

УДК: 517.9

# Приближенная модель осесимметричного течения несжимаемой жидкости в бесконечно длинном круглом цилиндре, стенки которого составлены из упругих колец, основанная на решениях уравнения Кортевега – де Фриза

А. П. Черняев

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Россия, 141700, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: chernyaev40@yandex.ru

Получено 09.04.2022, после доработки — 05.04.2023.  
Принято к публикации 11.01.2024.

Изучается приближенная математическая модель кровотока в осесимметричном кровеносном сосуде. Под таким сосудом понимается бесконечно длинный круговой цилиндр, стенки которого состоят из упругих колец. Кровь рассматривается как несжимаемая жидкость, текущая в этом цилиндре. Повышенное давление вызывает радиально-симметричное растяжение упругих колец. Следуя Дж. Лэму, кольца расположены близко друг к другу так, что жидкость между ними не протекает. Для мысленной реализации этого достаточно предположить, что кольца обтянуты непроницаемой пленкой, не обладающей упругими свойствами. Упругостью обладают лишь кольца. Рассматриваемая модель кровотока в кровеносном сосуде состоит из трех уравнений: уравнения неразрывности, закона сохранения количества движения и уравнения состояния. Рассматривается приближенная процедура сведения рассматриваемых уравнений к уравнению Кортевега – де Фриза (КдФ), которая рассмотрена Дж. Лэмом не в полной мере, лишь для установления зависимости коэффициентов уравнения КдФ от физических параметров рассматриваемой модели течения несжимаемого флюида в осесимметричном сосуде. Из уравнения КдФ стандартным переходом к бегущим волнам получаются ОДУ третьего, второго и первого порядка соответственно. В зависимости от различных случаев расположения трех стационарных решений ОДУ первого порядка стандартно получаются кноидальная волна и солитон. Основное внимание уделено неограниченному периодическому решению, которое названо нами вырожденной кноидальной волной. Математически кноидальные волны описываются эллиптическими интегралами с параметрами, определяющими амплитуды и периоды. Солитон и вырожденная кноидальная волна описываются элементарными функциями. Указан гемодинамический смысл этих видов решений. Благодаря тому, что множества решений ОДУ первого, второго и третьего порядков не совпадают, установлено, что задачу Коши для ОДУ второго и третьего порядков можно задавать во всех точках, а для ОДУ первого порядка — лишь в точках роста или убывания. Задачу Коши для ОДУ первого порядка нельзя задавать в точках экстремума благодаря нарушению условия Липшица. Численно проиллюстрировано перерождение кноидальной волны в вырожденную кноидальную волну, которая может привести к разрыву стенок сосуда. Приведенная таблица описывает два режима приближения кноидальной волны к вырожденной кноидальной волне.

Ключевые слова: приближенная модель кровотока, сосуд из упругих колец, уравнение Кортевега – де Фриза, кноидальная волна, солитон, вырожденная кноидальная волна, задача Коши

UDC: 517.9

# Approximate model of an axisymmetric flow of a non-compressible fluid in an infinitely long circular cylinder, the walls of which are composed of elastic rings, based on solutions of the Korteweg – de Vries equation

A. P. Chernyaev

Moscow Institute of physics and technology (national research University),  
9 Institutsky per., Dolgoprudny, 141700, Russia

E-mail: chernyaev40@yandex.ru

*Received 09.04.2022, after completion – 05.04.2023.*

*Accepted for publication 11.01.2024.*

An approximate mathematical model of blood flow in an axisymmetric blood vessel is studied. Such a vessel is understood as an infinitely long circular cylinder, the walls of which consist of elastic rings. Blood is considered as an incompressible fluid flowing in this cylinder. Increased pressure causes radially symmetrical stretching of the elastic rings. Following J. Lamb, the rings are located close to each other so that liquid does not flow between them. To mentally realize this, it is enough to assume that the rings are covered with an impenetrable film that does not have elastic properties. Only rings have elasticity. The considered model of blood flow in a blood vessel consists of three equations: the continuity equation, the law of conservation of momentum and the equation of state. An approximate procedure for reducing the equations under consideration to the Korteweg – de Vries (KdV) equation is considered, which was not fully considered by J. Lamb, only to establish the dependence of the coefficients of the KdV equation on the physical parameters of the considered model of incompressible fluid flow in an axisymmetric vessel. From the KdV equation, by a standard transition to traveling waves, ODEs of the third, second and first orders are obtained, respectively. Depending on the different cases of arrangement of the three stationary solutions of the first-order ODE, a cnoidal wave and a soliton are standardly obtained. The main attention is paid to an unbounded periodic solution, which we call a degenerate cnoidal wave. Mathematically, cnoidal waves are described by elliptic integrals with parameters defining amplitudes and periods. Soliton and degenerate cnoidal wave are described by elementary functions. The hemodynamic meaning of these types of decisions is indicated. Due to the fact that the sets of solutions to first-, second- and third-order ODEs do not coincide, it has been established that the Cauchy problem for second- and third-order ODEs can be specified at all points, and for first-order ODEs only at points of growth or decrease. The Cauchy problem for a first-order ODE cannot be specified at extremum points due to the violation of the Lipschitz condition. The degeneration of the cnoidal wave into a degenerate cnoidal wave, which can lead to rupture of the vessel walls, is numerically illustrated. The table below describes two modes of approach of a cnoidal wave to a degenerate cnoidal wave.

**Keywords:** approximate model of blood flow, vessel made of elastic rings, Korteweg – de Vries equation, cnoidal wave, soliton, degenerate cnoidal wave, Cauchy problem

*Citation: Computer Research and Modeling, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 375–394 (Russian).*

## 1. Введение

Изучается приближенная осесимметричная математическая модель кровотока в кровеносном сосуде. Под таким сосудом понимается бесконечно длинный круговой цилиндр, стенки которого состоят из упругих колец. Кровь рассматривается как несжимаемая жидкость, текущая в этом цилиндре. Сосуд имеет барорецепторы. Величину  $\Delta p$ , где  $p$  — давление, можно понимать как локальную реакцию стенки сосуда. В этом случае можно рассматривать длинный сосуд как систему тонких локально реагирующих колец. Следуя Дж. Лэму [Лэм, 1983], накладываемся условие непротекания жидкости между кольцами. Несмотря на разный радиус колец, они расположены так близко друг к другу, что жидкость между ними не протекает. Для мысленной реализации этого достаточно предположить, что кольца обтянуты непроницаемой пленкой, не обладающей упругими свойствами. Упругостью обладают лишь кольца [Лэм, 1983]. Рассматриваемая модель кровотока в кровеносном сосуде состоит из трех уравнений: уравнения неразрывности, закона сохранения количества движения [Кошелев и др., 2010; Абакумов и др., 2000; Корнелик, Бубенчиков, 2003] и приближенного уравнения состояния [Лэм, 1983]. Считаем, это уравнение состояния наиболее физичным, ибо оно выводится на основании второго закона Ньютона для сегмента упругого кольца. Несмотря на то что это уравнение состояния не является точным, оно наиболее выразительно моделирует процесс радиально-симметричного растяжения упругих колец при возникновении повышенного давления.

Рассматривается приближенная процедура Дж. Лэма сведения рассматриваемых уравнений к уравнению Кортевега – де Фриза (КдФ). Эта процедура дает возможность проследить зависимости коэффициентов уравнения КдФ от физических параметров рассматриваемой модели течения несжимаемого флюида в осесимметричном сосуде, что у Лэма сделано не в полной мере и лишь для солитона. В частности, выяснено, как зависят коэффициенты уравнения КдФ от упругих свойств материала колец кровеносного сосуда и физических свойств крови.

Модель кровотока в кровеносном сосуде характерна тем, что рассматриваются колебательные течения несжимаемого флюида, которые естественно моделировать периодическими решениями уравнения КдФ. Именно поэтому рассматриваемый кровоток моделируется кноидальными волнами, которые являются периодическими решениями уравнения КдФ [Черняев, Черняева, 2021]. Пограничными состояниями кровотока являются хорошо известный солитон, а также полученные в настоящей статье вырожденные кноидальные волны. Проведен численный анализ, иллюстрирующий биофизический смысл перерождения кноидальной волны в вырожденную кноидальную волну.

