

УДК: 532.5-1/-9

## Численное исследование турбулентного потока Тейлора – Куэтта

З. М. Маликов<sup>а</sup>, Ф. Х. Назаров<sup>б</sup>, М. Э. Мадалиев<sup>с</sup>

Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М. Т. Уразбаева,  
Узбекистан, 100125, г. Ташкент, Дурмон йули, д. 33

E-mail: <sup>а</sup> malikov.z62@mail.ru, <sup>б</sup> farruxnazar@mail.ru, <sup>с</sup> madaliev.me2019@mail.ru

*Получено 14.03.2023, после доработки – 19.10.2023.  
Принято к публикации 17.11.2023.*

В настоящей работе исследован турбулентный поток Тейлора–Куэтта с помощью двухмерного моделирования на базе осредненных уравнений Навье–Стокса (RANS) и нового двухжидкостного подхода к турбулентности при числах Рейнольдса в диапазоне от 1000 до 8000. Исследуется течение, обусловленное вращающимся внутренним и неподвижным внешним цилиндрами. Рассмотрен случай соотношения диаметров цилиндров 1:2. Известно, что возникающее круговое течение характеризуется анизотропной турбулентностью и математическое моделирование таких потоков является сложной задачей. Для описания таких потоков используются либо методы прямого моделирования, которые требуют больших вычислительных затрат, либо достаточно трудоемкие методы рейнольдсовых напряжений или же линейные RANS-модели со специальными поправками на вращение, которые способны описывать анизотропную турбулентность. В работе для сравнения различных подходов к моделированию турбулентности представлены численные результаты линейных RANS-моделей SARC, SST-RC, метода рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012, прямого моделирования турбулентности DNS, а также новой двухжидкостной модели. Показано, что недавно разработанная двухжидкостная модель адекватно описывает рассматриваемый поток. Помимо этого, двухжидкостная модель проста для численной реализации и имеет хорошую сходимость.

Ключевые слова: вращающийся поток, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, модель SSG/LRR-RSM-w2012, модель SARC, модель SST-RC, новая двухжидкостная модель

UDC: 532.5-1/-9

## Numerical study of Taylor – Couette turbulent flow

Z. M. Malikov<sup>a</sup>, F. Kh. Nazarov<sup>b</sup>, M. E. Madaliev<sup>c</sup>

Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M. T. Urazbaev,  
33 Durmon yuli, Tashkent, 100125, Uzbekistan

E-mail: <sup>a</sup> malikov.z62@mail.ru, <sup>b</sup> farruxnazar@mail.ru, <sup>c</sup> madaliev.me2019@mail.ru

*Received 14.03.2023, after completion – 19.10.2023.*

*Accepted for publication 17.11.2023.*

In this paper, the turbulent Taylor–Couette flow is investigated using two-dimensional modeling based on the averaged Navier–Stokes (RANS) equations and a new two-fluid approach to turbulence at Reynolds numbers in the range from 1000 to 8000. The flow due to a rotating internal and stationary external cylinders. The case of ratio of cylinder diameters 1:2 is considered. It is known that the emerging circular flow is characterized by anisotropic turbulence and mathematical modeling of such flows is a difficult task. To describe such flows, either direct modeling methods are used, which require large computational costs, or rather laborious Reynolds stress methods, or linear RANS models with special corrections for rotation, which are able to describe anisotropic turbulence. In order to compare different approaches to turbulence modeling, the paper presents the numerical results of linear RANS models SARC, SST-RC, Reynolds stress method SSG/LRR-RSM-w2012, DNS direct turbulence modeling, as well as a new two-fluid model. It is shown that the recently developed two-fluid model adequately describes the considered flow. In addition, the two-fluid model is easy to implement numerically and has good convergence.

Keywords: rotating flow, Reynolds-averaged Navier–Stokes equations, SSG/LRR-RSM-w2012 model, SARC model, SST-RC model, new two-fluid model, DNS method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 395–408 (Russian).

## 1. Введение

Закрученные потоки жидкостей и газов широко распространены в природе. Примером являются такие явления, как атмосферные циклоны, смерчи, торнадо и т. д. Закрученные потоки также часто используются в технике и технологических процессах. Например, вращающиеся потоки являются основным рабочим процессом в работах центробежных пылеуловителей, сепараторов, гидроциклонов, вихревых топочных камер, газовых и паровых турбин, генераторов и т. д. Поэтому на протяжении многих лет исследованию закрученных и вращающихся потоков уделено большое внимание как в практическом, так и в теоретическом аспектах. Сложность исследования вращающихся или закрученных потоков в теоретическом плане обусловлена тем, что центробежная сила, в зависимости от ситуаций, может либо усиливать, либо подавлять турбулентность. Помимо этого, центробежная сила приводит к анизотропной турбулентности, что значительно усложняет и без того сложную проблему турбулентности, потому что основные гипотезы для построения математических моделей турбулентности, такие как гипотезы Буссинеска, Колмогорова и др., применимы только для изотропной турбулентности. Поэтому математическое моделирование закрученных турбулентных потоков все еще остается одной из серьезных проблем. Для исследования таких течений хорошим примером является течение Тейлора – Куэтта, которое возникает в зазоре между вращающимися цилиндрами. Впервые устойчивость такого движения была рассмотрена Рэлеем [Rayleigh, 1917] и Тейлором [Taylor, 1923; Taylor, 1933]. Ими доказано, что течение Тейлора – Куэтта характеризуется сильной анизотропной турбулентностью. Поэтому течение Тейлора – Куэтта, несмотря на кажущуюся простоту, на самом деле является довольно сложной задачей, и для расчета таких течений используются трудоемкие модели турбулентности, которые учитывают анизотропию. Среди полуэмпирических моделей турбулентности RANS к ним можно отнести модели рейнольдсовых напряжений (RSM), а также линейные модели RANS со специальными поправками на вращательное движение потока [Александров, Девисилов, Шарай, 2020].

