки $\|r\|_C$ от количества итераций n при решении сеточных уравнений на основе модифицированного попеременно-треугольного метода (на рис. 1 представлены графиком 1) [Самарский, Николаев, 1978] и предложенного метода решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида (на рис. 1 — кривая 2) показал, что применение МПТМ не приводит к уменьшению нормы вектора невязки, а предложенного метода — позволяет достичь точности 10^{-5} менее чем за 1000 итераций.

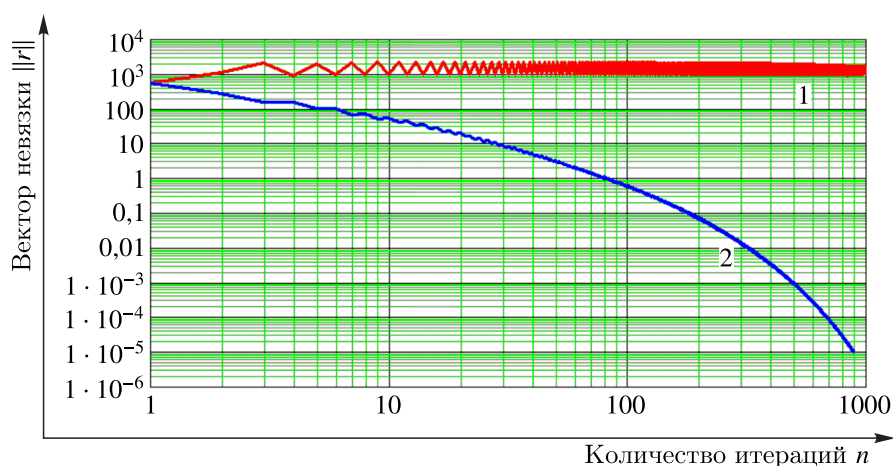


Рис. 1. Зависимость значений равномерной нормы вектора невязки от количества итераций: 1 — расчет на основе МПТМ, 2 — на основе метода решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида

При расчете поля давления для модели гидродинамики Азовского моря в качестве начального приближения использовалось гидростатическое приближение, расчет которого, выполняемый на основе двумерной задачи, значительно менее трудоемок по сравнению с расчетом трехмерной задачи. На рис. 2 представлены графики зависимости равномерной нормы вектора невязки $\|r\|$ от количества итераций n , полученные при решении сеточных уравнений задачи расчета давления с учетом гидростатического приближения.

Установлено, что при использовании гидростатического приближения в качестве начальных значений давления, полученного в результате аппроксимации рассматриваемой модели гидродинамики, методы решения сеточных уравнений сходятся быстрее. Разработанный метод решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида достигает точности 10^{-3} за 2 итерации, а 10^{-5} — менее чем за 15 (на рис. 2 кривая 2). МПТМ сходится за 100 итераций и останавливается на точности 10^{-3} (на рис. 2 кривая 1).

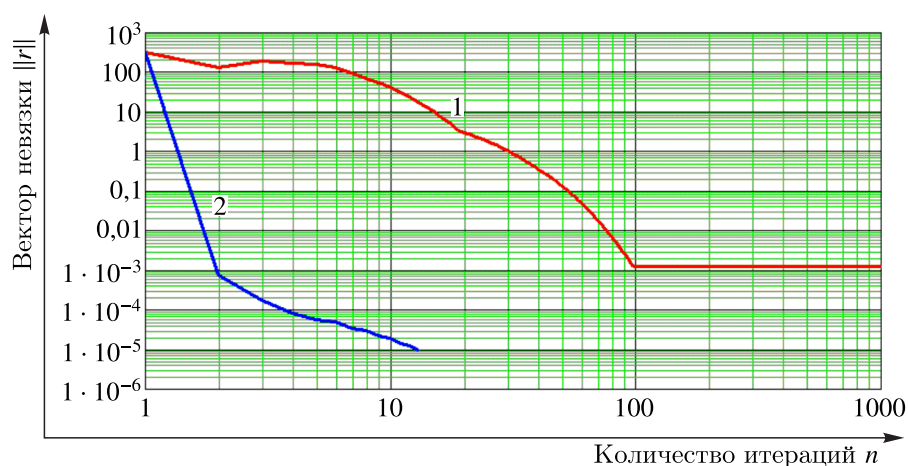


Рис. 2. Зависимость равномерной нормы вектора невязки от количества итераций при использовании гидростатического приближения: 1 — расчет на основе МПТМ, 2 — на основе метода решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида

4. Параллельная реализация

На основе предложенного метода решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида был разработан и интегрирован в программный комплекс Azov3D последовательный алгоритм [Сушинов и др., 2023a]. Разработанный ранее алгоритм является однопоточным, предназначен для вычислительных систем с общей памятью и имеет ограничение на размер расчетной сетки, обусловленное размещением всех массивов данных в оперативной памяти. Время счета при этом оказалось достаточно высоким. Например, расчетная сетки размером $1000 \times 1000 \times 60$ расчетных узлов обрабатывалась более чем за 73 секунды, что не позволяет использовать данный алгоритм при решении комплексных нестационарных задач. Для уменьшения времени расчетов авторским коллективом разработана параллельная версия данного алгоритма, предназначенная для систем с распределенной памятью и ориентированная на применение технологии MPI. Ее использование на системах с несколькими вычислительными узлами требует учета затрат времени на передачу данных по сети. Это позволяет сконфигурировать алгоритм оптимальным образом и тем самым минимизировать долю затрат времени на транспортировку данных по локальной сети в общем времени расчетов. Проведен вычислительный эксперимент, в результате которого методом наименьших квадратов были получены зависимости, описывающие время латентности и время передачи данных. Результаты расчета времени латентности используются в предложенном алгоритме решения сеточных уравнений итерационным методом с предобуславливателем трехдиагонального вида при задании параметров декомпозиции расчетной области таким образом, чтобы размер пакета не достигал объема, при котором наблюдался кратный рост времени передачи данных между вычислительными узлами. Для разделения вычислительных потоков внутри узлов и потоков, ориентированных на транспорт данных между узлами, и более эффективного их использования разработан алгоритм, ориентированный на использование гибридной технологии OpenMP + MPI. Получены теоретические и практические оценки ускорения разработанных алгоритмов с учетом времени латентности вычислительной системы. Наибольшее ускорение вычислений, равное 159,81, достигнуто при использовании гибридной технологии OpenMP + MPI.

4.1. Расчет времени латентности вычислительной системы

Для теоретической оценки работы вычислительных систем используют следующие параметры: t_a — время выполнения одной арифметической операции, t_l — время организации переда-

чи данных (латентность), t_x — время передачи одного данного. Данные параметры различаются для разных вычислительных систем и для различных программных реализаций технологии MPI и могут быть получены экспериментально. Их учет необходим для оптимальной настройки параметров алгоритмов решения сеточных уравнений на этапе выполнения декомпозиции расчетной области.

На рис. 3 приведен график зависимости времени передачи от объема данных (N) и количества вычислительных узлов (p), построенный по данным вычислительного эксперимента на вычислительном кластере К-60 ИПМ РАН им. Келдыша. На графике видно, что функция зависимости времени передачи имеет скачок при объемах передаваемых данных, равных примерно 512 числам с плавающей точкой. Обозначим данное значение: $N_{\max} = 512$. В алгоритмах решения сеточных уравнений будем ориентироваться на полученное значение и выполнять декомпозицию расчетной области таким образом, чтобы не превышать это значение.

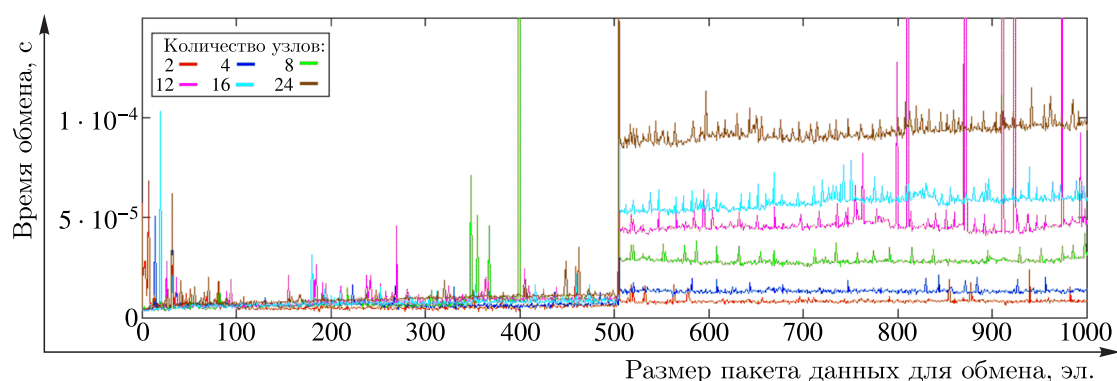


Рис. 3. Зависимость времени передачи данных от объема данных при работе с разным числом вычислительных узлов