## 2. Основные уравнения движения кровотока в кровеносном сосуде, состоящем из упругих колец

Рассматривается поток несжимаемой жидкости, движущейся в бесконечно длинном круговом цилиндре. Стенки цилиндра состоят из упругих колец. Рассматриваются только продольные изменения давления и продольные изменения скорости. Локальное увеличение давления в жидкости влечет радиально-симметричное растяжение упругих колец в области, где давление повышено. Предполагается также, что кольца между собой не связаны, но расположены так близко друг к другу, что жидкость между ними не протекает. Такое движение жидкости, которое для краткости удобно назвать кровотоком, описывается тремя уравнениями. Уравнение сохранения массы в случае малости длины каждого кольца по сравнению с интересующей нас длиной имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Sv) = 0, \quad (1)$$

где  $t$  — время,  $x$  — координата вдоль оси цилиндра,  $v$  — скорость жидкости и  $S$  — площадь поперечного сечения цилиндра. Ясно, что  $S$  играет роль, аналогичную роли плотности в сжимаемой жидкости. Уравнение сохранения количества движения можно записать в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

где  $\rho_0$  — постоянная плотность жидкости, а  $p = p(x, t)$  — давление в жидкости.

Уравнения (1) и (2) общеизвестны [Кошелев и др., 2010; Абакумов и др., 2000; Корнелик, Бубенчиков, 2003]. Скорость и давление считаем усредненными по радиусу [Лэм, 1983], поэтому модель одномерна. Однако для постановки задачи необходимо уравнение состояния, связывающее давление и площадь поперечного сечения кольца. Это уравнение у разных авторов разное и имеет приближенный характер.

Применение второго закона Ньютона к сегменту упругого кольца [Лэм, 1983] приводит к уравнению

$$\rho_R h l d s \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = p l d s - 2 T_c h l \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right). \quad (3)$$

Здесь  $r = r(x, t)$  — радиус кольца,  $\rho_R$  — плотность материала кольца,  $h$  и  $l$  — толщина и осевая длина кольца соответственно,  $d\theta$  — центральный угол, под которым рассматриваемый сегмент кольца виден из центра, а  $d s$  — дуга, соответствующая этому углу. Окружное напряжение в кольце  $T_c$  связано с растяжением кольца посредством модуля Юнга  $E$  обычным равенством [Лэм, 1983]

$$T_c = \frac{2\pi(r-a)}{2\pi a} E = \frac{r-a}{a} E. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) следует приближенное уравнение состояния [Лэм, 1983]:

$$\frac{2\pi a}{\rho_R h} p = \Delta S \frac{E}{\rho_R a^2} + \frac{\partial^2 \Delta S}{\partial t^2}. \quad (5)$$

В итоге мы имеем систему уравнений (1), (2), (5), определяющую течение исследуемого кровотока, причем уравнение состояния (5) является приближенным.

Для получения уравнений исследуемого кровотока введем безразмерные переменные

$$S = \pi a^2 \tilde{S}, \quad \Delta S = \pi a^2 \Delta \tilde{S}, \quad \Delta S = S - \pi a^2 = \pi a^2 (\tilde{S} - 1), \quad p = p_0 \tilde{p}, \quad p_0 = \frac{Eh}{2a},$$

$$t = T t', \quad T^2 = \frac{\rho_R a^2}{E}. \quad (6)$$

На основании (5) и (6) аналогично [Лэм, 1983] приходим к уравнению состояния исследуемого кровотока в безразмерных переменных:

$$\tilde{p} = \tilde{S} - 1 + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t'^2}. \quad (7)$$

Далее, полагаем

$$x = L x'. \quad (8)$$

Точное выражение для константы  $L$  в (8) мы укажем позже, но это будет связано с уравнением (2). А для первого слагаемого левой части (1) будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \pi a^2 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \pi a^2 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{\pi a^2}{T} \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t'}. \quad (9)$$

В отличие от [Лэм, 1983] предполагаем справедливым равенство

$$v = \frac{L}{T} \tilde{v} \tag{10}$$

и для второго слагаемого левой части (1) получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(Sv) = \pi a^2 \frac{L}{T} \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{S}\tilde{v}) = \pi a^2 \frac{L}{T} \frac{\partial}{\partial x'}(\tilde{S}\tilde{v}) \frac{dx'}{dx} = \pi a^2 \frac{L}{T} \frac{\partial}{\partial x'}(\tilde{S}\tilde{v}) \frac{1}{L} = \frac{\pi a^2}{T} \frac{\partial}{\partial x'}(\tilde{S}\tilde{v}). \tag{11}$$

Благодаря (8)–(11), для любого положительного  $L$  уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'}(\tilde{S}\tilde{v}) = 0. \tag{12}$$

Для первого слагаемого левой части (2) на основании (10) можем написать

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{L}{T} \tilde{v} \right) = \frac{L}{T} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t'} \frac{dt'}{dt} = \frac{L}{T^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t'}. \tag{13}$$

Аналогично: для второго слагаемого левой части (2) благодаря (10) получим

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{L^2}{T^2} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = \frac{L^2}{T^2} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x'} \frac{dx'}{dx} = \frac{L^2}{T^2} \cdot \frac{1}{L} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x'} = \frac{L}{T^2} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x'}. \tag{14}$$

Покажем, что для правой части (2) на основании (6) и

$$L = \left( \frac{\rho_R ah}{2\rho_0} \right)^{1/2} \tag{15}$$

имеем

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x'} \frac{dx'}{dx} = \frac{p_0}{\rho_0 L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x'} = \frac{Eh}{2a} \frac{1}{\rho_0 L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x'} = \frac{Eh}{2a\rho_0} \frac{(2\rho_0)^{1/2}}{(\rho_R ah)^{1/2}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x'} = \frac{Eh^{1/2}}{\sqrt{2}a^{3/2}(\rho\rho_R)^{1/2}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x'}. \tag{16}$$

Из (14), (15) и (16) получаем, что уравнение (2) преобразуется к виду

$$\frac{L}{T^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t'} + \frac{L}{T^2} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x'} = - \frac{E\sqrt{h}}{(2\rho_0)^{1/2} \sqrt{\rho_R} a^{3/2}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x'}. \tag{17}$$

На основании (15) заключаем, что

$$\frac{L}{T^2} = \frac{(\rho_R ah)^{1/2} E}{(2\rho_0)^{1/2} \rho_R a^2} = \frac{E\sqrt{h}}{(2\rho_0)^{1/2} \sqrt{\rho_R} a^{3/2}}. \tag{18}$$

Согласно (17) и (18) приходим к выводу, что уравнение (2) преобразуется к безразмерному виду:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t'} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x'} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x'}. \tag{19}$$

В итоге приходим к системе уравнений (7), (12), (19).

### 3. Метод возмущений получения приближений решения системы безразмерных уравнений, описывающих кровотоки в сосуде из упругих колец

Для применения метода возмущений [Лэм, 1983] вводим новые независимые переменные

$$\varsigma = \chi(x' - t'), \quad \eta = \chi^3 t', \quad \chi \neq 0. \quad (20)$$

Сначала записываем систему (7), (12), (19) в переменных (20). В полученные уравнения подставляем разложения теории возмущений

$$\tilde{p} = p_0 + \chi^2 p_1 + \chi^4 p_2 + \dots; \quad (21)$$

$$\tilde{S} = 1 + S_0 + \chi^2 S_1 + \chi^4 S_2 + \dots; \quad (22)$$

$$\tilde{v} = v_0 + \chi^2 v_1 + \chi^4 v_2 + \dots \quad (23)$$

Приравнивая в полученных уравнениях к нулю коэффициенты при каждой степени  $\chi^2$  и полагая  $S_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ , получаем [Лэм, 1983]

$$-\frac{\partial S_1}{\partial \varsigma} + \frac{\partial v_1}{\partial \varsigma} = 0, \quad (24)$$

$$-\frac{\partial S_2}{\partial \varsigma} + \frac{\partial S_1}{\partial \eta} + \frac{\partial(S_1 v_1)}{\partial \varsigma} + \frac{\partial v_2}{\partial \varsigma} = 0, \quad (25)$$

$$-\frac{\partial v_1}{\partial \varsigma} + \frac{\partial p_1}{\partial \varsigma} = 0, \quad (26)$$

$$-\frac{\partial v_2}{\partial \varsigma} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \varsigma} + \frac{\partial p_2}{\partial \varsigma} = 0, \quad (27)$$

$$p_1 = S_1, \quad (28)$$

$$p_2 = S_2 + \frac{\partial^2 S_1}{\partial \varsigma^2}. \quad (29)$$

Из равенств (26) и (28) следует, что

$$p_1 = S_1 = v_1 + \varphi(\eta), \quad (30)$$

где  $\varphi(\eta)$  – дифференцируемая функция произвольного характера. Сложим (25) и (27):

$$-\frac{\partial S_2}{\partial \varsigma} + \frac{\partial S_1}{\partial \eta} + \frac{\partial(S_1 v_1)}{\partial \varsigma} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \varsigma} + \frac{\partial p_2}{\partial \varsigma} = 0. \quad (31)$$