Кроме моделей RANS бурно развивающимися направлениями являются методы прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) [Versteegh, Nieuwstadt, 1997; Boudjemadi et al., 1996] и моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) [Peng, Davidson, 2001]. Эти методы базируются на применимости гидродинамических уравнений Навье – Стокса для турбулентных потоков в качестве математической модели [Molchanov, Yanyshev, Вуков, 2022; Хужаев, Хамдамов, 2021]. Метод прямого моделирования DNS требует очень больших вычислительных ресурсов, потому что реализацию уравнений Навье – Стокса необходимо проводить в трехмерном виде, с очень мелкими шагами как по времени, так и по пространству. Однако в последнее время с развитием суперкомпьютеров в этом направлении достигнут большой прогресс. Для некоторых классов турбулентности в последнее время методом DNS получены результаты для числа Рейнольдса вплоть до  $10^6$ . Однако метод прямого моделирования все еще остается недоступным для большинства инженерных задач по турбулентности. Метод LES требует несколько меньших компьютерных ресурсов по сравнению с DNS. Однако вблизи стенки при использовании метода LES размер расчетных ячеек необходимо уменьшать настолько, что потребуется вычислительных ресурсов как и для метода DNS [Cabot, Moin, 1999]. В последнее время бурно развивающимся направлением являются гибридные модели LES+RANS, к которым относится, например, метод DES [Spalart, 2009; Dadioti, Rees, 2016; Spalart et al., 2006]. Суть этого метода в том, что вблизи твердой поверхности, где необходимо высокое разрешение расчетных ячеек, используются модели RANS, а вдали от стенок – метод LES. Таким путем можно существенно уменьшить количество вычислительных ресурсов.

Методы DNS, LES и DES не только требуют больших вычислительных ресурсов, но также сложны для численной реализации [Zhou et al., 2022; Faizan et al., 2022; Shaklein, Karpov,

Bolkisev, 2018]. Поэтому для расчета инженерных задач основным инструментом все еще остаются RANS-модели [Kulikov, Son, 2017; Fisher, Schelyaev, 2017], базирующиеся на замыкании уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу [Khujaev et al., 2022; Zhluktov, Aksenov, Karasev, 2014; Aksenov, 2017].

Еще одним подходом в моделировании турбулентности является двухжидкостный подход. Данный подход впервые был применен еще в 80-е годы прошлого столетия Сполдингом [Spalding, 1983]. Суть данного подхода заключается в том, что турбулентный поток делится на две жидкости по некоторым физическим или химическим признакам потока. Например, для моделирования переходных процессов поток рассматривался как смесь ламинарного и турбулентного потоков, в задачах горения — как смесь сгоревшего и не сгоревшего газов и т. д. Однако сложности возникают, когда рассматривается обычный турбулентный поток, где отсутствуют явные физические или химические отличительные черты потока. Поэтому в следующей работе Сполдинг [Spalding, 1984] предложил умозрительно разделить поток на быструю и медленную жидкости. Данная модель позволила довольно точно предсказать важные турбулентные характеристики потока. Однако слабой стороной этой модели была то, что для поиска некоторых параметров турбулентности, как и в моделях RANS, привлекались дополнительные уравнения на основе различных гипотез, что привело к увеличению числа решаемых уравнений. Поэтому вскоре эта модель потеряла свою привлекательность.

Дальнейшее развитие двухжидкостного подхода в моделировании турбулентности после долгого перерыва получено в работах [Malikov, 2020; Malikov, 2021]. В этих работах показана методика построения математической модели турбулентности на основе двухжидкостного подхода и проведена валидация модели на известных классических задачах турбулентности, которые хорошо изучены экспериментально. Показано, что модель хорошо описывает все участки турбулентной затопленной струи, турбулентное обтекание плоской пластины, а также сильно закрученный поток в канале с внезапным расширением. В работе [Маликов, Мадалиев, 2021] двухжидкостная модель использована для расчета двухфазного потока внутри центробежного воздушного сепаратора. В этой работе показано, что результаты двухжидкостной модели более точны, чем результаты линейных и нелинейных RANS-моделей.

В настоящей работе рассматривается численное исследование течения Тейлора–Куэтта, обусловленное вращением внутреннего цилиндра с фиксированным внешним цилиндром, отношение радиусов которых  $\eta = 0,5$ . Численные расчеты получены при числах Рейнольдса в диапазоне от 1000 до 8000, при которых поток становится турбулентным. В работе представлены также результаты RANS-моделей SARC [Spalart, Shur, 1997] и SST-RC [Smirnov, Menter, 2008], метода рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM [Launder, Reece, Rodi, 1975; Speziale, Sarkar, Gatski, 1991], метода прямого моделирования DNS [Speziale, Sarkar, Gatski, 1991] и двухжидкостной модели [Маликов, Мадалиев, 2021]. Таким образом, в работе сопоставляются результаты различных подходов к моделированию турбулентности. В первых двух моделях для замыкания систем уравнений Рейнольдса используется гипотеза Буссинеска. В методе SSG/LRR-RSM гипотеза Буссинеска не используется и для каждого рейнольдсового напряжения записывается свое уравнение. В основе метода прямого моделирования DNS, как было сказано выше, лежит гипотеза о достаточности систем уравнений Навье–Стокса для описания турбулентного потока. Что касается двухжидкостной модели, то в работе [Назаров, 2021] математически доказывается, что турбулентный поток можно представить в виде гетерогенной смеси двух жидкостей. Основным преимуществом двухжидкостного подхода в том, что именно такой подход позволяет получить замкнутую систему уравнений для турбулентности.