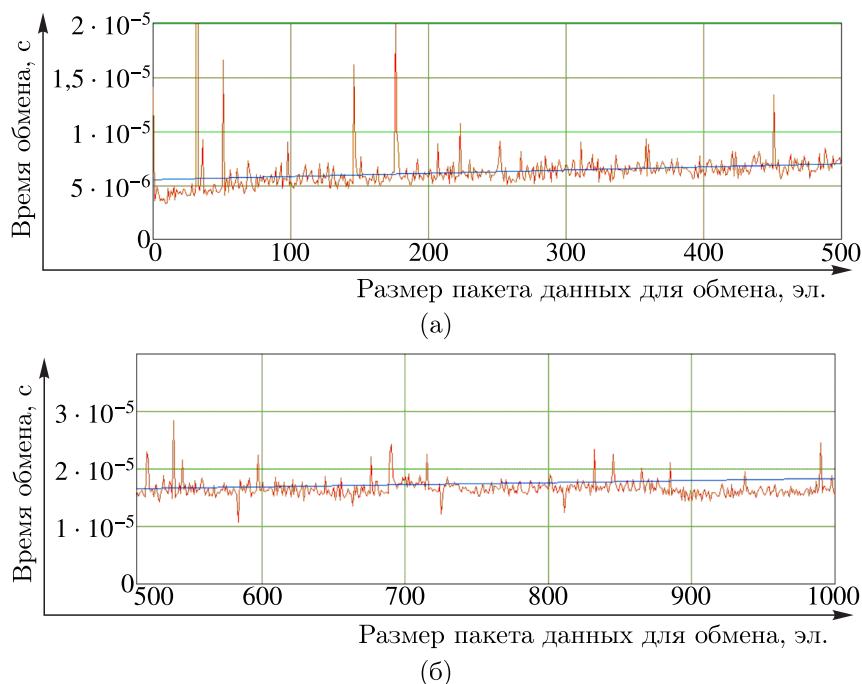


Рис. 4. Зависимость времени передачи данных от объема: а) объем данных до 512 элементов; б) объем данных более 512 элементов

Экспериментальные данные были обработаны методом наименьших квадратов (рис. 4), в результате получены линейные зависимости, описывающие время латентности и время передачи данных. Для времени латентности имеет место формула

$$t_l(p, N) = \begin{cases} 5,21 \cdot 10^{-6} + 1,53 \cdot 10^{-7}(p - 2), & \text{если } N \leq N_{\max}, \\ 6,733 \cdot 10^{-6}(p - 2), & \text{если } N > N_{\max}. \end{cases} \quad (18)$$

Время передачи одного данного составило $t_x = 3,3 \cdot 10^{-9}$ с.

Из рис. 4 видно, что при объеме данных в пакете, не превышающем 512 значений с плавающей точкой, латентность находится в диапазоне от $5 \cdot 10^{-6}$ до $6 \cdot 10^{-6}$ с. При объеме передаваемых данных свыше 512 элементов наблюдаются резкий рост латентности до $16 \cdot 10^{-5}$ с и дальнейший монотонный рост до $18 \cdot 10^{-5}$ с при размере пакета, равном 1000 элементов.

Полученные зависимости используются для предварительной оценки времени решения сеточных уравнений итерационным методом с предобуславливателем трехдиагонального вида в разработанном алгоритме и позволяют оптимизировать процесс вычислений минимизацией доли затрат времени на транспорт данных.

4.2. Алгоритм решения сеточных уравнений итерационным методом с предобуславливателем трехдиагонального вида

Рассмотрим построение параллельных алгоритмов итерационного метода с предобуславливателем трехдиагонального вида, примененного для расчета трехмерных стационарных задач. Требуется решить систему линейных алгебраических уравнений: $Au = f$, где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ — матрица, имеющая обратную матрицу; $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ — векторы-столбцы неизвестных и правых частей соответственно.

Для представления значения поля $u(x, y, z)$ в векторной форме тройке индексов (i, j, k) можно поставить в соответствие значение s , описывающее порядковый номер элемента вектора u : $s = i + jN_x + kN_xN_y$, $0 \leq s \leq n - 1$, $n = N_xN_yN_z$ — длина вектора $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})^T$. Данное представление удобно использовать при описании и исследовании алгоритмов решения сеточных уравнений итерационными методами.

1. В узлах расчетной сетки вычисляются значения поля $u(x, y, z)$: $u_{i,j,k}$ при $i \in \overline{1, N_x - 2}$, $j \in \overline{1, N_y - 2}$, $k \in \overline{1, N_z - 2}$, при этом по периметру ($i \in \{0, N_x - 1\}$, $j \in \{0, N_y - 1\}$, $k \in \{0, N_z - 1\}$) находятся фиктивные узлы. Выполним декомпозицию расчетной области вдоль пространственного направления Ox плоскостями, параллельными осям Oy и Oz , при этом обозначим через w^m подобласть с номером m , $0 \leq m \leq p - 1$, где p — количество подобластей, на которые разбита исходная область. Расчетными узлами области w^m являются элементы $u_{i,j,k}^m$ при $i \in \overline{1, n_x^m - 2}$, $j \in \overline{1, N_y - 2}$, $k \in \overline{1, N_z - 2}$. Разбиение исходной области выполнено таким образом, чтобы смежные области w^m и w^{m+1} пересекались в двух узлах вдоль направления, перпендикулярного линиям разбиения, и имели место равенства $u_{n_x^m - 2, j, k}^m = u_{0, j, k}^{m+1}$, $u_{n_x^m - 1, j, k}^m = u_{1, j, k}^{m+1}$. На рис. 5 представлена схема декомпозиции расчетной области.

Для фрагментов w^m , полученных в результате декомпозиции расчетной области по одному пространственному направлению, необходимо знать два параметра: начальный индекс $j = \overline{n_x^m}$ в исходной расчетной области и ширину фрагмента n_x^m . Номер индекса, с которого начинается соответствующий фрагмент расчетной области, можно рассчитать по формуле

$$\overline{n_x^m} = \left\lfloor \frac{m \cdot (N_x - 2)}{p} \right\rfloor,$$

где $\lfloor x \rfloor$ — функция «пол», определяется как наибольшее целое, меньшее или равное x ; $\lceil x \rceil$ — функция «потолок», определяется как наименьшее целое, большее или равное x .

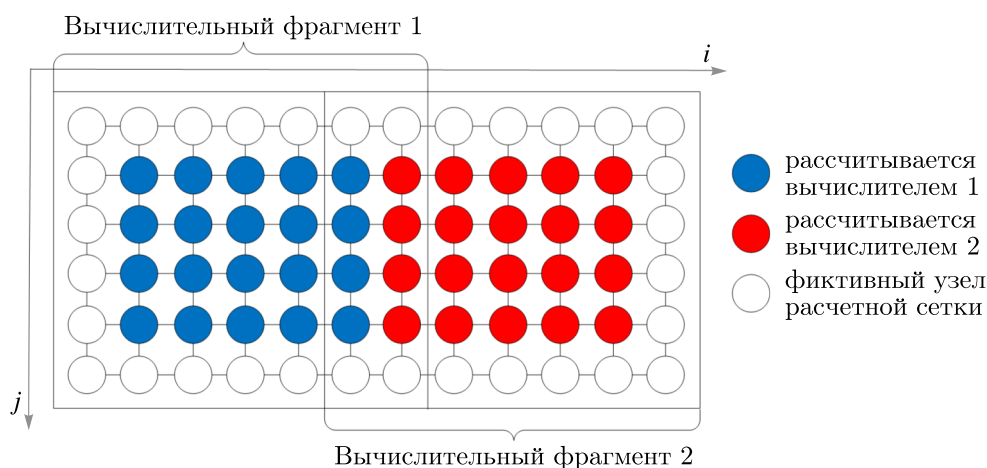


Рис. 5. Декомпозиция расчетной области

Ширина подобласти w^m вдоль оси Oy рассчитывается по формуле

$$n_x^m = \left\lfloor \frac{(m+1) \cdot (N_x - 2)}{p} \right\rfloor - \bar{n}_x^m + 2.$$

Опишем параллельный алгоритм решения сеточных уравнений итерационным методом с предобуславливателем трехдиагонального вида.

2. В процессе выполнения программы происходит вызов функций, которые возвращают два значения: p — количество процессов внутри коммуникатора, m — номер текущего процессора в частной группе коммуникатора.

3. Инициализируются значения p_1 и p_2 (условно p_1 — количество процессоров вдоль направления оси Ox , p_2 — вдоль оси Oy соответственно).

4. Для расчета значений номеров процессоров вдоль каждого из направлений m_1 и m_2 используются формулы, которые позволяют оптимизировать параллельное выполнение программ: $m_1 = m \bmod p_1$, $m_1 = \left\lfloor \frac{m}{p_1} \right\rfloor$.

5. Проводится расчет значений номеров начальных элементов — N_{11} , N_{22} , а также рассчитываются размеры фрагмента расчетной области вдоль осей Ox и Oy — N_1 , N_2 соответственно:

$$N_{11} = \left\lfloor \frac{m_1(N_x - 2)}{p_1} \right\rfloor, \quad N_1 = \left\lfloor \frac{(m_1 + 1)(N_x - 2)}{p_1} \right\rfloor - N_{11} + 2,$$

$$N_{22} = \left\lfloor \frac{m_2(N_y - 2)}{p_2} \right\rfloor, \quad N_2 = \left\lfloor \frac{(m_2 + 1)(N_y - 2)}{p_2} \right\rfloor - N_{22} + 2.$$

6. В начале процесса выполнения программы происходит обнуление вспомогательных массивов.

7. Затем выполняется декомпозиция расчетной области, что позволяет разбить ее на более мелкие части и распределить их между процессорами для параллельного выполнения.

8. Далее происходит расчет элементов массива.