Дифференцируя по  $\xi$  равенство (29), получим

$$\frac{\partial p_2}{\partial \varsigma} = \frac{\partial S_2}{\partial \varsigma} + \frac{\partial^3 S_1}{\partial \varsigma^3}. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31), будем иметь

$$\frac{\partial S_1}{\partial \eta} + \frac{\partial(S_1 v_1)}{\partial \varsigma} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \varsigma} + \frac{\partial^3 S_1}{\partial \varsigma^3} = 0. \quad (33)$$

Но из (30) можно заключить, что

$$\frac{\partial S_1}{\partial \eta} = \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \varphi'(\eta), \quad \frac{\partial^3 S_1}{\partial \zeta^3} = \frac{\partial^3 v_1}{\partial \zeta^3}, \quad S_1 v_1 = v_1(v_1 + \varphi(\eta)) = v_1^2 + \varphi(\eta)v_1. \quad (34)$$

Из последнего равенства (34) следует

$$\frac{\partial(S_1 v_1)}{\partial \zeta} = 2v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \varphi(\eta) \frac{\partial v_1}{\partial \zeta}. \quad (35)$$

Подставим теперь (34) и (35) в (33):

$$2 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \varphi'(\eta) + 3v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \varphi(\eta) \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 v_1}{\partial \zeta^3} = 0.$$

Поделив последнее на два, в отличие от [Лэм, 1983], получим

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{3}{2} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 v_1}{\partial \zeta^3} + \frac{\varphi(\eta)}{2} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\varphi'(\eta)}{2} = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) отличается от аналогичного уравнения из [Лэм, 1983].

#### 4. Сведение к уравнению Кортевега – де Фриза

Для преобразований

$$\tau = \eta, \quad \zeta = \varsigma + \theta_1 \int \varphi(\eta) d\eta, \quad \widehat{v} = v_1 + \theta_2 \varphi(\eta) \quad (37)$$

имеем

$$v_1 = \widehat{v} - \theta_2 \varphi(\eta), \quad \frac{\partial \tau}{\partial \varsigma} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = 1, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \varsigma} = 1, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \theta_1 \varphi(\eta),$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \tau} + \theta_1 \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \zeta} \varphi(\eta) - \theta_2 \varphi'(\eta), \quad \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} = \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \zeta}. \quad (38)$$

Подставим теперь (38) в (36):

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial \tau} + \theta_1 \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \zeta} \varphi(\eta) - \theta_2 \varphi'(\eta) + \frac{3}{2} (\widehat{v} - \theta_2 \varphi(\eta)) \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \widehat{v}}{\partial \zeta^3} + \frac{\varphi(\eta)}{2} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \zeta} + \frac{\varphi'(\eta)}{2} =$$

$$= \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \widehat{v} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \widehat{v}}{\partial \zeta^3} + \left( \theta_1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \theta_2 \right) \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \zeta} \varphi(\eta) + \left( \frac{1}{2} - \theta_2 \right) \varphi'(\eta) = 0. \quad (39)$$

Полагая в (39)  $\theta_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\theta_2 = \frac{1}{2}$ , получаем уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ) в виде

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \widehat{v} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \widehat{v}}{\partial \zeta^3} = 0. \quad (40)$$

## 5. Получение уравнения Кортевега – де Фриза канонического вида

Основным элементом предлагаемой математической модели будет дифференциальное уравнение в частных производных КдФ классического образца, которое следует из уравнения КдФ специального вида (40). В уравнении (40) считаем, что  $\tau$  – безразмерное время,  $\zeta$  – безразмерная координата вдоль оси цилиндра,  $\widehat{v}$  – безразмерная скорость кровотока.

Заменой переменных

$$\tau = 2\widetilde{t}, \quad \widehat{v} = -2u \quad (41)$$

уравнение (40) приводится к уравнению КдФ классического образца [Полянин, Зайцев, 2002]:

$$\frac{\partial u}{\partial \widetilde{t}} - 6u \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3} = 0. \quad (42)$$

Действительно,

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial \tau} = \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \widetilde{t}} \frac{\partial \widetilde{t}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left( -2 \frac{\partial u}{\partial \widetilde{t}} \right) = -\frac{\partial u}{\partial \widetilde{t}}, \quad \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \zeta} = -2 \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial^3 \widehat{v}}{\partial \zeta^3} = -2 \frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3}.$$

Подставляя последние равенства в уравнение (40), получим

$$-2 \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{3}{2} (-2u) \left( -2 \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) - 2 \frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3} = 0,$$

которое эквивалентно уравнению (42).

## 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные из классического уравнения КдФ типа бегущей волны

В уравнении (42), которое для краткости запишем в виде

$$u_{\widetilde{t}} - 6uu_{\zeta} + u_{\zeta\zeta\zeta} = 0, \quad (43)$$

делаем замену переменных к переменным бегущей волны [Бхатнагар, 1983; Скотт, 2007; Рыскин, Трубецков, 2017; Черняев, Черняева, 2021]:

$$u(\zeta, \widetilde{t}) = u(\xi), \quad \xi = \zeta - c\widetilde{t}, \quad (44)$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) третьего порядка:

$$u'''(\xi) = 6u(\xi)u'(\xi) + cu'(\xi). \quad (45)$$

Понижая порядок уравнения сначала до второго, а затем до первого, будем иметь

$$u''(\xi) = 3u^2(\xi) + cu(\xi) + A, \quad A \in \mathfrak{R}, \quad (46)$$

$$u'(\xi) = \pm \sqrt{2P(u(\xi))}, \quad (47)$$

где

$$P(u) = u^3 + \frac{c}{2}u^2 + Au + B, \quad B \in \mathfrak{R}. \quad (48)$$

Уравнения (47), (46) и (45) не равносильны. Это видно хотя бы из того, что любая константа является решением уравнения (45), однако уравнению (47) удовлетворяют лишь константы,



являющиеся корнями многочлена (48). Обращаясь к теореме [Черняев, Черняева, 2021], получаем, что любое решение уравнения (47) является решением уравнения (46), а любое решение уравнения (46) является решением уравнения (45). Отметим, что уравнение (47) при (48) имеет следующие особенности. Из него непосредственно получаются точные решения уравнения КдФ типа кноидальной волны и солитона, а также получено неограниченное периодическое решение, которое мы назовем вырожденной кноидальной волной [Черняев, Черняева, 2021]. Однако с вычислительной точки зрения (47) при (48) неудобно тем, что в отличие от уравнений (45) и (46) его правая часть не удовлетворяет условию Липшица по переменной  $u$  в промежутках, включающих хотя бы один из корней многочлена (48) [Черняев, Черняева, 2021]. Это условие нарушается [Амосов, Дубинский, Копченова, 1994; Галанин, Савенков, 2010], так как производная правой части (47) по  $u$  в окрестностях корней многочлена (48) неограничена [Кудрявцев, 1986].

Поставим задачу Коши для уравнения (47), выбрав перед правой частью знак плюс. Для этого добавим к уравнению (47) условие

$$u(\xi_0) = u_0. \tag{49}$$

В качестве  $\xi_0$  в (49) нельзя брать значения в точках экстремума, поскольку в этих точках нарушается единственность решения задачи Коши. Это происходит потому, что нарушается условие Липшица правой части (47) по переменной  $u$  [Амосов, Дубинский, Копченова, 1994; Галанин, Савенков, 2010], так как производная правой части (47) по  $u$  в окрестностях корней неограничена [Кудрявцев, 1986]. Таким образом, при выборе начального условия исключаются точки экстремума функции  $u(\xi)$ , так как через них проходят также решения, являющиеся корнями многочлена (48).