## 2. Математическое моделирование задачи

Течение Тейлора–Куэтта характеризуется отношением радиусов,  $\eta = \frac{R_1}{R_2}$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно, и шириной щели  $d = R_2 - R_1$ . Число Рейнольдса определим выражением

$$\text{Re} = \frac{U_0 d}{\nu},$$

где  $U_0$  – скорость вращающегося цилиндра, а  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости. Для численного моделирования турбулентного течения несжимаемой жидкости по моделям RANS использовалось уравнение Навье–Стокса, осредненное по Рейнольдсу:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{U}}{r \partial r} \right) + \frac{\partial}{r \partial r} (-r \overline{u'v'}). \quad (1)$$

В данном уравнении  $\bar{U}$  – осредненная тангенциальная скорость турбулентного потока. В линейных моделях RANS для нахождения неизвестного турбулентного напряжения используется обобщенная гипотеза Буссинеска:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right).$$

Здесь  $\nu_t$  – турбулентная вязкость. Для поиска неизвестной турбулентной вязкости в модели SARC используется уравнение для коэффициента кинематической вихревой вязкости:

$$\frac{\partial \bar{\nu}}{\partial t} = C_{b1} f_{r1} \bar{S} \bar{\nu} - C_{w1} f_w \left( \frac{\bar{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_v} \left[ \frac{\partial}{r \partial r} \left( r(\nu + \bar{\nu}) \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial r} \right) + C_{b2} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial r} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial r} \right]. \quad (2)$$

Турбулентная вихревая вязкость вычисляется по формуле  $\nu_t = \bar{\nu} f_{v1}$ . Данная модель относится к однопараметрическим моделям, так как в ней используется одно уравнение.

Функция  $f_{r1}$  представляет собой поправочный коэффициент, который учитывает влияние на турбулентность кривизны линий тока. Данная функция имеет следующий вид:

$$f_{r1} = (1 + C_{r1}) \frac{2r^*}{1 + r^*} \left[ 1 - C_{r3} \text{tg}^{-1}(C_{r2} \widehat{r}) \right] - C_{r1}, \quad \widehat{r} = \frac{2\Omega_r S_r}{D^4} \left( \frac{DS_r}{Dt} \right), \quad D^2 = \frac{1}{2} (S^2 + \Omega^2),$$

$$\frac{DS_r}{Dt} = \frac{\partial S_r}{\partial t} + U \frac{\partial S_r}{\partial r}, \quad S_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right), \quad \Omega_r = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right) \right], \quad S^2 = 2S_r S_r,$$

$$\Omega^2 = 2\Omega_r \Omega_r, \quad r^* = \frac{S}{\omega}, \quad C_{r1} = 1, \quad C_{r2} = 12, \quad C_{r3} = 1,$$

где  $S_r$  – скорость деформации,  $\frac{D}{Dt}$  – оператор субстанциональной производной,  $\Omega_r$  – завихренности. Остальные величины остаются такими же, как для стандартной модели, которые представлены в [Spalart, Shur, 1997].

Модель  $k$ - $\omega$  SST (модель SST-RC) состоит из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{r \partial r} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) r \frac{\partial k}{\partial r} \right] + P f_{r1} - \beta^* \omega k, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{r \partial r} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \frac{\gamma}{\nu_t} P f_{r1} - \beta \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\sigma_\omega}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial k}{\partial r}, \end{cases}$$

где  $P$  – генерация энергии турбулентных пульсаций, турбулентная вязкость вычисляется как

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}.$$

Подробное изложение сути этой модели представлено работе [Smirnov, Menter, 2008].

Известно, что модели RANS, которые не используют гипотезу Буссинеска, называются нелинейными. Модель рейнольдсовых напряжений SSG/LRR является нелинейной RANS-моделью турбулентности, в которой используется уравнение  $\omega$  для уравнения масштаба длины. Полная модель напряжений Рейнольдса SSG/LRR- $\omega$  (SSG/LRR-RSM-w2012) [Launder, Reece, Rodi, 1975; Speziale, Sarkar, Gatski, 1991] и одно уравнение масштаба длины имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial t} = P_{11} + \Pi_{11} - \varepsilon_{11} + \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \left( \mu + D \frac{\overline{v'v'}}{C_\mu \omega} \right) \frac{\partial u'u'}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial t} = P_{22} + \Pi_{22} - \varepsilon_{22} + \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \left( \mu + D \frac{\overline{v'v'}}{C_\mu \omega} \right) \frac{\partial v'v'}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial t} = P_{12} + \Pi_{12} + \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \left( \mu + D \frac{\overline{v'v'}}{C_\mu \omega} \right) \frac{\partial u'v'}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{P_{11} a_\omega \omega}{2k} - B_\omega \omega^2 + \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \left( \nu + \sigma_\omega \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \sigma_d \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{22}$  – генерация рейнольдсовых напряжений;  $D$  – диффузия;  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{22}$  – диссипация;  $\Pi_{11}$ ,  $\Pi_{12}$ ,  $\Pi_{22}$  – член перераспределения давления.

Генерация рейнольдсовых напряжений моделируется с помощью соотношений

$$P_{11} = -2R_{12} \frac{\partial \overline{U}}{\partial r}, \quad P_{22} = 0, \quad P_{12} = -2R_{22} \frac{\partial \overline{U}}{\partial r}.$$

Диссипация имеет вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{2}{3} \varepsilon, \quad \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{2}{3} \varepsilon,$$

где  $\rho R_{11} = -\tau_{11} = \overline{\rho u'u'}$ ,  $\rho R_{12} = -\tau_{12} = \overline{\rho u'v'}$ ,  $\rho R_{22} = -\tau_{22} = \overline{\rho v'v'}$ ,  $\varepsilon = C_\mu k \omega$  и  $k = \frac{R_{11}}{2} + \frac{R_{22}}{2}$ .

Корреляция «давление – деформация» моделируется с помощью соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{11} = - \left( C_1 \varepsilon + \frac{1}{2} C_1^* P_{11} \right) a_{11} + C_2 \varepsilon \left( a_{11} a_{11} + a_{22} a_{22} - \frac{1}{3} a_{11} a_{11} - \frac{1}{3} a_{22} a_{22} - \frac{2}{3} a_{12} a_{12} \right) + \\ \quad + C_4 k \left( a_{12} S_{12} + \frac{4}{3} a_{12} S_{12} \right) + 2C_5 k (a_{12} W_{12}), \\ \Pi_{12} = - \left( C_1 \varepsilon + \frac{1}{2} C_1^* P_{12} \right) a_{12} + C_2 \varepsilon (a_{11} a_{12} + a_{12} a_{22}) + \left( C_3 - C_3^* \sqrt{(a_{11} a_{11} - a_{22} a_{22} - 2a_{12} a_{12})} \right) k S_{12} + \\ \quad + C_4 k (a_{11} S_{12} + a_{22} S_{12}) + 2C_5 k (a_{11} W_{12} + a_{11} W_{21}), \\ \Pi_{22} = - (C_1 \varepsilon) a_{11} + C_2 \varepsilon \left( a_{11} a_{11} + a_{22} a_{22} - \frac{1}{3} a_{11} a_{11} - \frac{1}{3} a_{22} a_{22} - \frac{2}{3} a_{12} a_{12} \right) + \\ \quad + C_4 k \left( a_{12} S_{12} + \frac{4}{3} a_{12} S_{12} \right) + 2C_5 k (a_{12} W_{21}), \end{array} \right.$$