9. Начинается цикл по итерациям, в котором происходит расчет вектора невязки при помощи технологии OpenMP из уравнения $r^n = Ax^n - f$.

10. Расчет вектора поправки w^n выполняется при помощи технологии OpenMP методом прогонки из уравнения: $A_{i,j,k} w_{i,j,k}^n - B_{5,i,j,k} w_{i,j,k+1}^n - B_{6,i,j,k} w_{i,j,k-1}^n = r_{i,j,k}^n$.

11. На данном этапе алгоритма происходит обмен данных вдоль направления Ox .

11.1. Передача/прием данных в сторону уменьшения номера процессора, схема обмена представлена на рис. 6:

- если значение переменной m_1 больше нуля, то происходит передача данных (элементы с индексом $i = 1$) процессору с номером $p - 1$;
- если значение переменной m_1 меньше $(p_1 - 1)$, то происходит прием данных (все элементы с индексом $i = N_1 - 1$) от процессора с номером $p + 1$.

11.2. Передача/прием данных в сторону возрастания номера процессора:

- если $m_1 < (p_1 - 1)$, передача данных (передаются элементы с индексом $i = N_1 - 2$) процессору с номером $p + 1$;
- если $m_1 > 0$, прием данных (принимаются все элементы с индексом $i = 0$) от процессора с номером $p - 1$.

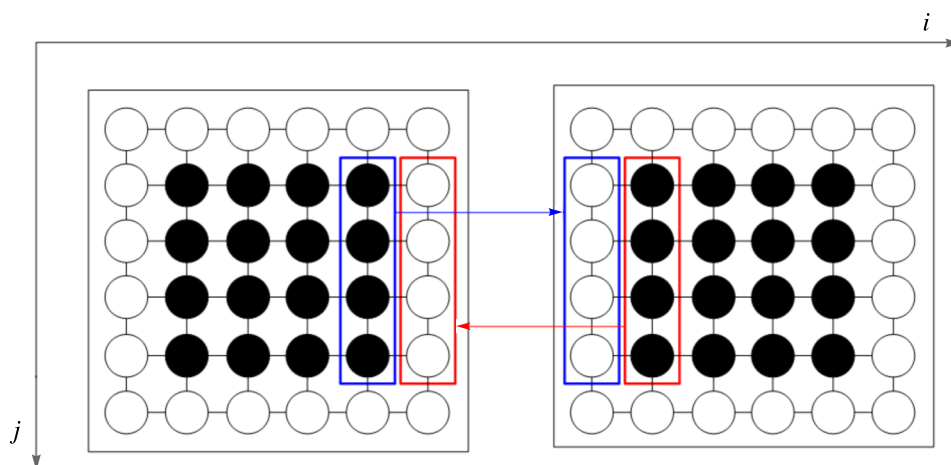


Рис. 6. Схема обменов

12. На данном этапе алгоритма происходит обмен данных вдоль направления Oy (аналогично обмену в п. 11).

12.1. Передача/прием данных в сторону уменьшения номера процессора:

- если значение переменной m_2 больше нуля, то происходит передача данных (элементы с индексом $j = 1$) процессору с номером $p - p_1$;
- если значение переменной m_2 меньше $(p_2 - 1)$, то происходит прием данных (все элементы с индексом $j = N_2 - 1$) от процессора с номером $p + p_1$.

12.2. Передача/прием данных в сторону возрастания номера процессора:

- если значение переменной m_2 меньше $(p_2 - 1)$, то происходит передача данных (элементы с индексом $j = N_2 - 2$) процессору с номером $p + p_1$;
- если значение переменной m_2 больше нуля, то происходит прием данных (все элементы с индексом $j = 0$) от процессора с номером $p - p_1$.

13. Расчет итерационного параметра τ_n (выполняется при помощи технологии OpenMP):

$$\tau_n = \frac{(r^n, w^n)}{(Aw^n, w^n)}.$$

14. Переход на следующую итерацию (выполняется при помощи технологии OpenMP):

$$x^{n+1} = x^n - \tau_n w^n.$$

15. Конец цикла по итерациям.

16. Возращение значений решения.

4.3. Оценка ускорения параллельной работы алгоритма решения сеточных уравнений итерационным методом с предобуславливателем трехдиагонального вида

Для расчета вектора невязки $r^n = f - Au^n$, где n — номер итерации, требуется найти значения $(N_x - 2)(N_y - 2)(N_z - 2)$ элементов вектора u на следующем временном слое. При параллельной организации расчетов каждый вычислитель обработает $(N_x^r - 2)(N_y - 2)(N_z - 2)$ элементов вектора u . Для расчета каждого элемента вектора невязки требуется выполнить 14 арифметических операций. Расчет вектора поправки требует выполнения 8 операций, итерационного параметра — 17. При переходе на следующую итерацию выполняется еще две арифметические операции. Суммарно на каждой итерации для всех элементов выполняется 41 арифметическая операция.

Временные траты на одну итерацию в случае последовательного варианта алгоритма можем оценить по формуле

$$t_1 = 41t_a(N_x - 2)(N_y - 2)(N_z - 2). \quad (19)$$

При расчете параллельным алгоритмом на многопроцессорной вычислительной системе время расчета составит

$$t_p = 41t_a \max_r (n_x^m - 2)(N_y - 2)(N_z - 2) + 2t_l(p, (N_y - 2)(N_z - 2)) + 2(N_y - 2)(N_z - 2)t_x, \\ \left\lfloor \frac{N_x - 2}{p} \right\rfloor \leq \max_r (n_x^m - 2) \leq \left\lceil \frac{N_x - 2}{p} \right\rceil, \quad \max_r (n_x^m - 2) \approx \frac{N_x - 2}{p}.$$

Тогда

$$t_p = 41t_a \frac{(N_x - 2)(N_y - 2)(N_z - 2)}{p} + 2t_l(p, (N_y - 2)(N_z - 2)) + 2(N_y - 2)(N_z - 2)t_x. \quad (20)$$

Время работы параллельного варианта алгоритма решения сеточных уравнений итерационным методом с предобуславливателем трехдиагонального вида равно

$$A = \frac{41t_a(N_x - 2)(N_y - 2)(N_z - 2)}{41t_a \frac{(N_x - 2)(N_y - 2)(N_z - 2)}{p} + 2t_l(p, (N_y - 2)(N_z - 2)) + 2(N_y - 2)(N_z - 2)t_x}. \quad (21)$$

В случае если объем передаваемых данных больше $N_x - 2 > N_{\max}$, то выполняется $k = \left\lceil \frac{N_x - 2}{N_{\max}} \right\rceil$ обменов. Тогда время работы параллельного алгоритма равно

$$A = \frac{p}{1 + 2p \frac{kt_l(p, N_{\max}) + (N_y - 2)(N_z - 2)t_x}{41t_a(N_x - 2)(N_y - 2)(N_z - 2)}}. \quad (22)$$

Таблица 1. Результаты работы параллельных алгоритмов на основе технологии MPI и гибридной технологии MPI + OpenMP

p	p_1	p_2	MPI		MPI + OpenMP	
			Время	Ускорение	Время	Ускорение
1	1	1	73,08	1,00	24,19	3,02
2	2	1	43,69	1,67	11,67	6,26
3	3	1	24,57	2,97	2,72	26,88
4	2	2	15,16	4,82	1,93	37,92
	4	1	13,33	5,48	1,91	38,17
8	4	2	6,22	11,74	1,56	46,73
	8	1	6,25	11,70	1,53	47,75
16	4	4	3,068	23,91	0,59	123,98
	8	2	3,05	23,94	0,75	97,09
	16	1	3,43	21,32	1,06	68,75
24	6	4	2,52	29,04	0,41	176,12
	8	3	2,51	29,09	0,74	99,20
	12	2	1,55	47,20	0,50	146,15
	24	1	1,53	47,67	0,46	159,81

Проведены численные эксперименты, в которых для технологий MPI и MPI + OpenMP фиксировалось время работы параллельных алгоритмов и вычислялось ускорение для различных распределений p_1 и p_2 (таблица 1). Наибольшее ускорение было достигнуто при распределении $p_1 = 6$ и $p_2 = 4$ для алгоритма на основе гибридной технологии MPI + OpenMP и составило 176,12. Наибольшее ускорение для алгоритма на основе технологии MPI составило 47,67 при распределении $p_1 = 24$ и $p_2 = 1$.

Отношение наибольших величин ускорений для гибридной технологии MPI + OpenMP и технологии MPI составило 3,6. Это свидетельствует о более эффективном использовании подсистемы памяти вычислительного узла при применении гибридной технологии MPI + OpenMP. На рис. 7 приведены графики зависимостей ускорения от количества узлов. Имеет место резкий рост ускорения для гибридной технологии MPI + OpenMP при числе узлов, превышающем 8.