Задача Коши для уравнения (46) будет иметь два начальных условия:

$$u(\xi_0) = u_0, \quad u'(\xi_0) = u'_0. \tag{50}$$

Правая часть (46) удовлетворяет условию Липшица по  $u$  и не зависит от  $u'$ . Единственность решения задачи (46), (50) не нарушается, и условия (50) можно задавать везде.

Задача Коши для уравнения (45) будет иметь три начальных условия:

$$u(\xi_0) = u_0, \quad u'(\xi_0) = u'_0, \quad u''(\xi_0) = u''_0. \tag{51}$$

Правая часть (51) удовлетворяет условию Липшица по  $u$  и  $u'$  и не зависит от  $u''$ . Единственность решения задачи (45), (51) не нарушается, и условия (51) можно задавать везде.

## 7. Точные решения классического уравнения КдФ типа кноидальной волны

Запишем многочлен (48) в виде

$$P(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3), \quad u_1 < u_2 < u_3, \tag{52}$$

где

$$c = -2(u_1 + u_2 + u_3), \quad A = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1, \quad B = -u_1u_2u_3. \tag{53}$$

Обращаясь к [Бхатнагар, 1983; Черняев, Черняева, 2021], имеем решение уравнения (43) типа кноидальной волны:

$$u(\xi) = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2 \left( \pm \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} (\xi + c_1), k \right) = u_2 - (u_2 - u_1) \operatorname{cn}^2 \left( \pm \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} (\xi + c_1), k \right). \tag{54}$$

В (54)  $\operatorname{sn}(F, k)$ ,  $\operatorname{cn}(F, k)$  — эллиптические функции Якоби,

$$k = \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}}. \quad (55)$$

Период решений (54) выражается формулой [Бхатнагар, 1983]

$$T = \frac{1}{\sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}}} \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2\tau^2)}} = \frac{K(k)}{\sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}}}. \quad (56)$$

В (56)  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

В качестве иллюстрации приведем сначала график многочлена (48) или (49) при формулах связи (53) (рис. 1).

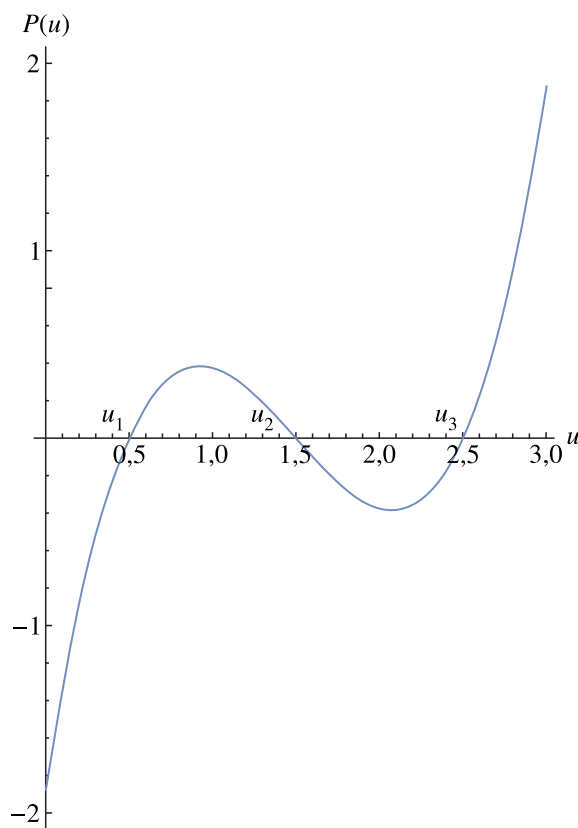


Рис. 1. График многочлена  $P(u)$  при  $u_1 = 0,5$ ,  $u_2 = 1,5$ ,  $u_3 = 2,5$

Если мы положим  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 2$ ,  $u_3 = 3$ , тогда  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , и мы получим уравнение (47) с учетом (52):

$$u'(\xi) = \pm \sqrt{2(u-1)(u-2)(u-3)}.$$

Его решение, согласно выражению (54), будет иметь вид

$$u = 2 - \operatorname{cn}^2\left(\pm(\xi + c_1), \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Константу  $c_1 \approx 0,826018$  найдем приближенно из трансцендентного уравнения  $\operatorname{cn}^2\left(\pm c_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,5$ . Далее, строим график функции  $u(\xi) = 2 - \operatorname{cn}^2\left(\pm(\xi + 0,826018), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  (рис. 2).

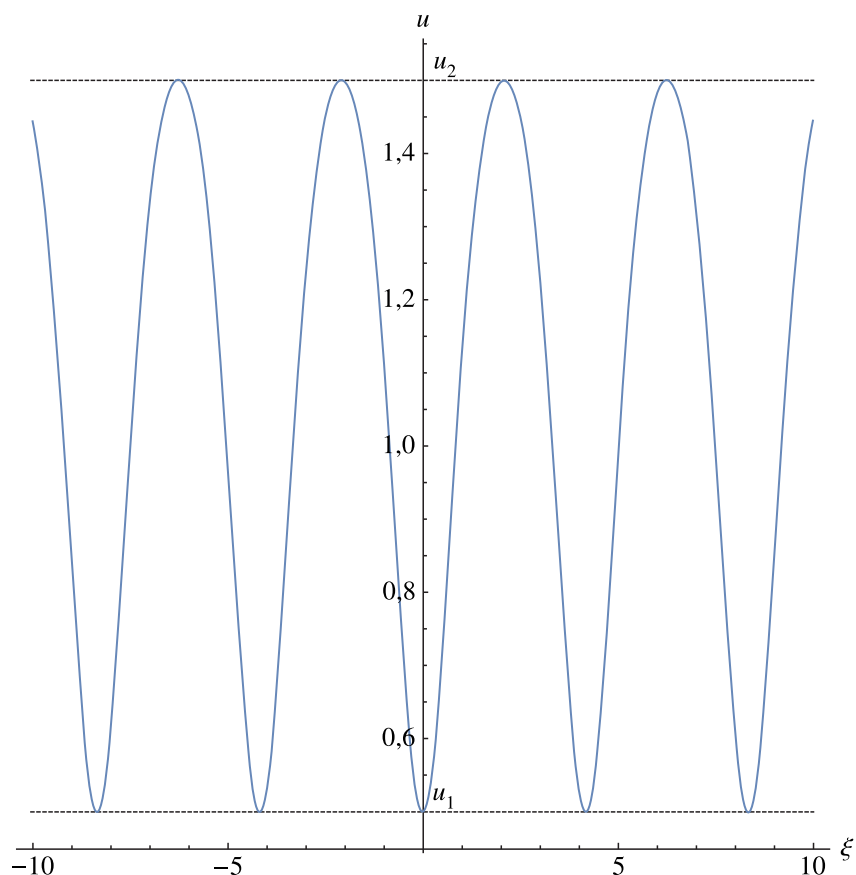


Рис. 2. График кноидальной волны  $u = 2 - \text{cn}^2\left(\pm(\xi + c_1), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , где  $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$  при  $\xi \in [-10, 10]$ , — точного решения дифференциального уравнения  $u' = \sqrt{2(u-1)(u-2)(u-3)}$ , где константа  $c_1$  — решение трансцендентного уравнения  $\text{cn}^2\left(\pm c_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,5$ , приближение к которому равно  $c_1 \approx 0,826018$

### 8. Точные решения классического уравнения КдФ типа вырожденной кноидальной волны

Рассмотрим случай, когда вещественные корни удовлетворяют условиям  $u_1 = u_2 < u_3$ . Выражение  $P(u)$  через корни будет иметь вид

$$P(u) = (u - u_1)^2(u - u_3). \tag{57}$$

График  $P(u)$  приведен на рис. 3. При  $u \leq u_3$  существуют два стационарных решения уравнения (47):  $u = u_1$  и  $u = u_3$ . Чтобы получить нестационарные решения, рассмотрим  $u > u_3$ . Из (47) и (57) следует, что

$$\frac{du}{(u - u_1)\sqrt{u - u_3}} = \pm \sqrt{2}d\xi. \tag{58}$$

Замена

$$\tilde{\zeta}^2 = u - u_3, \quad du = 2\tilde{\zeta}d\tilde{\zeta}, \quad u = \tilde{\zeta}^2 + u_3 \tag{59}$$

приводит уравнение (58) к виду

$$\pm \sqrt{2}d\xi = \frac{2d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}^2 + (u_3 - u_1)}. \tag{60}$$