где тензоры анизотропии рейнولدсовых напряжений определяются выражением

$$a_{11} = \frac{R_{11}}{k} - \frac{2}{3}, \quad a_{12} = \frac{R_{12}}{k}, \quad a_{22} = \frac{R_{22}}{k} - \frac{2}{3}.$$

Коэффициенты давления–деформации смешиваются (как описано ниже) между Launder – Reese – Rodi (LRR) около стен (без терминов для коррекции стен) и Speziale – Sarkar – Gatski (SSG) вдали от стен.

Также

$$S_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right), \quad S_r^* = S_r, \quad W_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right).$$

Остальные величины, а также начальные и граничные условия представлены в [Launder, Reese, Rodi, 1975; Speziale, Sarkar, Gatski, 1991].

Двухжидкостная модель турбулентности описана подробно в работе [Назаров, 2021] и в общих чертах в работах [Назаров, 2021; Маликов, Мадалиев, 2021]. Поэтому ниже приводится система уравнений турбулентности на основе двухжидкостного подхода в тензорном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho \bar{V}_j}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\rho \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) - v_j v_i \right], \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \bar{V}_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\rho v_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ji} \left( \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{F_{si}}{\rho} + \frac{F_{fi}}{\rho}, \\ \nu_{ji} = 3\nu + 2 \left| \frac{v_i v_j}{\text{def}(\vec{V})} \right| \text{ при } i \neq j, \quad \nu_{ii} = 3\nu + \frac{1}{\text{div} \vec{v}} \left| \frac{v_k v_k}{\text{def}(\vec{V})} \right| \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \\ \vec{F}_f = -\rho K_f \vec{v}, \quad \vec{F}_s = \rho C_s \text{rot} \vec{V} \times \vec{v}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь  $K_f$  – коэффициент трения:

$$K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|\vec{d} \cdot \vec{v}|}{d^2}.$$

В данном выражении  $d$  – ближайшее расстояние до твердой стенки,  $\lambda_{\max}$  – наибольший корень характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

где  $A$  – матрица

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_2} - C_s \zeta_3 & -\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_3} + C_s \zeta_2 \\ -\frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_1} + C_s \zeta_3 & -\frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_3} - C_s \zeta_1 \\ -\frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_1} - C_s \zeta_2 & -\frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_2} + C_s \zeta_1 & -\frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

и  $\vec{\xi} = \text{rot} \vec{V}$ .

В работах [Malikov, 2020; Malikov, 2022] показано, что хорошие результаты получаются при  $C_1 = 0,7825$ ,  $C_2 = 0,306$ ,  $C_s = 0,2$  для обтекания плоской пластины, плоской и круглой струй, в канале с резким расширением для вращающегося потока.

Из соображений симметрии ясно, что для исследования рассматриваемой задачи удобной системой координат является цилиндрическая система координат. Чтобы расписать систему уравнений (4) в цилиндрических координатах, введем следующие обозначения:

$$x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad \bar{V}_1 = V_r, \quad \bar{V}_2 = V_\varphi, \quad v_1 = v, \quad v_2 = u.$$

Уравнение неразрывности будет иметь вид

$$\frac{\partial V_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial r V_r}{r \partial r} = 0.$$

В силу симметрии должно быть  $\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0$ , следовательно, из (4) получим  $V_r = 0$ . Тогда система уравнений (4) будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} = v \left[ \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial V_\varphi}{r \partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right] - \frac{\partial (r^2 \vartheta_r \vartheta_\varphi)}{r^2 \partial r}, \\ \frac{\partial \vartheta_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{r^2 \partial r} \left[ r^2 v_{\varphi r} \left( \frac{\partial \vartheta_\varphi}{\partial r} - \frac{\vartheta_\varphi}{r} \right) \right] - (1 - C_s) \frac{\vartheta_r}{r} \frac{\partial (r V_\varphi)}{\partial r} - K_f \vartheta_\varphi, \\ \frac{\partial \vartheta_r}{\partial t} = \frac{2\partial}{r \partial r} \left[ r v_{rr} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} \right] - \frac{2v_{rr} \vartheta_r}{r^2} - C_s \frac{\vartheta_\varphi}{r} \frac{\partial (r V_\varphi)}{\partial r} + \frac{2V_\varphi \vartheta_\varphi}{r} - K_f \vartheta_r, \\ v_{\varphi r} = 3v + 2 \frac{|\vartheta_\varphi \vartheta_r|}{\left| \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right|}, \quad v_{rr} = 3v + 2 \frac{|\vartheta_r \vartheta_r|}{\left| \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right|}, \quad K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|\vartheta_r|}{d}. \end{cases} \quad (5)$$

В данной системе уравнений производная по  $r$  обозначена штрихом,  $t$  — время,  $V_\varphi$  — осредненная тангенциальная скорость,  $\vartheta_r, \vartheta_\varphi$  — относительные радиальная и тангенциальная скорости молей,  $v$  — молекулярная кинематическая вязкость,  $v_{rr}, v_{\varphi r}$  — эффективные молярные вязкости. Для поиска  $\lambda_{\max}$  составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -(1 - C_s) \frac{(r V_\varphi)}{r} \\ -(C_s) \frac{(r V_\varphi)}{r} + \frac{2V_\varphi}{r} & \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Корни данного уравнения равны

$$\lambda = \pm \sqrt{D}.$$

При  $D > 0$   $\lambda_{\max} = \sqrt{D}$  и при  $D < 0$   $\lambda_{\max} = 0$ .