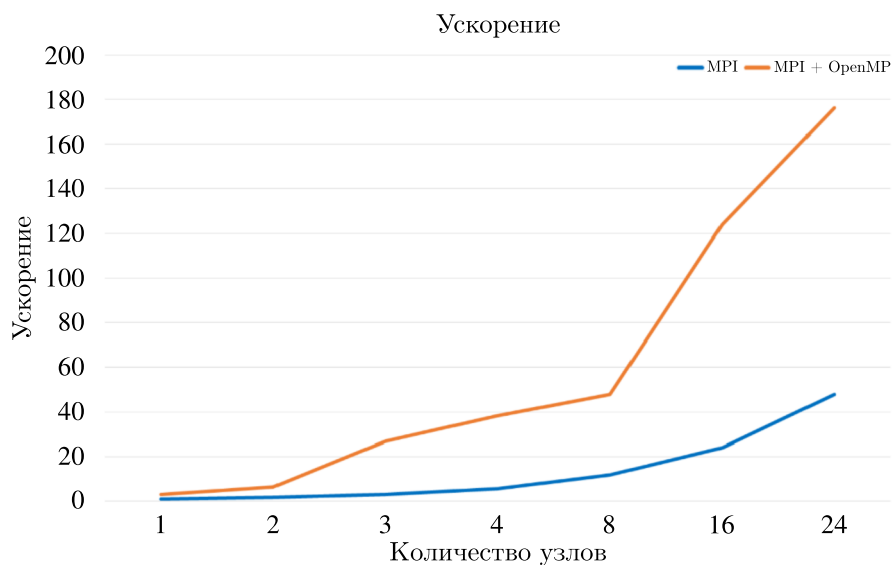


Рис. 7. Зависимость ускорения параллельных алгоритмов на основе технологий MPI и MPI + OpenMP от числа вычислителей

5. Результаты численных экспериментов

Для численного решения задачи гидродинамики мелководных водоемов (5)–(9) с расчетом давления по регуляризованному волновому уравнению вида (8) на основе предложенного параллельного алгоритма решения сеточных уравнений итерационным методом с предобуславливателем трехдиагонального вида разработан программный комплекс (ПК) на языке C++ с использованием гибридной технологии MPI + OpenMP. В нем использовалась именно гибридная технология, так как согласно проведенным вычислительным экспериментам для тестовых задач, описанных в § 4, параллельный алгоритм на ее основе был более эффективным, обладал более высоким ускорением. Данный ПК включает модель гидродинамики, в которой учитываются турбулентный обмен, стоки рек, сгонно-нагонные явления, ветровые течения и трение о дно, а также сложная геометрия дна и береговой линии. Разработанный ПК включает следующие блоки: расчет поля скорости на промежуточном временном слое без учета давления; расчет гидростатического давления, используемого в качестве начального приближения для гидродинамического давления; расчет гидродинамического давления на основе предложенного метода с предобуславливателем трехдиагонального вида; уточнение трехмерного поля скорости водного потока с учетом давления. В качестве входных параметров задаются размеры расчетной области, при этом глубина акватории задается в форме карты глубин, длительность временного интервала моделирования, размер шага по времени τ , размеры шагов по пространственным координатам h_x , h_y и h_z , погрешность решения сеточных уравнений, интенсивность испарения, начальные распределения компонент вектора скорости движения водной среды и давления. Для достижения оптимальной параметризации модели был разработан и протестирован ряд алгоритмов, включая фильтрацию на основе фильтра Калмана, который помог устранить шумы в экспедиционных измерениях вектора скорости водного потока (рис. 10). Численные эксперименты проводились на гибридном вычислительном кластере К-60 ИПМ РАН им. Келдыша.

5.1. Вычислительный эксперимент по моделированию гидродинамики Азовского моря

Разработанные модели и алгоритмы применялись для реконструкции экологической катастрофы, произошедшей в 2001 году в Азовском море, когда на площади более 1000 км² образовалась зона анаэробного (сероводородного) заражения, сопровождаемая массовой гибелью ихтиофауны. Размеры расчетной области соответствовали физическим размерам Азовского моря: длина — 355 км, ширина — 233 км, пространственный шаг — 1000 м в горизонтальном направлении. Интервал времени принят равным 30 сут. Результаты численного моделирования движения водной среды представлены на рис. 8. Стрелочками показаны проекции векторов скорости водного потока на плоскость xOy , усредненные по глубине. Цветовая палитра отражает интегральную характеристику $U = \int_{\eta}^H u dz$, которую удобно использовать для изучения полей течений в Азовском море, имеющем отдельные глубоководные участки, в которых поток водной среды направлен против ветра. В восточной части моря наблюдается область с вихревой структурой течения, называемая природной ловушкой, в которой может накапливаться значительное количество органических остатков, ранее перемещавшихся по водотоку.

В качестве входных данных использовались постоянно пополняемые базы экологических данных по Азовскому морю, полученные в ходе многолетних экспедиционных исследований, регулярно проводимых при участии авторского коллектива. Были проведены комплексные экспедиционные измерения параметров водной среды в Азовском море и Таганрогском заливе с целью обновления базы данных многолетних исследований о состоянии водной среды с помощью

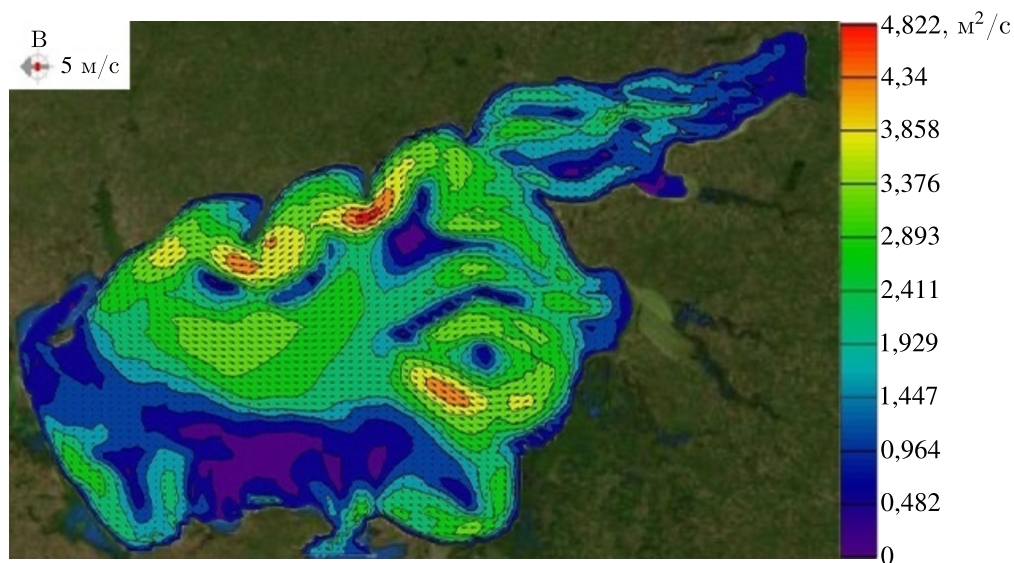
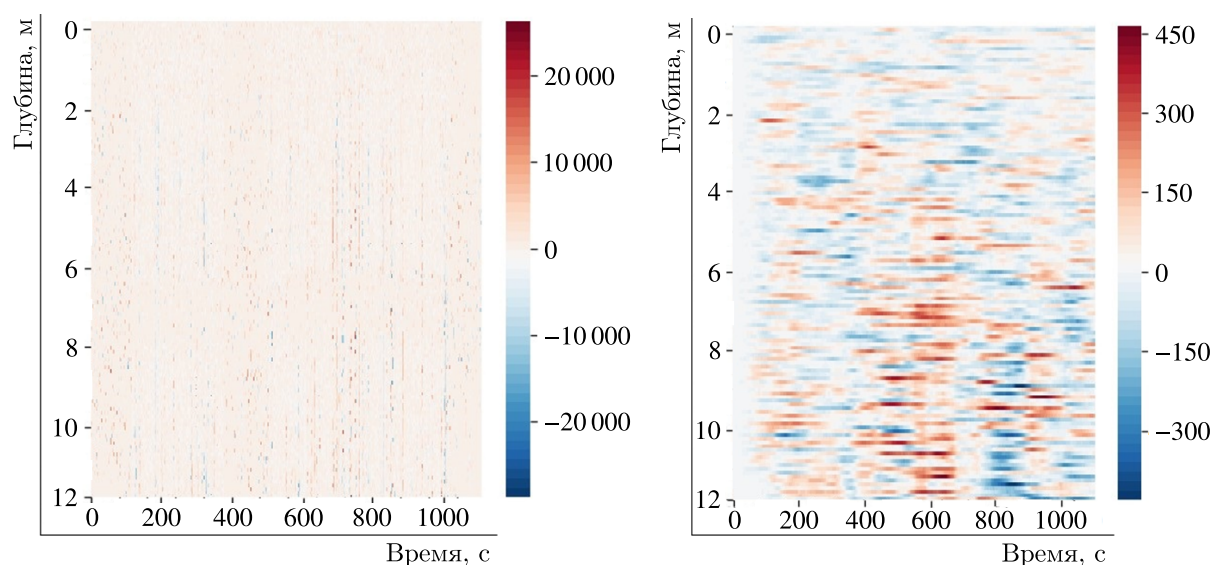


Рис. 8. Результаты математического моделирования движения водной среды (водные потоки)

профилографа ADCP, принцип действия которого основан на применении доплеровского эффекта: передача акустического сигнала на постоянной частоте и прием отраженного сигнала от неоднородностей водной среды под излучателем (начиная с зоны чувствительности) в толще водного столба. Количество элементов разрешения по глубине составляло 128, шаг измерения по глубине — 10 см, период измерений — 1 секунда, количество измерений на каждой станции варьировалось от 200 до 1000. Измерения проводились вертикально, начиная от ближней зоны чувствительности зонда до дна. Исследовано влияние изменения коэффициента вертикального турбулентного обмена на содержание растворенного кислорода в придонном слое мелководного водоема. На глубине примерно 3 метра и ниже значения коэффициента вертикального турбулентного обмена приближались к нулю, что указывает на уменьшенный вертикальный турбулентный обмен в данной зоне и объясняет явление гипоксии в придонном слое центрально-восточной части Азовского моря в летний период. Полученные с профилографа данные о скоростях потоков водной среды подвергались фильтрации с целью удаления шумов. Данная задача решалась с применением разработанного программного комплекса, включающего программный блок с фильтром Калмана, что позволило значительно снизить разброс данных и амплитуду колебаний. Фильтрация входных данных позволила более точно оценить полученную в ходе натурных экспериментов информацию. Рисунок 9 демонстрирует пример работы программного обеспечения, предназначенного для устранения зашумленности в двумерном случае. Цветом выделена скорость водного потока в мм/сек в соответствии с приведенной на рис. 9 шкалой. На рис. 9, а представлены данные без обработки, на рис. 9, б представлены данные после обработки двух-этапным фильтром Калмана.

