КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2024 Т. 16 № 2 С. 287–297
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-2-287-297

УДК: 519.6

Статистическое распределение фазы квазигармонического сигнала: основы теории и компьютерное моделирование

Т. В. Яковлева

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2

E-mail: tan-ya@bk.ru

Получено 04.08.2023, после доработки — 10.08.2023.
Принято к публикации 05.02.2024.

В работе представлены результаты фундаментального исследования, направленного на теоретическое изучение и компьютерное моделирование свойств статистического распределения фазы квазигармонического сигнала, формируемого в результате воздействия гауссовского шума на исходно гармонический сигнал. Методами математического анализа получены в явном виде формулы для основных характеристик данного распределения — функции распределения, функции плотности вероятности, функции правдоподобия. В результате проведенного компьютерного моделирования проанализированы зависимости данных функций от параметров распределения фазы. В работе разработаны и обоснованы методы оценивания параметров распределения фазы, несущих информацию об исходном, не искаженном шумом сигнале. Показано, что задача оценивания исходного значения фазы квазигармонического сигнала может эффективно решаться простым усреднением результатов выборочных измерений фазы, в то время как для решения задачи оценивания второго параметра распределения фазы — параметра уровня сигнала относительно шума — предлагается использовать метод максимума правдоподобия. В работе представлены графические материалы, полученные путем компьютерного моделирования основных характеристик исследуемого статистического распределения фазы. Существование и единственность максимума функции правдоподобия позволяют обосновать возможность и эффективность решения задачи оценивания уровня сигнала относительно уровня шума методом максимума правдоподобия. Развиваемый в работе метод оценивания уровня незашумленного сигнала относительно уровня шума, т. е. параметра, характеризующего интенсивность сигнала, на основании измерений фазы сигнала является оригинальным, принципиально новым, открывающим перспективы использования фазовых измерений как инструмента анализа стохастических данных. Данное исследование является значимым для решения задач расчета фазы и уровня сигнала методами статистической обработки выборочных фазовых измерений. Предлагаемые методы оценивания параметров распределения фазы квазигармонического сигнала могут использоваться при решении различных научных и прикладных задач, в частности, в таких областях, как радиофизика, оптика, радиолокация, радионавигация, метрология.

Ключевые слова: квазигармонический сигнал, гауссовский шум, отношение сигнала к шуму, функция распределения, функция плотности вероятности, функция правдоподобия, интеграл ошибок

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2024 VOL. 16 NO. 2 P. 287–297
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-2-287-297

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 519.6

Statistical distribution of the quasi-harmonic signal's phase: basics of theory and computer simulation

T. V. Yakovleva

Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences,
44/2 Vavilov st., Moscow, 119333, Russia

E-mail: tan-ya@bk.ru

Received 04.08.2023, after completion — 10.08.2023.
Accepted for publication 05.02.2024.

The paper presents the results of the fundamental research directed on the theoretical study and computer simulation of peculiarities of the quasi-harmonic signal's phase statistical distribution. The quasi-harmonic signal is known to be formed as a result of the Gaussian noise impact on the initially harmonic signal. By means of the mathematical analysis the formulas have been obtained in explicit form for the principle characteristics of this distribution, namely: for the cumulative distribution function, the probability density function, the likelihood function. As a result of the conducted computer simulation the dependencies of these functions on the phase distribution parameters have been analyzed. The paper elaborates the methods of estimating the phase distribution parameters which contain the information about the initial, undistorted signal. It has been substantiated that the task of estimating the initial value of the phase of quasi-harmonic signal can be efficiently solved by averaging the results of the sampled measurements. As for solving the task of estimating the second parameter of the phase distribution, namely — the parameter, determining the signal level respectively the noise level — a maximum likelihood technique is proposed to be applied. The graphical illustrations are presented that have been obtained by means of the computer simulation of the principle characteristics of the phase distribution under the study. The existence and uniqueness of the likelihood function's maximum allow substantiating the possibility and the efficiency of solving the task of estimating signal's level relative to noise level by means of the maximum likelihood technique. The elaborated method of estimating the un-noised signal's level relative to noise, i. e. the parameter characterizing the signal's intensity on the basis of measurements of the signal's phase is an original and principally new technique which opens perspectives of usage of the phase measurements as a tool of the stochastic data analysis. The presented investigation is meaningful for solving the task of determining the phase and the signal's level by means of the statistical processing of the sampled phase measurements. The proposed methods of the estimation of the phase distribution's parameters can be used at solving various scientific and technological tasks, in particular, in such areas as radio-physics, optics, radiolocation, radio-navigation, metrology.