Здесь

$$D = C_s(1 - C_s) \left[ \frac{\partial (r V_\varphi)}{r \partial r} \right]^2 - (1 - C_s) \frac{2V_\varphi}{r} \frac{\partial (r V_\varphi)}{r \partial r}. \quad (7)$$

Необходимо отметить, что режим течения определяется знаком выражения  $D$ . Если  $D < 0$ , относительные скорости молей со временем затухают, и поток стремится к ламинарному режиму, а при  $D > 0$  бесконечно малые возмущения относительных скоростей могут расти, и в этом случае поток переходит в турбулентный режим.

В нашей задаче присутствуют две стенки. Поэтому для определения неизвестного  $d$  предлагается следующее выражение:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}.$$

В этих выражениях  $d_1$  — ближайшее расстояние до первой стенки,  $d_2$  — ближайшее расстояние до второй стенки.

Для численной реализации уравнения приведены к безразмерному виду соотношением всех скоростей к скорости вращающегося цилиндра  $-V_{0,\varphi}$ , радиуса — к ширине канала  $h = r_2 - r_1$ . Здесь  $r_1$  — радиус внутреннего,  $r_2$  — радиус внешнего цилиндров. В качестве начального условия ставилось решение ламинарного потока, на границах — условие прилипания. Для численной реализации уравнений (1), (2), (3) и (4) использовалась неявная схема погрешностью порядка  $o(\Delta t, \Delta r^2)$ . Интегрирование по времени моделей RANS проводилось с безразмерным шагом  $\Delta t = 0,0001$ , а для двухжидкостной модели —  $\Delta t = 0,1$ .

### 3. Результаты расчетов и их обсуждение

На рис. 1 представлены численные результаты моделей турбулентности для профиля осредненной тангенциальной скорости при различных числах Рейнольдса. Тангенциальная скорость приведена к безразмерному виду соотношением к скорости вращения внутреннего цилиндра  $U_0$ .

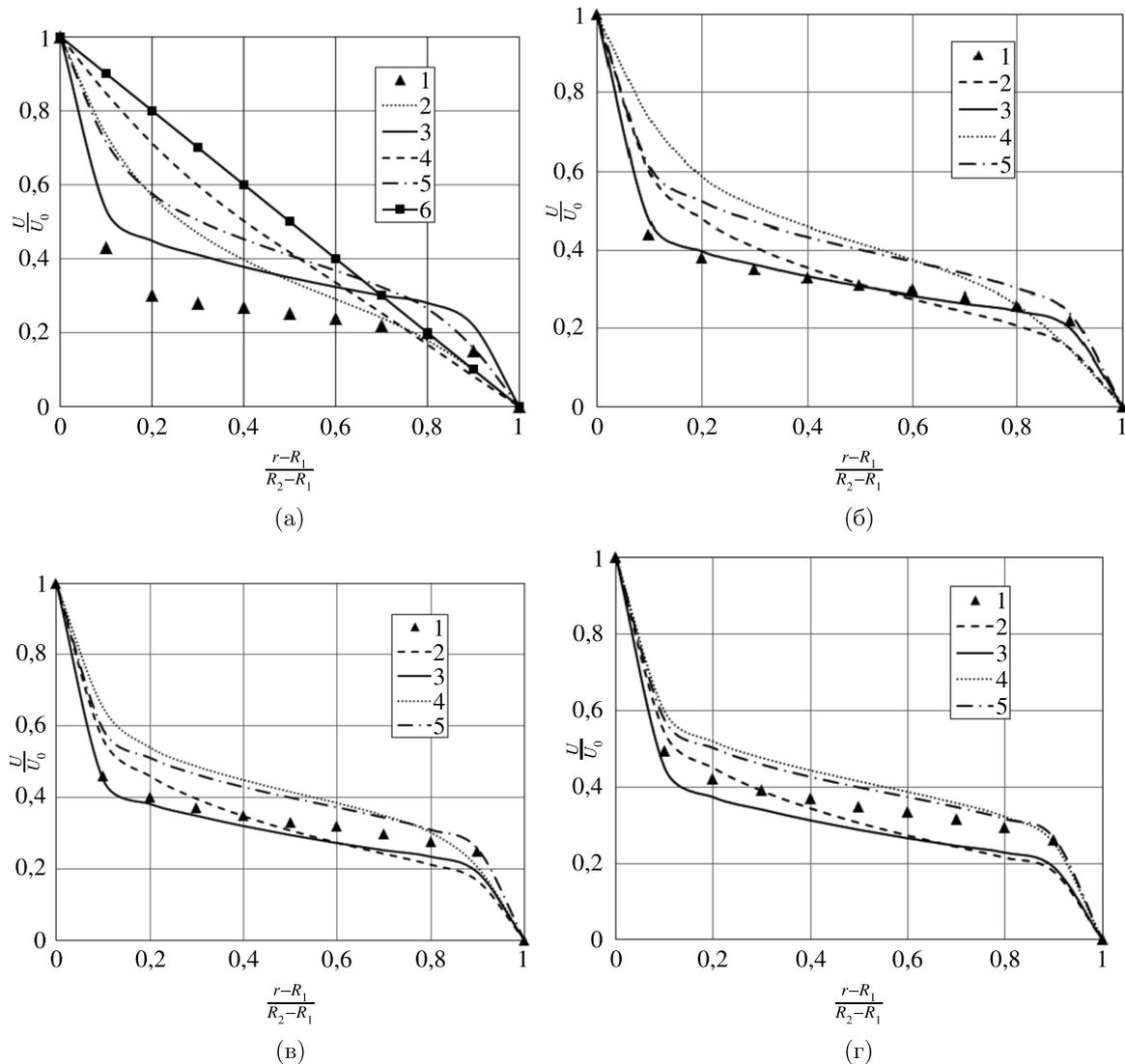


Рис. 1. Профиль безразмерной тангенциальной скорости при числах Рейнольдса (а) 1000, (б) 3000, (в) 5000, (г) 8000: 1 — DNS, 2 — SSG/LRR-RSM, 3 — двухжидкостная модель, 4 — SARC, 5 — SST-RC, 6 — профиль ламинарного потока

На рис. 2 приведены профили момента импульса при различных числах Рейнольдса. Момент импульса нормализован по  $R_1 U_0$ .