На рис. 10 представлены профили горизонтальных компонентов скорости водного потока (сплошная линия — результаты численных экспериментов, точки — результаты натурных измерений). Верификация используемой модели базировалась на данных, полученных в ходе экспедиционных исследований, проводимых на Азовском море авторским коллективом [Сушинов и др., 2022].

Изучалось влияние внешних (абиотических) факторов, включая пространственное распределение солености, температуры, на гидродинамические процессы Азовского моря, представляющего собой водоем эстуарного типа, поэтому для него характерен большой перепад уровня солености при переходе от пресных речных вод к соленым морским. В течение года измене-



(а) Исходные данные с погрешностью измерительного прибора

(б) Данные, полученные после применения алгоритма фильтрации

Рис. 9. Применение фильтра Калмана для устранения зашумленности данных о пульсациях скорости движения водного потока в Азовском море

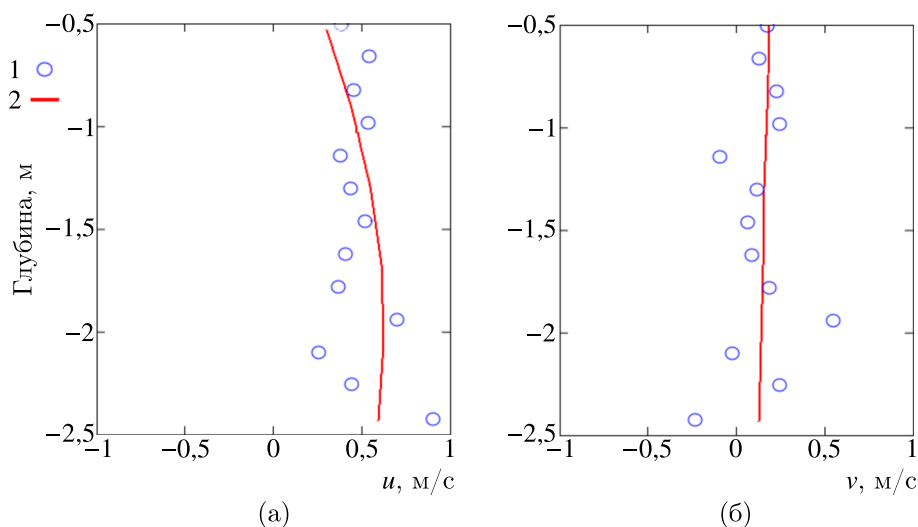


Рис. 10. Профили горизонтальной компоненты вектора скорости [м/с]: а) составляющая вектора скорости водного потока, направленная с запада на восток (u); б) составляющая вектора скорости водного потока, направленная с севера на юг (v). 1 — данные полученные с ADCP; 2 — расчетные данные

ния средней солености моря без Таганрогского залива достигают 1‰. Зачастую средние по месяцам значения солености и температуры представлены на картах в отдельных точках или изолиниями поля (изогалинами и изотермами). Использование таких данных нежелательно из-за возникновения погрешности вычислений. Возникает задача получения более гладких функций для приближения функциональных зависимостей, описывающих поля солености и температуры, что позволяет повысить точность гидродинамических расчетов. Интерполяция полей солености

и температуры выполнялась на основе сплайнов, построенных с помощью функций

$$H_1(x) = 1, \quad H_2(x) = x, \quad H_3(x) = \operatorname{ch}(kx), \quad H_4(x) = \operatorname{sh}(kx), \quad k = \frac{\sqrt{12}}{h}.$$

Метод основан на решении уравнения Лапласа с использованием схем повышенного порядка точности, учитывающих частичную заполненность расчетных ячеек области:

$$\Delta H - \frac{h^2}{12} \Delta^2 H = 0,$$

где H — соленость (температура) водоема, Δ — оператор Лапласа, h — среднее расстояние между заданными значениями функции. Преимуществами метода являются достаточная гладкость в точках склейки функций и меньшие выбросы (отклонения от линейной функции) по сравнению с кубическим сплайном, часто используемым при решении подобных задач.

На рис. 11 представлены восстановленные на основе картографической информации поля солености и температуры воды для Азовского моря в летний период с использованием схем повышенного порядка аппроксимации [Сухинов, Белова, Чистяков, 2021].

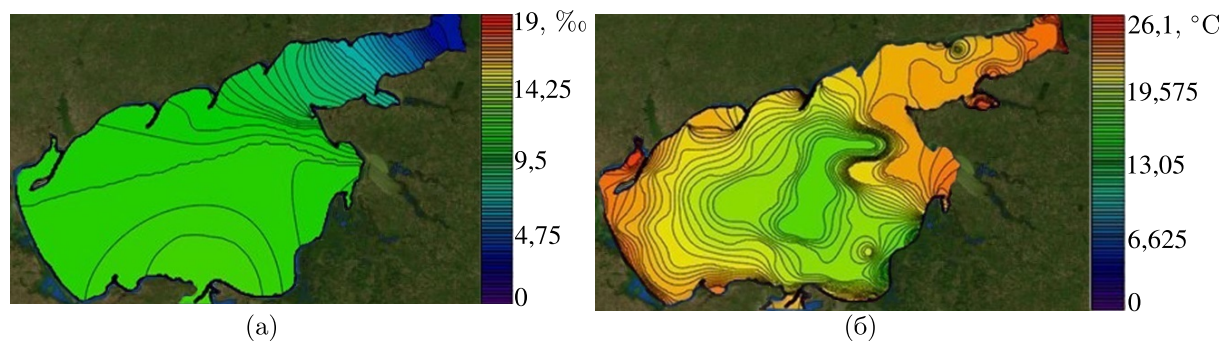


Рис. 11. Восстановленные распределения солености (а) и температуры (б) в Азовском море в летний период

Для проверки адекватности математической модели использовался критерий Тейла. Относительное отклонение расчетных функций и гидрофизических параметров, полученных в результате моделирования, от натурных измерений находилось в пределах от 15 до 20 %.

5.2. Вычислительный эксперимент по моделированию движения водной среды в устьевых районах

В качестве второй тестовой модельной задачи гидродинамики была решена задача движения водной среды в устьевых районах. Геометрия расчетной области задавалась в виде карты глубин, представленной на рис. 12.

Размеры расчетной области по различным пространственным направлениям Ox , Oy и Oz приняты равными 50 м, 50 м и 2 м соответственно. Уровень возвышения над поверхностью моря принят равным 2 м. Параметры сетки задавались следующим образом: размеры шагов по горизонтальным координатам — 0,5 м, по вертикали — 0,1 м, шаг по времени составил 0,25 с. Скорость водного потока в русле реки принята равной 0,2 м/с. Скорость набегающего потока с моря задана равной 0,4 м/с.

На рис. 13, 14 приведены результаты расчета трехмерного поля скорости водной среды в различные моменты времени. На рис. 13 представлены результаты моделирования в сечении расчетной области плоскостью xOy (при $z = 0$ м).