Keywords: quasi-harmonic signal, Gaussian noise, signal-to-noise ratio, cumulative distribution function, probability density function, likelihood function, error function

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 287–297 (Russian).

1. Введение

Проблема высокоточных измерений амплитудных и фазовых характеристик стохастического сигнала является важной для решения широкого круга научных и прикладных задач в области теоретической информатики, прикладной математики и т. п. Данная проблема является предметом многих научных исследований в течение десятилетий (см., например, [Du et al., 2018; Daryanoosh et al., 2018; Webster, 2004]), достижение высокой точности фазовых измерений является актуальным в связи с тем, что во многих задачах фазовые характеристики сигнала по своей информативной емкости являются более значимыми, чем амплитудные (см., например, [Зельдович, Шкунов, Яковлева, 1983]).

Как известно, при решении задач обработки стохастических сигналов эффективными являются методы статистического анализа исследуемых данных, поэтому весьма актуальной является задача детального изучения особенностей статистического распределения измеряемой и анализируемой величины. В работе проводится теоретическое исследование свойств статистического распределения фазы квазигармонического сигнала, который формируется исходно гармоническим сигналом под неизбежным воздействием гауссовского шума. В работе [Yakovleva, 2021] автором данной статьи впервые получено аналитическое выражение для функции плотности вероятности распределения фазы и показано, что данное распределение является двухпараметрическим и определяется следующими параметрами: величиной отношения сигнала к шуму и величиной отклонения фазы от ее значения, соответствующего исходно детерминированному, незашумленному сигналу. В настоящей работе приведены результаты последующего детального теоретического и численного исследования свойств статистического распределения фазы квазигармонического сигнала. Особенности данного распределения, как оказалось, открывают возможности эффективного измерения не только фазовых характеристик сигнала, но и уровня интенсивности сигнала относительно уровня шума. В ходе представленного в данной работе исследования, в частности, был разработан и строго математически обоснован подход к оцениванию уровня интенсивности сигнала относительно уровня шума исключительно на основе статистического анализа результатов фазовых измерений.

2. Постановка задачи, основы теории

В данном разделе уточним используемые понятия и основные обозначения. Как известно, модель синусоидального, гармонического сигнала с постоянной амплитудой эффективно используется в теории. На практике же под влиянием воздействия неизбежного гауссовского шума процессе распространения любого исходно гармонического сигнала сопровождается случайными флуктуациями величин амплитуды и фазы такого сигнала. В результате образуется так называемый квазигармонический сигнал, амплитуда и фаза которого представляют собой случайные величины. Такой сигнал в любой момент времени t может быть представлен в следующей форме:

$$x(t) = R(t) \cdot \sin(\omega t + \varphi(t)), \tag{1}$$

где ω — частота, $R(t)$ — амплитуда, или огибающая, сигнала, которая изменяется случайным образом под воздействием гауссовского шума, величина фазы $\varphi(t)$ также изменяется во времени случайным образом под воздействием шума в силу амплитудно-фазовой модуляции. Сигнал (1) будем рассматривать в комплексной плоскости, как комплексную величину, обозначив ее как $f(t)$:

$$f(t) = R(t) \cdot \exp[i(\omega t + \varphi(t))] = s(t) \cdot \exp(i\omega t). \tag{2}$$