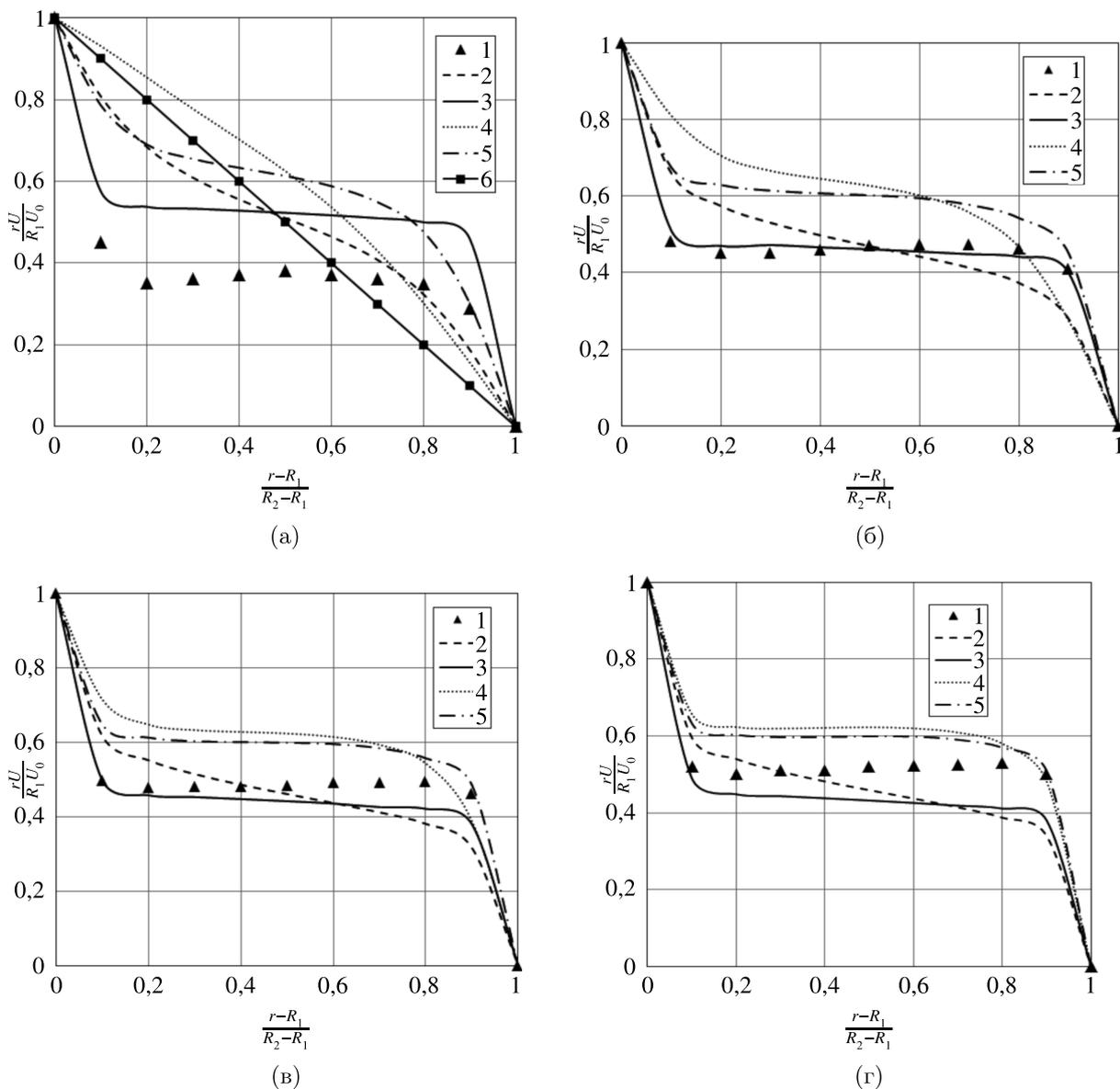


Рис. 2. Профиль углового момента при числах Рейнольдса (а) 1000, (б) 3000, (в) 5000, (г) 8000: 1 – DNS, 2 – SSG/LRR-RSM, 3 – двухжидкостная модель, 4 – SARC, 5 – SST-RC, 6 – профиль ламинарного потока

На рис. 1 и 2 представлены результаты DNS-работы [Dong, 2007]. Из этих рисунков видно, что результаты различных моделей количественно отличаются. Особенно это заметно для числа Рейнольдса  $Re = 1000$ . В работах [Dong, 2007; Bilson, Bremhorst, 2007] по анализу спектра турбулентных флуктуаций заключается, что значение числа Рейнольдса  $Re = 1000$  является началом турбулентного режима. Из рис. 1, а и 2, а видно, что наиболее близкие результаты к результатам DNS показывает модель двухжидкостного подхода. Что касается модели SST-RC, вблизи внешнего цилиндра она дает почти в два раза большую скорость, чем для ламинарного потока. Такое явление наблюдается и для результатов метода рейнольдсовых напряжений. На взгляд авторов, эти значения завышены, так как при числе Рейнольдса  $Re = 1000$  значения скорости не сильно долж-

ны отличаться от скорости ламинарного потока. При числе Рейнольдса  $Re = 8000$  (рис. 1, з и 2, з) для режима развитой турбулентности результаты для метода рейнольдсовых напряжений и двухжидкостной модели довольно близки, а результаты SARC и SST-RC практически совпадают.

На рис. 3 показана чувствительность результатов к измельчению расчетных сеток для двухжидкостной модели.