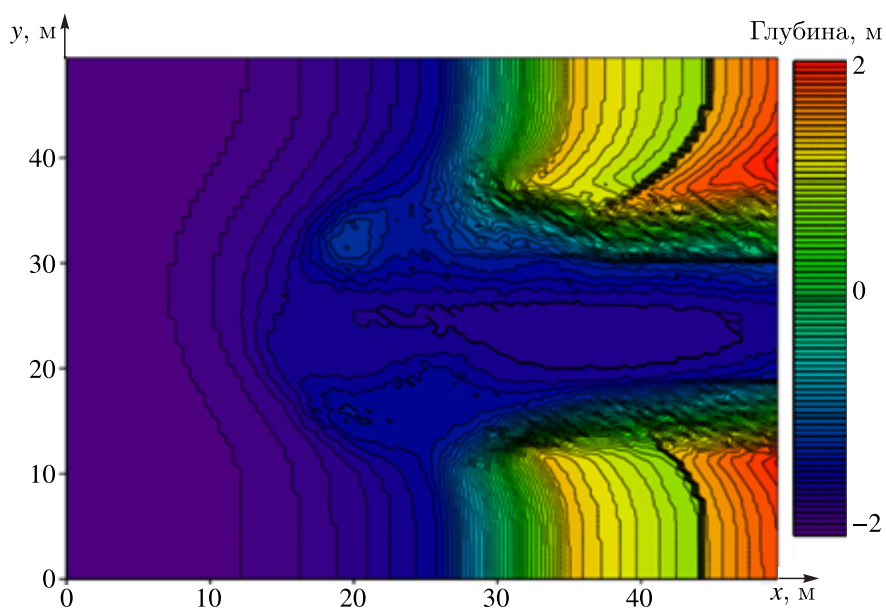
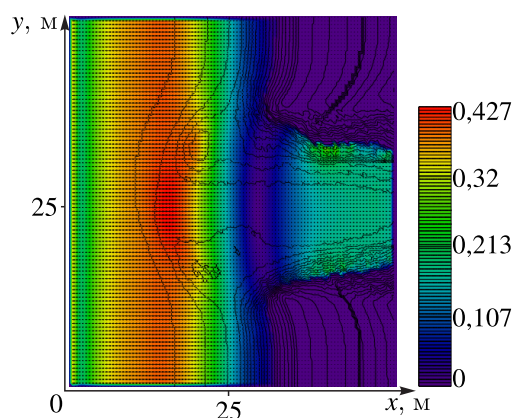
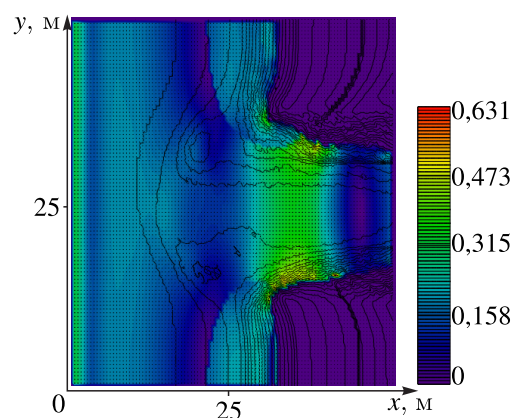


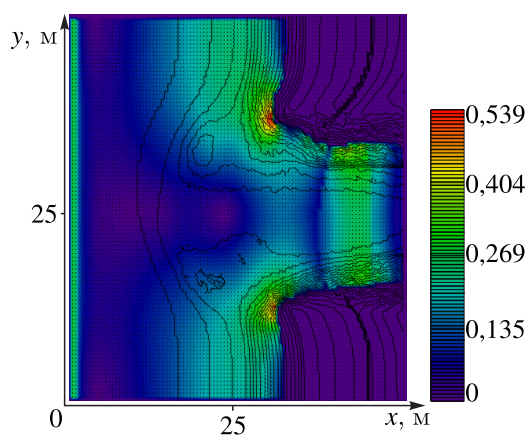
Рис. 12. Карта глубин расчетной области



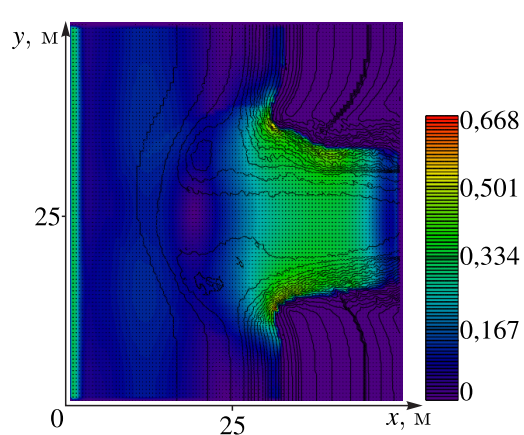
(а) Временной интервал моделирования — 5 с



(б) Временной интервал моделирования — 10 с



(в) Временной интервал моделирования — 15 с



(г) Временной интервал моделирования — 20 с

Рис. 13. Скорость течения водного потока на поверхности [м/с]

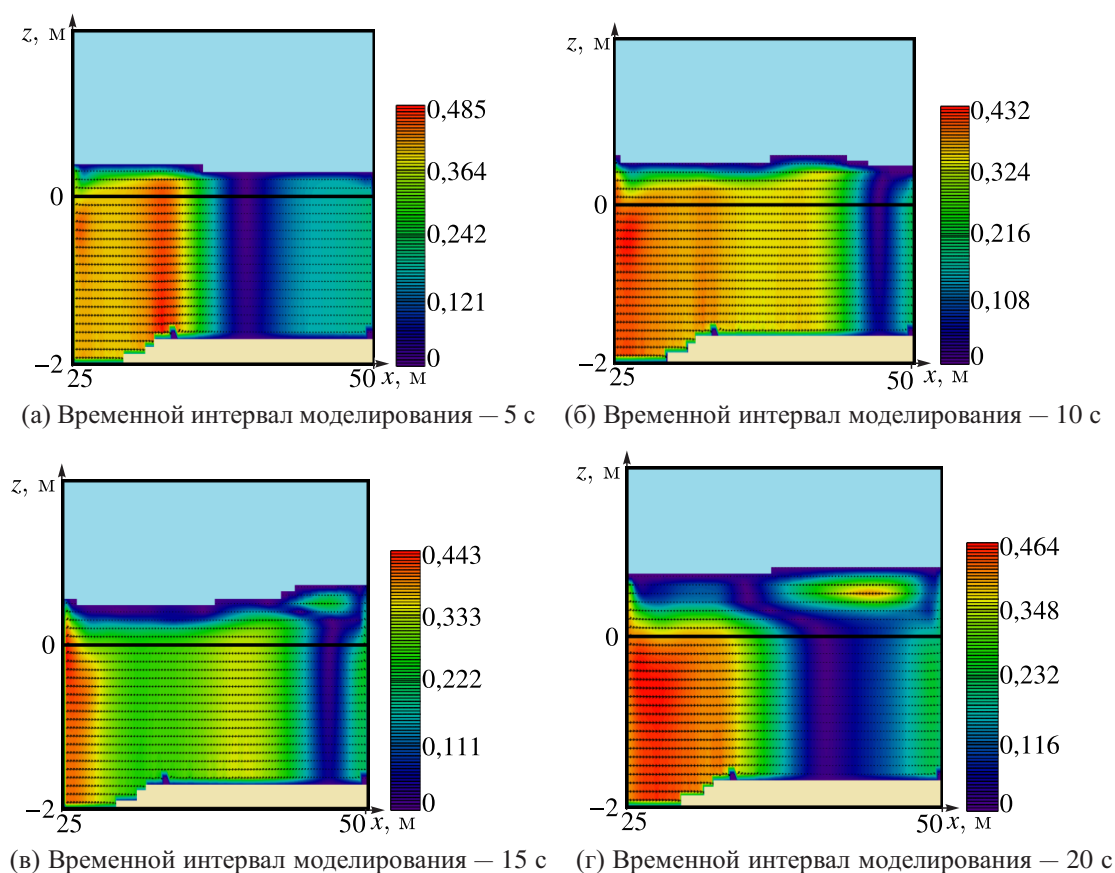


Рис. 14. Скорость течения водного потока на поверхности [м/с] по центру расчетной области

На рис. 14 представлены результаты моделирования в сечении плоскостью xOz при центральном разрезе расчетной области ($y = 25$ м), при этом нулевой уровень воды обозначен черной горизонтальной линией. На рис. 14 отчетливо заметны признаки подтопления в устьевой зоне из-за набегающих водных масс.

На рис. 15 визуализированы результаты расчета изменения уровня поднятия воды в устьевом районе в различные моменты времени. Отчетливо заметно движение водных масс с моря в сторону устьевых районов с подтоплением береговой линии.

Разработанный программный комплекс позволяет достичь более высокой точности при моделировании процессов смешения вод взаимосвязанных водоемов, а также при прогнозировании проникновения соленых вод в поймы рек.

6. Заключение

В работе представлена модель гидродинамики мелководных водоемов, разработанная авторским коллективом, позволяющая рассчитывать трехмерные поля вектора скорости движения водной среды. Аппроксимация задачи гидродинамики по временной переменной выполнена на основе схем расщепления по физическим процессам. Применение регуляризаторов по Б. Н. Четверушкину в уравнении неразрывности привело к изменению способа расчета поля давления, которое вычислялось на основе волнового уравнения. Описан метод решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида. Выполнены оценки минимального и максимального собственных чисел. На примере исследования зависимости значений равномерной нормы вектора невязки от количества итераций продемонстрировано ее монотонное снижение