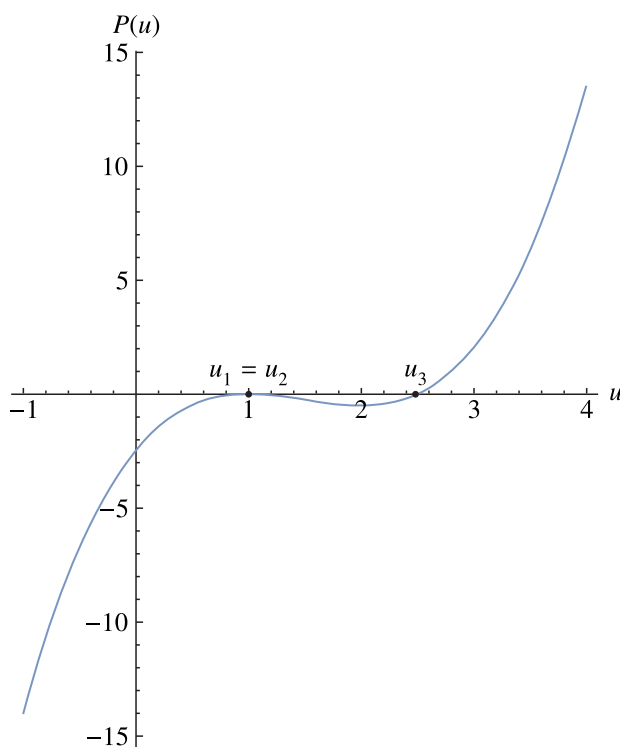


Рис. 3. График многочлена  $P(u)$  при  $u_1 = u_2 = 1$ ,  $u_3 = 2,5$

После интегрирования (60) получим

$$\pm \frac{\xi + c_2}{\sqrt{2}} \sqrt{u_3 - u_1} = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{S}}{\sqrt{u_3 - u_1}}, \quad (61)$$

где  $c_2$  — постоянная интегрирования.

Возьмем тангенс от обеих частей (61), возведем их в квадрат и, обращаясь к (59), получим неограниченное решение при  $u > u_3$ :

$$u(\xi) = u_3 + (u_3 - u_1) \operatorname{tg}^2 \left( (\xi + c_2) \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} \right), \quad u > u_3. \quad (62)$$

На рис. 4 построен график (62) при  $u_1 = u_2 = 1$ ,  $u_3 = 2,5$ ,  $c_2 = 0$ .

Обращаясь к формулам (34), (37), (38), (41), (44) и (62), а также рис. 4, можно заключить, что стремление в некоторых точках к плюс бесконечности функции  $u$  ведет к стремлению в тех же точках к плюс бесконечности функций  $\hat{v}$  и  $v_1$  — первого приближения скорости кровотока. Значит, согласно (30), и функции  $p_1$  (первое приближение давления) и  $S_1$  (первое приближение сечения сосуда) стремятся к плюс бесконечности в тех же точках. Но поскольку в некоторых точках кровотока первое приближение давления и первое приближение сечения сосуда стремятся к плюс бесконечности, то из формулы (21) давление и сечение сосуда также стремятся к плюс бесконечности в тех же точках.

Сравнивая графики рис. 1 и рис. 4, можно численно и качественно проследить процесс перерождения кноидальной волны в вырожденную кноидальную волну, аналогично тому, как мы исследовали перерождение кноидальной волны в солитон [Черняев, Черняева, 2021].

Для этого составим таблицу численных значений полных эллиптических интегралов и периода на основании формул (55) и (56). Чтобы получить столбцы матрицы перерождения кноидальной волны в вырожденную кноидальную волну, мы в формулах (55) и (56) положили  $u_1 = 1$

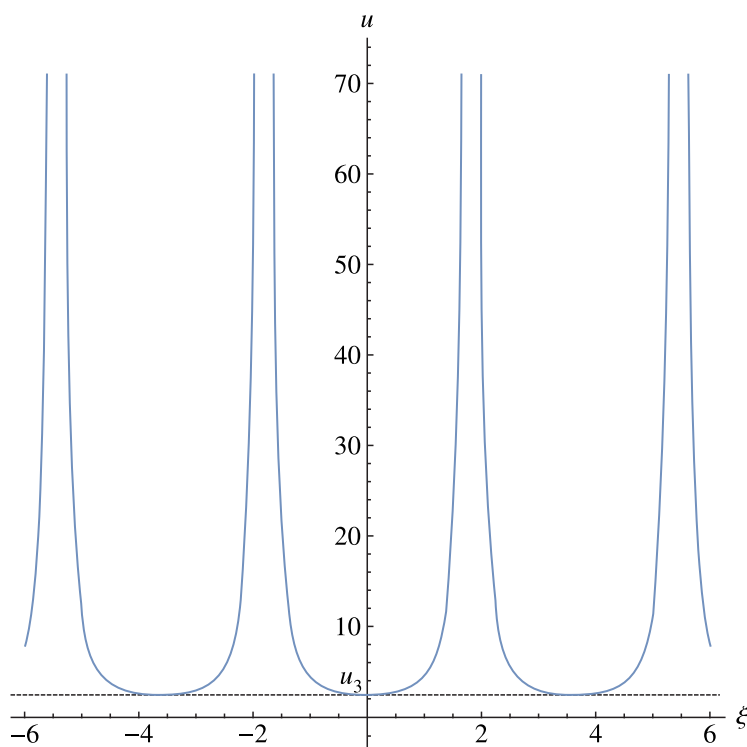


Рис. 4. График вырожденной кноидальной волны  $u(\xi) = 2,5 + 1,5 \operatorname{tg}^2(\xi \sqrt{0,75})$ ,  $u > 2,5$ , где  $u_1 = u_2 = 1$ ,  $u_3 = 2,5$  при  $\xi \in [-6, 6]$ , — точного решения дифференциального уравнения  $\frac{du}{(u-1)\sqrt{u-2,5}} = \pm \sqrt{2}d\xi$ , где константа интегрирования  $c_2 = 0$

и  $u_3 = 2,5$ , а  $u_2$  уменьшаем от 1,75 до 1. Тогда

$$T = \sqrt{\frac{2}{1,5}} \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} = \frac{2K(k)}{\sqrt{3}}. \tag{63}$$

Итак, третий столбец таблицы — это значения полного эллиптического интеграла  $K(k)$ , а четвертый — значения периода  $T$  (63) кноидальной волны.

Из таблицы, если не принимать во внимание третий столбец, следует, что по мере приближения  $u_2$  к  $u_1 = 1$   $K(k)$  монотонно убывает до  $\frac{\pi}{2} \approx 1,57079632$ , т.е. до числа, стоящего внизу третьего столбца. Это значит, что  $u_2$  как бы выдавливает кровоток из промежутка  $[u_1, u_2]$  в промежуток  $[u_3, +\infty)$ , который опасен возможностью разрыва сосуда.

Если не принимать во внимание второй столбец, то, увеличивая  $u_3$ , мы достигаем аналогичного эффекта, ибо уменьшать переменную первого столбца можно, как уменьшая  $u_2$ , так и увеличивая  $u_3$ .

Аналогично можно устраивать и другие режимы кровотока.

Если мы поставим задачу Коши для ОДУ первого порядка, то в качестве  $\xi_0$  в (49) нельзя брать значение, в котором вырожденная кноидальная волна достигает экстремума, поскольку в этой точке нарушается единственность решения задачи Коши. Таким образом, при выборе начального условия исключается точка минимума функции (32), так как через нее также проходит решение  $u = u_3$  уравнения

$$\frac{du}{(u-u_1)\sqrt{u-u_3}} = \pm \sqrt{2}d\xi, \tag{64}$$

которое следует из (47) и (57).