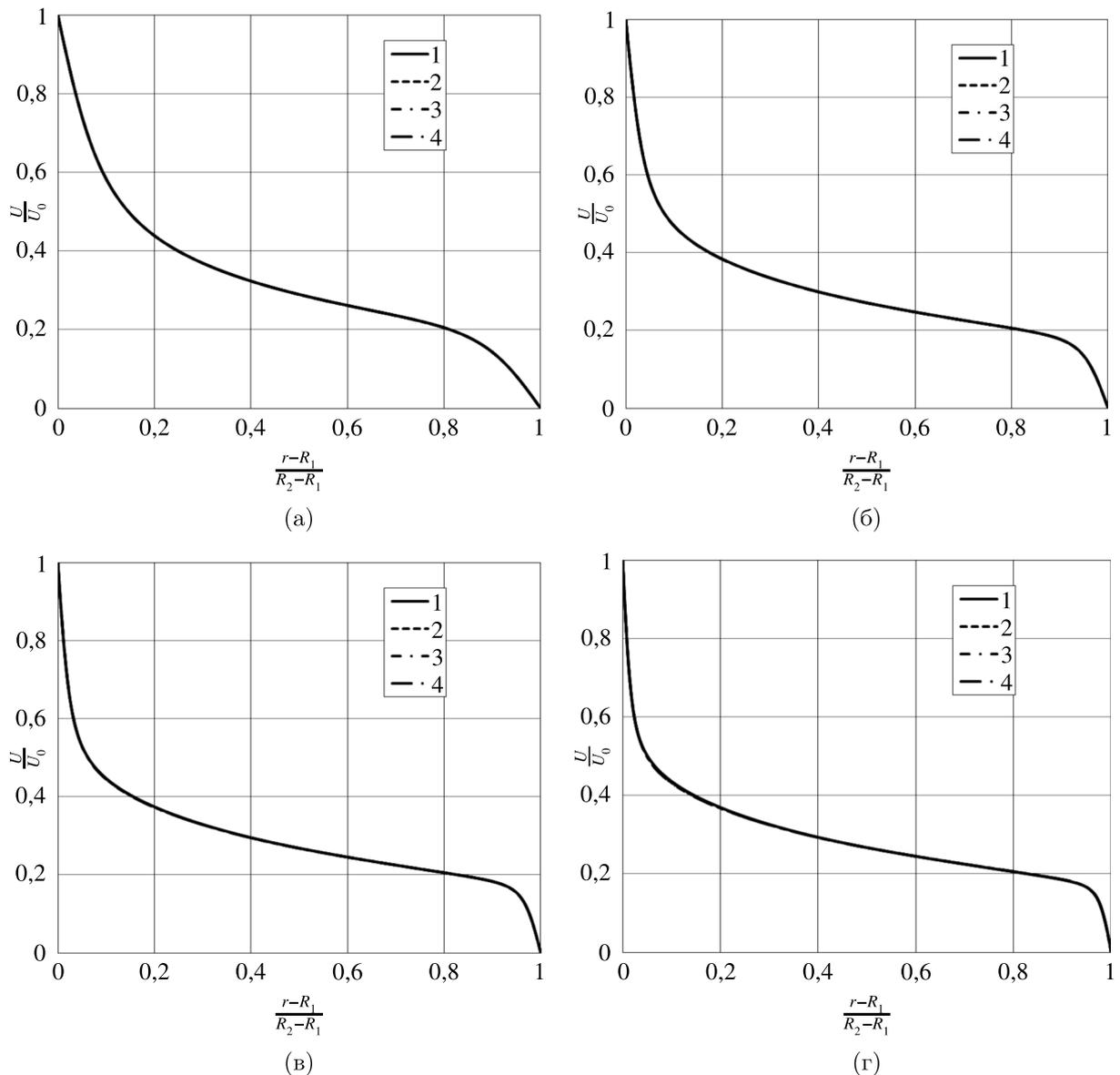


Рис. 3. Профиль безразмерной тангенциальной скорости при числах Рейнольдса (а) 1000, (б) 3000, (в) 5000, (г) 8000. Количество расчетных узлов: 1 – 100, 2 – 200, 3 – 500, 4 – 1000

Из рис. 3 видно, что результаты при различных количествах расчетных сеток практически совпадают между собой.

#### 4. Заключение

В работе с помощью различных моделей турбулентности проведено исследование течения Тейлора–Куэтта при числах Рейнольдса в диапазоне от 1000 до 8000 для отношения радиу-

сов  $\eta = 0,5$ . Сравнение различных моделей турбулентности показывает, что для переходного режима от ламинарного к турбулентному потоку более близкие к результатам DNS имеет двухжидкостная модель. Для развитого турбулентного режима при  $Re = 8000$  результаты двухжидкостной модели и метода Рейнольдсовых напряжений достаточно близки.

Анализ результатов различных моделей турбулентности показывает, что в рассмотренных диапазонах числа Рейнольдса двухжидкостная модель показывает более логичные результаты, чем остальные полуэмпирические модели. Помимо этого, она достаточно проста для численной реализации и имеет хорошую сходимость. Например, по сравнению с использованными в работе линейными и нелинейными моделями, интегрирование двухжидкостной модели можно проводить существенно большими шагами по времени. Таким образом, двухжидкостную модель можно рекомендовать для исследования инженерных задач с вращающимися потоками, где сильна анизотропия турбулентности.