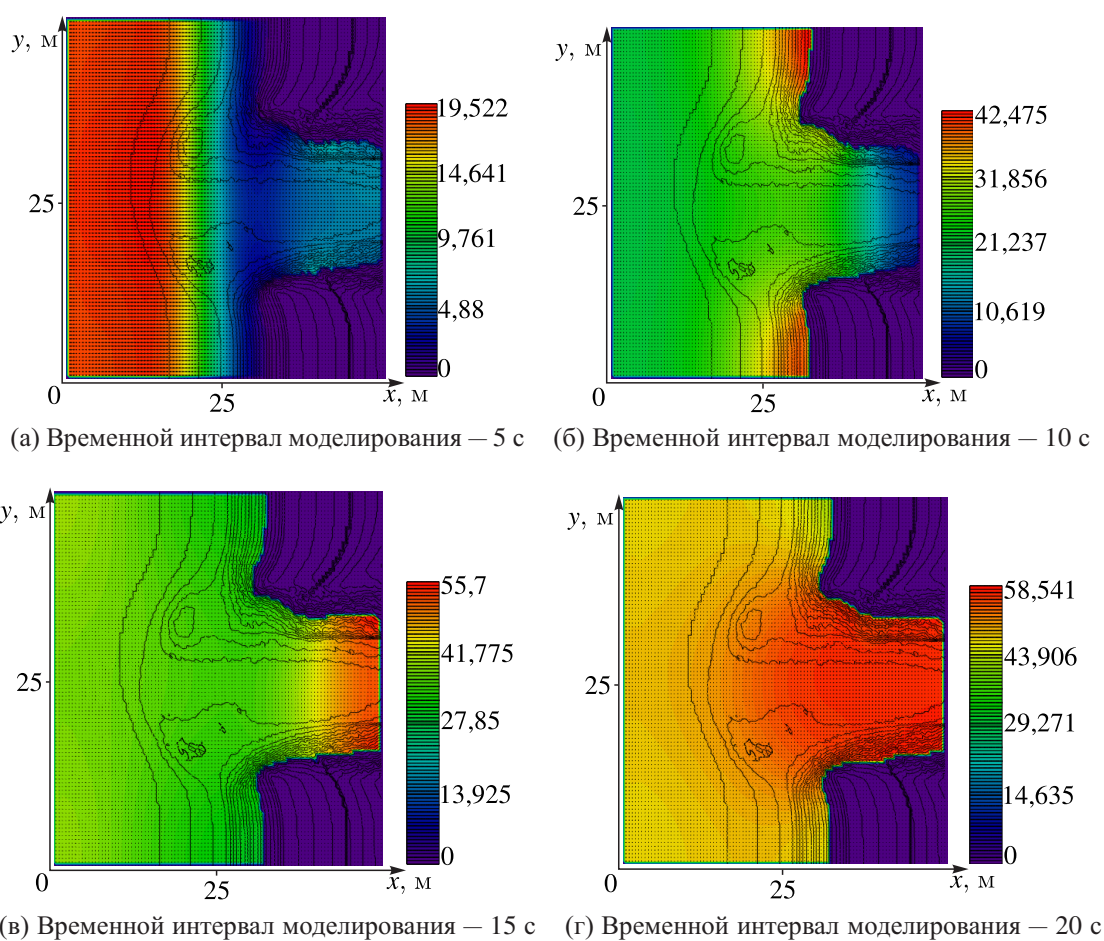


Рис. 15. Результаты моделирования динамики уровня подъема воды [см]

до величины 10^{-5} при количестве итераций, равном 900, что свидетельствует о преимуществе этого метода по сравнению с МПТМ. Оценка времени латентности многопроцессорной вычислительной системы показала резкое увеличение времени передачи данных при передаче 512 чисел с плавающей точкой. Время передачи одного числа с плавающей точкой составило $3,3 \cdot 10^{-9}$ с. Сравнение результатов работы параллельного алгоритма решения сеточных уравнений итерационным методом с предобуславливателем трехдиагонального вида на основе технологии MPI и гибридной технологии MPI + OpenMP показало преимущество гибридного подхода. MPI обеспечивает гибкость и независимость между процессами, но требует более сложной реализации и управления сообщениями. OpenMP позволяет легко распараллеливать код с использованием общей памяти, но не может быть использован на системах с распределенной памятью. Комбинация MPI + OpenMP сочетает в себе преимущества обоих подходов. Для 24 MPI-процессов достигнуто ускорение, равное 159,81. Проведенные численные эксперименты по моделированию задач гидродинамики показали относительное отклонение расчетных от натурных данных в пределах от 15 до 20 %.

Список литературы (References)

- Бештокова З. В. Разностный метод решения уравнения конвекции – диффузии с неклассическим граничным условием в многомерной области // Компьютерные исследования и моделирование. — 2022. — Т. 14, № 3. — С. 559–579. — DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-3-559-579

- Beshtokova Z. V.* Raznostnyj metod reshenija uravnenija konvekcii – diffuzii s neklassicheskim granichnym usloviem v mnogomernoj oblasti [A difference method for solving the convection – diffusion equation with a nonclassical boundary condition in a multidimensional domain] // *Computer Research and Modeling*. — 2022. — Vol. 14, No. 3. — P. 559–579 (in Russian).
- Брагин М. Д., Криксин Ю. А., Тишкин В. Ф.* Энтропийно устойчивый разрывный метод Галёркина для двумерных уравнений Эйлера // *Матем. моделирование*. — 2021. — Т. 33, № 2. — С. 125–140.
- Bragin M. D., Kriksin Yu. A., Tishkin V. F.* Jentropijno ustojchivyy razryvnyj metod Galerkina dlja dvumernyh uravnenij Jejlera [Entropy-stable discontinuous Galerkin method for two-dimensional Euler equations] // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2021. — Vol. 33, No 2. — P. 125–140 (in Russian).
- Волосухин В. А., Бандурин М. А.* Проблемные вопросы реализации мониторинга водопользования на юге России в условиях роста техногенных нагрузок и климатических изменений // *Вестник Донского государственного аграрного университета*. — 2017. — Т. 25, № 2-1. — С. 113–123.
- Volosuhin V. A., Bandurin M. A.* Problemnye voprosy realizacii monitoringa vodopol'zovanija na juge Rossii v uslovijah rosta tehnogennyh nagruzok i klimaticheskix izmenenij [Problematic issues of implementation of water use monitoring in the south of Russia in the conditions of growth of technogenic loads and climate changes] // *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*. — 2017. — Vol. 25, No. 2-1. — P. 113–123 (in Russian).
- Головизнин В. М., Горбачев Д. Ю., Афанасьев Н. А.* Балансно-характеристический метод для решения гиперболических систем уравнений на треугольных расчетных сетках // *Вычислительные методы и программирование*. — 2022. — Т. 23, № 4. — С. 365–378. — DOI: 10.26089/NumMet.v23r423
- Goloviznin V. M., Gorbachev D. Yu., Afanas'ev N. A.* Balansno-harakteristicheskij metod dlja reshenija giperbolicheskix sistem uravnenij na treugol'nyh raschetnyh setkah [Balance-characteristic method for solving hyperbolic systems of equations on triangular computational grids] // *Numerical Methods and Programming*. — 2022. — Vol. 23, No. 4. — P. 365–378 (in Russian). — DOI: 10.26089/NumMet.v23r423
- д'Асчензо Н., Савельев В. И., Четверушкин Б. Н.* Об одном алгоритме решения параболических и эллиптических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2015. — Т. 55, № 8. — С. 1320–1328.
- D'Aschenzo N., Savel'ev V. I., Chetverushkin B. N.* Ob odnom algoritme reshenija parabolicheskix i jellipticheskix uravnenij [On one algorithm for solving parabolic and elliptic equations] // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2015. — Vol. 55, No. 8. — P. 1320–1328 (in Russian).
- Жданова О. Л., Жданов В. С., Неверова Г. П.* Моделирование динамики планктонного сообщества с учетом токсичности фитопланктона // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2022. — Т. 14, № 6. — С. 1301–1323.
- Zhdanova O. L., Zhdanov V. S., Neverova G. P.* Modelirovanie dinamiki planktonnogo soobshhestva s uchetom toksichnosti fitoplanktona [Modeling the dynamics of the plankton community, taking into account the toxicity of phytoplankton] // *Computer Research and Modeling*. — 2022. — Vol. 14, No. 6. — P. 1301–1323 (in Russian).
- Милюкова О. Ю.* MPI + OpenMP реализация метода сопряженных градиентов с предобусловливателем IC(0) на основе использования переупорядочения узлов сетки // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — 2022. — № 63. — 32 с.
- Miljukova O. Yu.* MPI + OpenMP realizacija metoda sopryazhennyh gradientov s predobuslovlivatelem IC(0) na osnove ispol'zovanija pereuporjadochenija uzlov setki [MPI + OpenMP implementation of the conjugate gradient method with a preconditioner IC(0) based on the use of reordering of grid nodes] // *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha*. — 2022. — No. 63. — 32 p. (in Russian).
- Подопригора А. В., Чекина М. Д.* Решение разреженных СЛАУ большой и сверхбольшой размерности многосеточным методом на РВС // *Известия ЮФУ. Технические науки*. — 2018. — Т. 202, № 8. — С. 212–221. — DOI: 10.23683/2311-3103-2018-8-212-221
- Podoprigora A. V., Chekina M. D.* Reshenie razrezhennyh SLAU bol'shoj i sverhbol'shoj razmernosti mnogosetochnym metodom na RVS [Solution of sparse SLAEs of large and extra-large dimensions by the multigrid method on RCS] // *Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki*. — 2018. — Vol. 202, No. 8. — P. 212–221 (in Russian). — DOI 10.23683/2311-3103-2018-8-212-221
- Ревуцкая О. Л., Фрисман Е. Я.* Промысловое воздействие на динамику популяции с возрастной и половой структурой: оптимальный равновесный промысел и эффект гидры // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2022. — Т. 14, № 5. — С. 1107–1130.
- Revuckaja O. L., Frisman E. Ya.* Promyslovoe vozdejstvie na dinamiku populjacji s vozrastnoj i polovoj strukturoj: optimal'nyj ravnovesnyj promysel i jeffekt gidry [Fishing impact on population dynamics with age and sex structure: optimal equilibrium fishing and the hydra effect] // *Computer Research and Modeling*. — 2022. — Vol. 14, No. 5. — P. 1107–1130 (in Russian).