Таблица 1. Перерождение кноидальной волны в вырожденную кноидальную волну

$k^2$	$u_2 (u_1 = 1, u_3 = 2,5)$	$u_3 (u_1 = 1, u_2 = 2)$	$K(k)$	$T$
0,50	1,750	3,000	1,85407467	2,14090102
0,45	1,675	3,222	1,81388393	2,09449275
0,40	1,600	3,500	1,77751937	2,05250258
0,35	1,525	3,857	1,74435059	2,01420257
0,30	1,450	4,333	1,71388944	1,97902906
0,25	1,375	5,000	1,68575035	1,94653684
0,20	1,300	6,000	1,65962359	1,91636826
0,15	1,225	7,666	1,63525673	1,88823183
0,10	1,150	11,000	1,61244134	1,86188689
0,05	1,075	21,000	1,59100345	1,83713254
0,04	1,060	27,000	1,58686784	1,83235715
0,03	1,045	34,333	1,58278034	1,82763731
0,02	1,030	51,000	1,57873991	1,82297183
0,01	1,015	101,000	1,57474556	1,81835955
0,00	1,000	$+\infty$	1,57079632	1,81379936

Если мы поставим задачу Коши для ОДУ второго порядка, то правая часть этого уравнения удовлетворяет условию Липшица по  $u$  и не зависит от  $u'$ , поэтому единственность решения задачи Коши с условиями (50) не нарушается.

Если мы поставим задачу Коши для ОДУ третьего порядка, то правая часть этого уравнения удовлетворяет условию Липшица по  $u$  и по  $u'$ , а также не зависит от  $u''$ .

Поэтому единственность решения задачи Коши с условиями (51) не нарушается.

## 9. Точные решения классического уравнения КдФ типа «солитон»

В случае когда второй и третий корни многочлена (49) становятся равными:

$$u_1, u_2, u_3 \in \mathfrak{R}: \quad u_1 < u_2 = u_3, \quad (65)$$

то кноидальная волна вырождается в солитон [Черняев, Черняева, 2021]:

$$u(\xi) = u_1 + (u_2 - u_1) \left( \frac{1 - e^{-\sqrt{2(u_2-u_1)(\xi+c_3)}}}{1 + e^{-\sqrt{2(u_2-u_1)(\xi+c_3)}}} \right)^2 = u_1 + (u_2 - u_1) \left( \frac{e^{\sqrt{2(u_2-u_1)(\xi+c_3)}} - 1}{e^{\sqrt{2(u_2-u_1)(\xi+c_3)}} + 1} \right)^2. \quad (66)$$

Действительно, когда действительные корни многочлена (49) удовлетворяют условиям (65), то выражение  $P(u)$  через корни будет иметь вид

$$P(u) = (u - u_1)(u - u_2)^2. \quad (67)$$

График  $P(u)$  приведен на рис. 5. При  $u \leq u_3$  существуют два стационарных решения уравнения (47):  $u = u_1$  и  $u = u_2 = u_3$ .

Также в качестве иллюстрации приведем сначала график многочлена (48) или (49) при формулах связи (50), но при условии (65) или, что то же самое, многочлена (67) при  $u_1 = u_2 = 1$ ,  $u_3 = 2,5$  (рис. 5).

Затем приведем график солитона, т.е. уединенной волны (66) (рис. 6). Подробно превращение кноидальной волны в солитон рассмотрено в [Черняев, Черняева, 2021].

Если мы поставим задачу Коши для ОДУ первого порядка, то в качестве  $\xi_0$  в (49) нельзя брать значение, в котором солитон достигает минимума, поскольку в этой точке нарушается

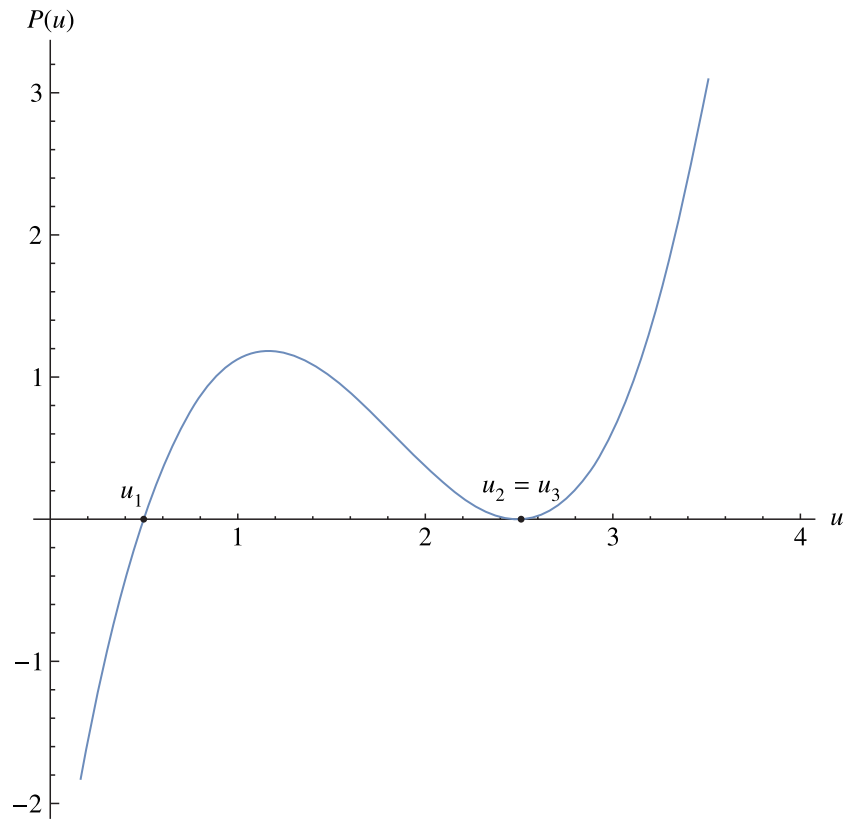


Рис. 5. График многочлена  $P(u)$  при  $u_1 = 0,5, u_2 = u_3 = 2,5$

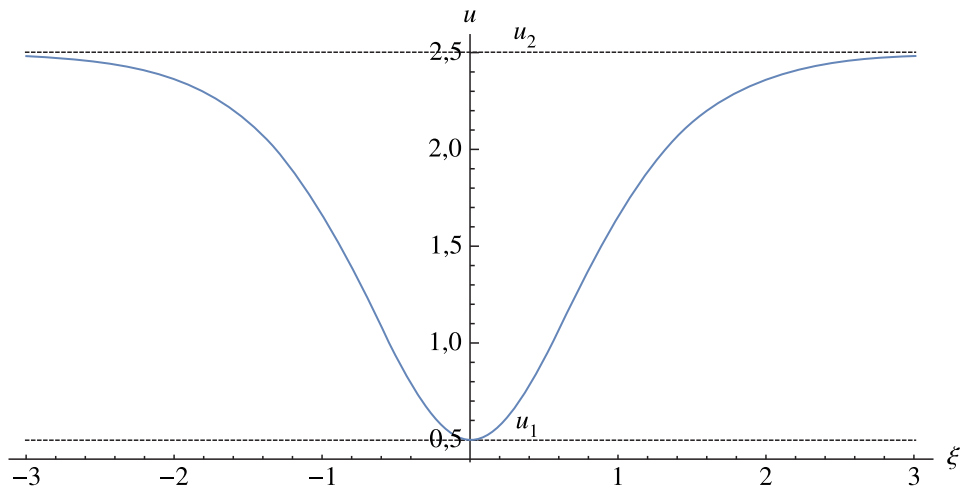


Рис. 6. График уединенной волны, т. е. солитона  $u(\xi) = 0,5 + \left(\frac{e^{2\xi}-1}{e^{2\xi}+1}\right)^2$  — точного решения дифференциального уравнения  $\frac{du}{(u-2,5)\sqrt{u-0,5}} = \pm \sqrt{2}d\xi$ , где константа  $c_3 = 0$

единственность решения задачи Коши. Таким образом, при выборе начального условия исключается точка экстремума функции (66), так как через нее также проходит решение  $u = u_1$  уравнения

$$u'(\xi) = \pm(u - u_2)\sqrt{2(u - u_1)}, \tag{68}$$

которое следует из (49) и (67).

Если мы поставим задачу Коши для ОДУ второго порядка, то правая часть этого уравнения удовлетворяет условию Липшица по  $u$  и не зависит от  $u'$ , поэтому единственность решения задачи Коши с условиями (50) не нарушается.

Если мы поставим задачу Коши для ОДУ третьего порядка, то правая часть этого уравнения удовлетворяет условию Липшица по  $u$  и по  $u'$ , а также не зависит от  $u''$ .

Поэтому единственность решения задачи Коши с условиями (51) не нарушается.

## 10. Дискуссия

Замена (10) и уравнение (36) отличаются от аналогичных замены и уравнения в книге [Лэм, 1983] и впервые получены автором.

Важно, что правая часть (47) не удовлетворяет условию Липшица. Это затрудняет использование стандартных численных методов для исследования свойств решений этого уравнения.