## Список литературы (References)

- Александров А. А., Девисилов В. А., Шарай Е. Ю.* Численное исследование течения жидкости между проницаемыми вращающимися цилиндрическими поверхностями // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2020. — № 1 (88). — С. 32–45.
- Aleksandrov A. A., Devisilov V. A., Sharai E. Yu.* Chislennoe issledovanie techeniya zhidkosti mezhdu pronitsaemymi vrashchayushchimisya tsilindricheskimi poverkhnostyami [Numerical investigation of fluid flow between rotating permeable cylindrical surfaces] // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences. — 2020. — No. 1 (88). — P. 32–45 (in Russian).
- Маликов З. М., Мадалиев М. Э.* Математическое моделирование турбулентного течения в центробежном сепараторе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2021. — Т. 71. — С. 121–138.
- Malikov Z. M., Madaliev M. E.* Matematicheskoe modelirovanie turbulentnogo techeniya v tsentrobeznom separatore [Mathematical modeling of a turbulent flow in a centrifugal separator] // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. — 2021. — Vol. 71. — P. 121–138 (in Russian).
- Назаров Ф. Х.* Сравнение моделей турбулентности для закрученных течений // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2021. — № 2 (95). — С. 25–36.
- Nazarov F. Kh.* Sravnenie modelei turbulentnosti dlya zakruchennykh techenii [Comparing turbulence models for swirling flows] // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences. — 2021. — No. 2 (95). — P. 25–36 (in Russian). — <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-2-25-36>
- Хужаев И. К., Хамдамов М. М.* Распространение осесимметричной турбулентной струи метана в спутном потоке воздуха при горении с конечной скоростью // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2021. — № 5 (98). — С. 89–108.
- Khujaev I. K., Hamdamov M. M.* Rasprostranenie osesimmetrichnoi turbulentnoi strui metana v sputnom potoke vozdukha pri gorenii s konechnoi skorost'yu [Axisymmetric turbulent methane jet propagation in a co-current air flow under combustion at a finite velocity] // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences. — 2021. — No. 5 (98). — P. 89–108 (in Russian).
- Aksenov A. A.* FlowVision: Industrial computational fluid dynamics // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 5–20. — DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-5-20
- Bilson M., Bremhorst K.* Direct numerical simulation of turbulent Taylor–Couette flow // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — Vol. 579. — P. 227–270.
- Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P.* Direct numerical simulation of natural convection in a vertical channel: a tool for second-moment closure modelling // Proc. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3. — Amsterdam: Elsevier, 1996. — P. 39.
- Cabot W., Moin P.* Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high reynolds number flow // Flow, Turbulence and Combustion. — 1999. — Vol. 63. — P. 269.

- Dadioti R. E., Rees S.* Validation of a detached eddy simulation (DES) model in complex urban environment // Athens J. Sci. — 2016. — Vol. 3, No. 2. — P. 113–136.
- Dong S.* Direct numerical simulation of turbulent Taylor–Couette flow. — J. Fluid Mech. — 2007. — Vol. 587. — P. 373–393.
- Faizan M., Badshah S., Badshah M., Haider B. A.* Performance and wake analysis of horizontal axis tidal current turbine using improved delayed detached eddy simulation // Renewable Energy. — 2022. — Vol. 184. — P. 740–752.
- Fisher J. V., Schelyaev A. E.* Verification of calculated characteristics of supersonic turbulent jets // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 21–35. — DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-21-35
- Khujayev I. K., Mirzoyev A. A., Hamdamov M. M., Shirinov Z. Z.* Numerical simulation of methane-air mixture combustion // In AIP Conference Proceedings. — 2022. — Vol. 2637, No. 1. — P. 040003.
- Kulikov Y. M., Son E. E.* CABARET scheme implementation for free shear layer modeling // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 6. — P. 881–903. — DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-6-881-903
- Launder B. E., Reece G. J., Rodi W.* Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure // J. Fluid Mech. — 1975. — Vol. 68. — P. 537–566.
- Malikov Z. M.* Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids // Applied Mathematic Modeling. — 2020. — Vol. 82. — P. 409–436. — <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.047>
- Malikov Z. M.* Mathematical model of turbulent heat transfer based on the dynamics of two fluids // Applied Mathematic Modeling. — 2021. — Vol. 91. — P. 186–213. — <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.029>
- Malikov Z. M.* Modeling a turbulent multicomponent fluid with variable density using a two-fluid approach // Applied Mathematical Modelling. — 2022. — Vol. 104. — P. 34–49.
- Molchanov A. M., Yanyshchikov D. S., Bykov L. V.* Numerical investigation of a supersonic flow in the near wake region of a cylindrical afterbody // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. — 2022. — No. 3 (102). — P. 86–95. — <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-3-86-95>
- Peng S. H., Davidson L.* Large eddy simulation of turbulent buoyant flow in a confined cavity // Intern. J. Heat Fluid Flow. — 2001. — Vol. 22. — P. 323.
- Rayleigh L.* On the dynamics of revolving fluids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. — 1917. — Vol. 93. — No. 648. — P. 148–154.
- Shaklein A. A., Karpov A. I., Bolkisev A. A.* Analysis of a numerical method for studying upward flame spread over solid material // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 6. — P. 755–774. — DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-6-755-774
- Smirnov P., Menter F.* Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart–Shur correction term // Proc. of ASME Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea and Air, GT 2008, Germany, Berlin, June 9–13, 2008. — 10 p.
- Spalart P. R.* Detached-eddy simulation // Annual review of fluid mechanics. — 2009. — Vol. 41. — P. 181–202.
- Spalart P. R., Shur M. L.* On the sensitization of turbulence models to rotational and curvature // Aerospace Science and Technology. — 1997. — Vol. 1, No. 5. — P. 297–302.
- Spalart P. R., Deck S., Shur M. L., Squires K. D., Strelets M. K., Travin A.* A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities // Theoretical and computational fluid dynamics. — 2006. — Vol. 20. — P. 181–195.

- Spalding D.B.* A turbulence model for buoyant and combusting flows // 4th Int. Conf. on Numerical methods in Thermal Problems, Swansea, 15–18 July 1984.
- Spalding D.B.* Chemical reaction in turbulent fluids // *J. Physico-chemical Hydrodyn.* — 1983. — Vol. 4. — P. 323–336.
- Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B.* Modeling the pressure strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach // *J. Fluid Mech.* — 1991. — Vol. 227. — P. 245–272.
- Taylor G.I.* Fluid friction between rotating cylinders I — Torque measurements // *Proc. R. Soc. A.* — 1933. — Vol. 157. — P. 546–564.
- Taylor G.I.* Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // *Phil. Trans. Roy. Soc. A.* — 1923. — Vol. 233. — P. 298–343.
- Versteegh T.A., Nieuwstadt T.M.* Turbulent budgets of natural convection in an infinite, differentially heated, vertical channel // *Intern. J. Heat Fluid Flow.* — 1997. — Vol. 19. — P. 135.
- Zhlyukov S.V., Aksenov A.A., Karasev P.I.* Modeling bypass transition within  $k$ - $\varepsilon$  approach // *Computer Research and Modeling.* — 2014. — Vol. 6, No. 6. — P. 879–888.
- Zhou T., Yang Q., Yan B., Deng X., Yuan Y.* Detached eddy simulation of turbulent flow fields over steep hilly terrain // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics.* — 2022. — Vol. 221. — P. 104906.