- Рыбак О. О., Рыбак Е. А.* Климатические изменения на юге России: тенденции и возможности прогноза // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. — 2015. — № 111. — С. 538–552.
- Rybak O. O., Rybak E. A.* Klimaticheskie izmenenija na juge Rossii: tendencii i vozmozhnosti prognoza [Climate change in the south of Russia: trends and forecast opportunities] // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. — 2015. — No. 111. — P. 538–552 (in Russian).
- Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 592 с.
- Samarskij A. A., Nikolaev E. S.* Metody reshenija setochnyh uravnenij [Methods for solving grid equations]. — Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
- Сапожников В. В., Аржанова Н. В., Лапина Н. М.* Комплексные экологические исследования Керченского пролива и Таманского залива после катастрофы танкера с мазутом (2007–2010 гг.) // Труды ВНИРО. — 2013. — Т. 150. — С. 65–77.
- Sapozhnikov V. V., Arzhanova N. V., Lapina N. M.* Kompleksnye jekologicheskie issledovaniya Kerchenskogo proliva i Tamanskogo zaliva posle katastrofy tankera s mazutom (2007–2010 gg.) [Comprehensive environmental studies of the Kerch Strait and Taman Bay after the accident of a tanker with fuel oil (2007–2010)] // Trudy VNIRO. — 2013. — Vol. 150. — P. 65–77 (in Russian).
- Сухинов А. И., Белова Ю. В., Чистяков А. Е.* Моделирование биогеохимических циклов в прибрежных системах Юга России // Матем. моделирование. — 2021. — Т. 33, № 3. — С. 20–38.
- Sukhinov A. I., Belova Yu. V., Chistyakov A. E.* Mathematical modeling of biogeochemical cycles in coastal systems of the South of Russia // Math. Models Comput. Simul. — 2021 — Vol. 13, No. 6. — P. 930–942.
- Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В.* Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Матем. моделирование. — 2011. — Т. 23, № 3. — С. 3–21.
- Suhinov A. I., Chistjakov A. E., Alekseenko E. V.* Chislennaja realizacija trehmernoj modeli gidrodinamiki dlja melkovodnyh vodoemov na supervychislitel'noj sisteme [Numerical implementation of a three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water bodies on a supercomputer system] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2011. — Vol. 23, No. 3. — P. 3–21 (in Russian).
- Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Кузнецова И. Ю., Атаян А. М., Никитина А. В.* Регуляризованная разностная схема для решения задач гидродинамики // Матем. моделирование. — 2022. — Т. 34, № 2. — С. 85–100.
- Suhinov A. I., Chistjakov A. E., Kuznecova I. Yu., Atajan A. M., Nikitina A. V.* Reguljarizovannaja raznostnaja shema dlja reshenija zadach gidrodinamiki [Regularized difference scheme for solving hydrodynamic problems] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2022. — Vol. 34, No. 2. — P. 85–100 (in Russian).
- Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Никитина А. В., Атаян А. М., Литвинов В. Н.* Метод решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях // Математическое моделирование. — 2023a. — Т. 35, № 3. — С. 35–58. — DOI: 10.20948/mm-2023-03-03
- Suhinov A. I., Chistjakov A. E., Nikitina A. V., Atajan A. M., Litvinov V. N.* Metod reshenija setochnyh uravnenij dlja zadach gidrodinamiki v ploskih oblastjah [A method for solving grid equations for hydrodynamic problems in flat domains] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2023a. — Vol. 35, No. 3. — P. 35–58 (in Russian). — DOI 10.20948/mm-2023-03-03
- Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Никитина А. В., Атаян А. М., Литвинов В. Н., Поркишеян М. В.* Построение параллельных алгоритмов для моделирования гидродинамических процессов в Азовском море на основе гибридной технологии MPI + OpenMP // Вычислительная механика сплошных сред. — 2023b. — Т. 16, № 1. — С. 17–35. — DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.2
- Suhinov A. I., Chistjakov A. E., Nikitina A. V., Atajan A. M., Litvinov V. N., Porksheyen M. V.* Postroenie parallel'nyh algoritmov dlja modelirovaniya gidrodinamicheskikh processov v Azovskom more na osnove gibridnoj tehnologii MPI + OpenMP [Construction of parallel algorithms for modeling hydrodynamic processes in the Azov Sea based on hybrid MPI + OpenMP technology] // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2023b. — Vol. 16, No. 1. — P. 17–35 (in Russian). — DOI 10.7242/1999-6691/2023.16.1.2
- Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А., Сидорякина В. В., Проценко С. В.* Метод учета заполнения ячеек для решения задач гидродинамики со сложной геометрией расчетной области // Матем. моделирование. — 2019. — Т. 31, № 8. — С. 79–100.
- Suhinov A. I., Chistjakov A. E., Procenko E. A., Sidorjakina V. V., Procenko S. V.* Metod ucheta zapolnennosti jacheek dlja reshenija zadach gidrodinamiki so slozhnoj geometriej raschetnoj oblasti [A method for taking into account the occupancy of cells for solving problems of hydrodynamics with a complex geometry of the computational domain] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2019. — Vol. 31, No. 8. — P. 79–100 (in Russian).

- Четверушкин Б. Н.* Кинетические модели для решения задач механики сплошной среды на суперкомпьютерах // Матем. моделирование. — 2015. — Т. 27, № 5. — С. 65–79.
Chetverushkin B. N. Kineticheskie modeli dlja reshenija zadach mehaniki sploshnoj sredy na superkomp'yuterah [Kinetic models for solving problems of continuum mechanics on supercomputers] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2015. — Vol. 27, No. 5. — P. 65–79 (in Russian).
- Четверушкин Б. Н., Знаменская И. А., Луцкий А. Е., Ханхасаева Я. В.* Численное моделирование взаимодействия и эволюции разрывов в канале на основе компактной формы квазигазодинамических уравнений // Матем. моделирование. — 2020. — Т. 32, № 4. — С. 44–58.
Chetverushkin B. N., Znamenskaja I. A., Luckij A. E., Hanhasaeva Ya. V. Chislennoe modelirovanie vzaimodejstviya i jevoljucii razryvov v kanale na osnove kompaktnoj formy kvazigazodinamicheskikh uravnenij [Numerical modeling of the interaction and evolution of discontinuities in a channel based on the compact form of quasi-gasdynamic equations] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2020. — Vol. 32, No. 4. — P. 44–58 (in Russian).
- Четверушкин Б. Н., Якововский М. В.* Вычислительные алгоритмы и архитектура систем высокой производительности // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2018. — № 52. — 12 с.
Chetverushkin B. N., Jakobovskij M. V. Vychislitel'nye algoritmy i arhitektura sistem vysokoj proizvoditel'nosti [Computational algorithms and architecture of high performance systems] // Preprinty IPM im. M. V. Keldysha. — 2018. — No. 52. — 12 p. (in Russian).
- Якововский М. В., Григорьев С. К.* Алгоритм гарантированной генерации тетраэдральной сетки проекционным методом // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2018. — № 109. — 18 с.
Jakovovskij M. V., Grigor'ev S. K. Algoritm garantirovannoj generacii tetraedral'noj setki proekcionnym metodom [Algorithm for guaranteed generation of a tetrahedral mesh using the projection method] // Preprinty IPM im. M. V. Keldysha. — 2018. — No. 109. — 18 p.
- Янилкин Ю. В., Гужова А. Р., Дегтяренко Л. И., Колобянин В. Ю., Шмелев В. А.* Метод прямого численного моделирования турбулентности с учетом истории процесса // Матем. моделирование. — 2023. — Т. 35, № 7. — С. 41–62.
Janilkin Yu. V., Guzhova A. R., Degtjarenko L. I., Kolobjanin V. Yu., Shmelev V. A. Metod prjamogo chislennogo modelirovanija turbulentnosti s uchetom istorii processa [Method of direct numerical modeling of turbulence taking into account the history of the process] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2023. — Vol. 35, No. 7. — P. 41–62 (in Russian).
- Chetverushkin B. N., Jakobovskiy M. V., Kornilina M. A., Semenova A. V.* Numerical algorithms for HPC systems and fault tolerance // Communications in Computer and Information Science. — 2019. — Vol. 1063. — P. 34–44. — DOI: 10.1007/978-3-030-28163-2_3
- He X., Wang K., Feng Y., Lv L., Liu T.* An implementation of MPI and hybrid OpenMP/MPI parallelization strategies for an implicit 3D DDG solver // Computers & Fluids. — 2022. — Vol. 241, No. 4. — P. 105455. — DOI: 10.1016/j.compfluid.2022.105455
- Gade M., Byfield V., Ermakov S., Lavrova O., Mitnik L.* Slicks as indicators for marine processes // Oceanography (Washington D.C.). — 2013. — Vol. 26. — P. 138–149.
- Peng Q., Xie S., Huang R., Wang W., Zu T., Wan D.* Indonesian throughflow slowdown under global warming: remote AMOC effect versus regional surface forcing // Journal of Climate. — 2023. — Vol. 36, No. 5. — P. 1301–1318.
- Prandle D., Lane A.* Sensitivity of estuaries to sea level rise: Vulnerability indices // Estuarine, Coastal and Shelf Science. — 2015. — Vol. 160. — P. 60–68. — DOI: 10.1016/j.ecss.2015.04.001
- Woth K., Weisse R., Von Storch H.* Climate change and North Sea storm surge extremes: An ensemble study of storm surge extremes expected in a changed climate projected by four different Regional Climate Models // Ocean Dynamics. — 2006. — Vol. 56. — P. 3–15. — DOI: 10.1007/s10236-005-0024-3