Важны свойства корней многочлена (48). Стремление среднего корня к левому приводит к вырожденным кноидальным волнам (рис. 4). Физически это можно трактовать как резкое увеличение скорости кровотока, а значит, и давления. Это может привести к разрыву сосуда. Стремление среднего корня к правому приводит к биофизическому смыслу предельного перехода кноидальной волны в солитон (рис. 6) [Черняев, Черняева, 2021] (деконирование — выключение части объема из кровотока). Важна способность управлять средним корнем.

Обращаясь к статье [Гусейнов, 2006], имеем для уравнения КдФ (43) задачу

$$\begin{aligned} u(\zeta, 0) = h(\zeta), \quad \zeta \in [0, \bar{l}]; \quad u(0, \bar{t}) = \varphi_1(\bar{t}), \quad \bar{t} \in [0, \bar{T}]; \quad u(\bar{l}, \bar{t}) = \varphi_2(\bar{t}), \quad \bar{t} \in [0, \bar{T}]; \\ u_{\zeta}(0, \bar{t}) = \varphi_3(\bar{t}), \quad \bar{t} \in [0, \bar{T}]; \quad h(0) = \varphi_1(0), \quad h(\bar{l}) = \varphi_2(0), \quad h'(0) = \varphi_3(0). \end{aligned} \quad (69)$$

Для всех трех решений, найденных в работе, довольно просто найти правые части формул (69) при любых значениях параметров  $\bar{l}$  и  $\bar{T}$ . По внешнему виду этих постановок невозможно определить, какое это будет решение: кноидальная волна, вырожденная кноидальная волна или солитон. Поэтому даже при наличии точных формул для этих решений к приближенным методам обращаться приходится, если нужно продолжение решений [Черняев, Черняева, 2021].

Следует остановиться на ряде статей, относящихся к той же теме: гемодинамике одного сосуда. Может показаться, что в уравнениях (1) и (2) не учитывается трение, что может привести к искажению результатов. Указанное трение учитывается в работе [Мухин, Соснин, Фаворский, 2006]. Однако в этой работе сразу после вывода уравнений следует их линеаризация, которая также может привести к искажению результатов. И все равно это совсем другая модель. Уравнение состояния здесь совершенно другое.

Мы, например, не рассматриваем вязко-упругого члена, ибо наша цель — уточнить и развить модель Дж. Лэма, которая приспособлена для солитонов. Предлагаемая же в настоящей статье модель кровотока строится на кноидальных волнах. Отсюда и необходимость некоторых изменений и уточнений. Мы даже не включаем в модель закон Пуазейля, ибо в этом случае модель перестает быть одномерной, а модель Дж. Лэма одномерна.

Относительно новизны §§ 6–9 отметим следующее. Несмотря на естественный процесс понижения порядка (ОДУ (47) получено из (46), а (46) — из (45)), множества решений ОДУ (45), (46) и (47) разные. ОДУ (47) удобно для отыскания точных решений, однако не все эти точные решения удовлетворяют уравнениям (45) и (46). Это происходит из-за нарушения условия Липшица в правой части (47). Теорема об этом [Черняев, Черняева, 2021] вносит коррективы в изложение автоволнового приближения в §§ 6–9. В частности, из теоремы следует, что начальные условия для ОДУ (47) нельзя задавать произвольно. Именно для этого в §§ 6–9 приведены точные решения КдФ типа кноидальной волны, вырожденной кноидальной волны и солитона и показано, что начальные условия для модели кровотока надо задавать в точках убывания или



раста. В § 8 также приводятся численные результаты в виде таблицы, характеризующие превращение кноидальной волны в вырожденную кноидальную волну при совпадении промежуточного корня с наименьшим. Если соотнести эти новые результаты и результаты работы [Черняев, Черняева, 2021] с моделью Холодова – Симакова [Холодов, 2001; Симаков, Холодов, 2008] в интерпретации для однокамерного сердца [Черняев, 2019], то можно сделать вывод, что как остановка колебательного режима [Черняев, Черняева, 2021], так и разрыв стенки сосуда происходят из-за сосудистой части. Это происходит в силу того, что в модели Холодова – Симакова объем сердечной камеры удовлетворяет уравнению вынужденных колебаний. Подобное умозаключение в более сложных моделях кровотока других авторов не прослеживается.

Статья [Canic, Kim, 2003] посвящена математическому анализу квазилинейных эффектов, возникающих в гиперболической системе дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующих течение крови по крупным податливым сосудам. Таким образом, изучается совершенно другой математический объект. Нас же интересует лишь модель Дж. Лэма – сосуда, состоящего из упругих колец, – приводящая к уравнению КдФ. Другие модели нас не интересуют, хотя образование ударной волны в работе [Canic, Kim, 2003] и образование солитона при совпадении промежуточного корня с наибольшим у многочлена (48) – явления в некотором смысле родственные. Статьи [Vedeneev, 2020; Podoprosvetova, Vedeneev, 2022] также предполагают совершенно другую модель. Там исследуются возможные стационарные состояния бесконечно длинной трубы из гиперупругого материала. Трубка в этих статьях не состоит из упругих колец, и математическая модель совсем другая, однако численных результатов, которые выглядят аналогичным образом, довольно много.

Отметим статью [Voileau et al., 2015]. В ней рассматривается существенно одномерная модель кровотока в сосуде. Однако все равно модель другая. Уравнение сохранения массы этой статьи совпадает с нашим уравнением. Уравнение сохранения импульса в этой статье неоднородно в отличие от нашего однородного. Но самое большое отличие – это уравнения состояния. Они совсем различны, потому что стенки сосуда в этой статье состоят не из упругих колец, как у Дж. Лэма и у нас, а являются стенками деформируемой трубки. Кроме того, статья [Voileau et al., 2015] полностью вычислительная и у нее нет аналитической компоненты.

Вопросы пульсации однокамерного сердца, когда сердечная камера подчиняется уравнению вынужденных колебаний, подробно изложены в нашей работе [Черняев, 2019].

Разобранные нами модели, на первый взгляд схожие с нашей, либо не являются одномерными, либо, несмотря на то что являются одномерными и рассматривают факторов больше, чем мы, допускают или линеаризацию, или другие существенные упрощения. Поэтому соображения, что эти статьи рассматривают процесс более качественно, чем мы, не имеют достаточных оснований. И самое главное, что эти работы другие как с точки зрения физики процесса, так и с точки зрения изучаемой математической постановки.

## 11. Заключение

1. Рассматривается несжимаемая жидкость в бесконечно длинном кровеносном сосуде. Стенки сосуда составлены из упругих колец. Локальное увеличение давления в жидкости (а рассматриваются лишь продольные изменения давления) вызывает радиально-симметричное растяжение упругих колец в области, где давление повышено. Так как кольца не связаны между собой, но расположены близко друг к другу, и жидкость между ними не протекает, то упругие волны в осевом направлении вдоль цилиндрической поверхности не распространяются. Круговой цилиндр моделирует кровеносный сосуд, а поток жидкости в нем моделирует кровоток.

2. В рассмотренной модели пульсирует кровеносный сосуд. Сердце, например однокамерное [Черняев, 2019], у которого сердечная камера подчиняется уравнению вынужденных колебаний [Холодов, 2001; Симаков, Холодов, 2008], играет роль начальных условий на входе.

Кровеносный сосуд как бы пульсирует вместе с сердцем. Он как бы поддерживает пульсационный ритм кровотока, если течение происходит в определенном в работе интервале скоростей, а именно между первым и вторым постоянными решениями уравнения Кортевега – де Фриза.

3. Если первое и второе постоянные решения уравнения Кортевега – де Фриза становятся равными, то кноидальные волны переходят в вырожденные кноидальные волны — неограниченные периодические решения уравнения КдФ. Физически это может означать разрыв стенок сосуда.

4. Если второе и третье постоянные решения уравнения Кортевега – де Фриза становятся равными, то пульсационное течение, задаваемое кноидальной волной, вырождается в уединенную волну, задаваемую солитоном [Черняев, Черняева, 2021]. После этого пульсация прекращается.

5. Все графики построены в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

## Благодарности

Выражаю благодарность Алексею Ивановичу Лобанову за полезные обсуждения и внимание к работе.

## Список литературы (References)

- Абакумов М. В., Ашметков И. В., Есикова Н. Б. и др.* Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы // Математическое моделирование. — 2000. — Т. 12, № 2. — С. 106–117.
- Abakumov M. V., Ashmetkov I. V., Esikova N. B. et al.* Metodika matematicheskogo modelirovaniya serdechno-sosudistoi sistemi [Methods of mathematical modeling of the cardiovascular system] // Mathematical Modeling. — 2000. — Vol. 12, No. 2. — P. 106–117 (in Russian).
- Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров: учеб. пособие. — М.: Высшая школа, 1994. — 544 с.
- Amosov A. A., Dubinsky Yu. A., Kopchenova N. B.* Vichislitelnye metody dlya ingenerov [Computational methods for engineers]: studies. — Moscow: Higher School, 1994. — 544 p. (in Russian).
- Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. — М.: Мир, 1983. — 136 с.
- Bhatnagar P.* Nelineinye volny v odnomernykh dispergiruiyushih sistemah [Nonlinear waves in one-dimensional dispersing systems]. — Moscow: Mir, 1983. — 136 p. (in Russian).
- Галанин М. П., Савенков Е. Б.* Методы численного анализа математических моделей. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. — 591 с.
- Galanin M. P., Savenkov E. B.* Metody chislennogo analiza matematicheskikh modelei [Methods of numerical analysis of mathematical models]. — Moscow: Izd-vo MG TU im. N. Uh. Bauman, 2010. — 591 p. (in Russian).
- Гусейнов Ш. Э.* Метод сведения одной нелинейной задачи для уравнения Кортевега – де Фриза к нелинейному интегральному уравнению Вольтерры // Computer Modelling and New Technologies. — 2006. — Vol. 10, № 2. — P. 68–74.
- Guseinov Sh. E.* Metod svedeniia odnoi nelineinonii zadachi dlia uravneniia Kortevega – de Friza k nelineinomu integralnomu uravneniiu Volterra [Method of reduction of one non-linear problem for Korteweg – de Freeze equation to non-linear integral-differential equation of Volterra type] // Computer Modelling and New Technologies. — 2006. — Vol. 10, No. 2. — P. 68–74.
- Корнелик С. Е., Бубенчиков А. И.* Вычислительная гемодинамика: учебное пособие. — Томск: Томский государственный университет, 2003. — 410 с.
- Kornelik S. E., Bubenchikov A. I.* Vichislitelnaia gemodinamika [Computational hemodynamics]: textbook. — Tomsk: Tomsk State University, 2003. — 410 p. (in Russian).
- Кошелев В. Б., Мухин С. И., Соснин Н. В. и др.* Математические модели квазиодномерной гемодинамики: метод. пособие. — М.: МАКС Пресс, 2010. — 114 с.
- Koshelev V. B., Mukhin S. I., Sosnin N. V. et al.* Matematicheskie modeli kvaziodnomernoi gemodinamiki [Mathematical models of quasi-one-dimensional hemodynamics]: method. allowance. — Moscow: MAKS Press, 2010. — 114 p. (in Russian).

- Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1986. — 736 с.  
*Kudryavtsev L. D.* Kratkii kurs matematicheskogo analiza [Short course of mathematical analysis]. — Moscow: Science, 1986. — 736 p. (in Russian).
- Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983. — 294 с.  
*Lam J. L.* Vvedenie v teoriu solitonov [Introduction to the theory of solitons]. — Moscow: Mir, 1983. — 294 p. (in Russian).
- Мухин С. И., Соснин Н. В., Фаворский А. П.* Исследование влияния вязкого трения на пульсовую волну // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 7. — С. 979–993.  
*Mukhin S. I., Sosnin N. V., Favorskii A. P.* The effect of viscous friction on pulse waves // Diff. equations. — 2006. — Vol. 42, No. 7. — P. 1041–1056. (Original Russian paper: *Mukhin S. I., Sosnin N. V., Favorsky A. P.* Issledovanie vliianiia viazkogo treniia na pulsovuiu volnu // Differential Equations. — 2006. — Vol. 42, No. 7. — P. 979–993.)
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. — М.: Физматлит, 2002. — 432 с.  
*Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Spravochnik po nelineinym uravneniiam matematicheskoi fiziki: tochnye resheniya [Handbook of nonlinear equations of mathematical physics: exact solutions]. — Moscow: Fizmatlit, 2002. — 432 p. (in Russian).
- Рыскин Н. М., Трубецков Д. И.* Нелинейные волны. — М.: ЛЕНАНД (Урсс), 2017. — 312 с.  
*Ryskin N. M., Trubetskov D. I.* Nelineinye volny [Nonlinear waves]. — Moscow: LENAND (Urss), 2017. — 312 p. (in Russian).
- Симаков С. С., Холодов А. С.* Численное исследование содержания кислорода в крови человека при низкочастотных воздействиях // Математическое моделирование. — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 87–102.  
*Simakov S. S., Kholodov A. S.* Computational study of oxygen concentration in human blood under low frequency disturbances // Math. Models Comput. Simul. — 2008. — Vol. 1, No. 2. — P. 283–295. (Original Russian paper: *Simakov S. S., Kholodov A. S.* Chislennoe issledovanie soderganiia kisloroda v krovi cheloveka pri nizkochastotnikh vozdeistviakh // Math. modeling. — 2008. — Vol. 20, No. 4. — P. 87–102.)
- Скотт Э.* Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. — М.: Физматлит, 2007. — 560 с.  
*Scott E.* Nelineinaya nauka: rogenie i razvitie kogerentnykh struktur [Nonlinear science: the birth and development of coherent structures]. — Moscow: Fizmatlit, 2007. — 560 p. (in Russian).
- Холодов А. С.* Некоторые динамические модели внешнего дыхания и кровообращения с учетом их связности и переноса веществ // Компьютерные модели и прогресс медицины. — М.: Наука, 2001. — С. 127–163.  
*Kholodov A. S.* Nekotore dinamicheskie modeli vneshnego dikhaniia i krovoobratheniia s uchetom ikh sviaznosti i perenosa veshchestv [Some dynamic models of external respiration and blood circulation taking into account their connectivity and transfer of substances] // Computer models and progress in medicine. — Moscow: Nauka, 2001. — P. 127–163.
- Черняев А. П.* Основы гипотезы условий ритмичной работы сердечной камеры в рамках некоторых математических моделей // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. — 2019. — № 6. — <http://jre.cplire.ru/jre/jun19/11/text.pdf>  
*Chernyaev A. P.* Osnovy gipotezy uslovii ritmichnoi raboty serdechnoi kamery v ramkah nekotorykh matematicheskikh modelei [Fundamentals of the hypothesis of the rhythmic conditions of the cardiac chamber in the framework of some mathematical models] // Journal of Radio Electronics [electronic journal]. — 2019. — No. 6. — <http://jre.cplire.ru/jre/jun19/11/text.pdf> (in Russian).
- Черняев А. П., Черняева С. А.* Особенности численных решений некоторых задач для кноидальной волны как периодического решения уравнения Кортевега – де Фриза // Компьютерные исследования и моделирование. — 2021. — Т. 13, № 5. — С. 885–901.  
*Chernyaev A. P., Chernyaeva S. A.* Osobennosti chislennikh reshenii nekotorykh zadach dlia knoidalnoi volni kak periodicheskogo resheniia uravneniia Kortevega – de Friza [Peculiarities of numerical solutions of some problems for a cnoidal wave as a periodic solution of the Korteweg – De Vries equation] // Computer Research and Modeling. — 2021. — Vol. 13, No. 5. — P. 885–901 (in Russian).
- Boileau E., Nithiarasu P., Blanco P. J. et al.* A benchmark study of 1-D numerical schemes for arterial blood flow modeling // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. — 2015. — P. 1–43.

- Canic S., Kim E.H.* Mathematical analysis of the quasilinear effects in a hyperbolic model of blood flow through compliant axisymmetric vessels // *Mathematical Methods in Applied Sciences.* — 2003. — Vol. 26, No. 14. — P. 1161–1186.
- Podprosvetova A., Vedeneev V.* Axisymmetric instability of elastic tubes conveying power-law fluids // *Journal of Fluid Mechanics.* — 2022. — Vol. 941. — A61. — DOI: 10.1017/jfm.2022.332
- Vedeneev V.* Nonlinear steady states of hyperelastic membrane tubes conveying a viscous non-Newtonian fluid // *Journal of Fluids and Structures.* — 2020. — Vol. 98. — 103113.