Очевидно, что для целей изучения фазовых характеристик квазигармонического сигнала важно проанализировать именно его «медленную» составляющую, т. е. функцию $s(t) = R(t) \cdot \exp[i\varphi(t)]$. Что касается «медленной» составляющей исходного гармонического, не искаженного шумом комплексного сигнала, то очевидно, что она характеризуется постоянными величинами амплитуды A и фазы φ_0. Обозначим эту величину как вектор $\vec{A}(A, \varphi_0)$. При распространении сигнала по какой-либо среде неизбежно происходит его искажение таким образом, что действительная ($A\cos\varphi_0$) и мнимая ($A\sin\varphi_0$) составляющие исходного сигнала независимо изменяются под воздействием на исходный сигнал большого числа случайных шумовых составляющих. Обозначим как $\vec{r}(r, \psi)$ суммарный вектор шума, который накладывается на исходный сигнал $\vec{A}$, искажая его. Компоненты r_x, r_y вектора шума $\vec{r}$ являются независимыми случайными величинами и подчиняются нормальному распределению: $\overline{r_x} = \overline{r_y} = 0$, $\overline{r_x^2} = \overline{r_y^2} = \sigma^2$, где величина σ^2 представляет собой дисперсию шума. Очевидно, что амплитуда r шумового вектора и его фаза ψ представляют собой независимые случайные величины и распределены следующим образом: случайная величина амплитуды r подчиняется статистическому распределению Рэлея, в то время как фаза ψ шумовой компоненты распределена равномерно на интервале $(0, 2\pi)$.

Результирующий квазигармонический сигнал формируется в результате сложения исходного гармонического сигнала $\vec{A}$ и шума $\vec{r}$: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{r}$. «Медленную» составляющую результирующего квазигармонического сигнала обозначим как вектор $\vec{R}(R, \varphi)$ (см. рис. 1).

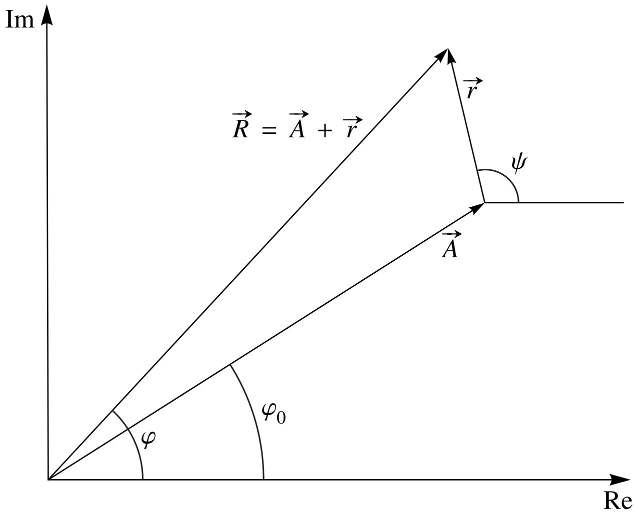

Рис. 1. Иллюстрация формирования «медленной» составляющей квазигармонического сигнала с результирующей амплитудой $R = |\vec{R}|$ и фазой φ как результата воздействия гауссовского шума $\vec{r}(r, \psi)$ на исходно детерминированный сигнал $\vec{A}(A, \varphi_0)$

Принимая во внимание геометрические представления рассматриваемых сигналов, нетрудно получить для действительной и мнимой составляющих вектора $\vec{R}$ следующие выражения:

$$\begin{aligned} R\cos\varphi &= A\cos\varphi_0 + r\cos\psi, \\ R\sin\varphi &= A\sin\varphi_0 + r\sin\psi. \end{aligned} \tag{3}$$

Статистическое распределение случайных величин амплитуды R и фазы φ результирующего квазигармонического сигнала $\vec{R}$ определяется их совместной функцией распределения. Нетрудно показать, что совместная функция распределения случайных величин амплитуды R и фазы φ результирующего сигнала $\vec{R}$ определяется выражением [Рытов, 1976]

$$W(R, \varphi)\,dR\,d\varphi = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left\{-\frac{A^2 + R^2 - 2AR\cos(\varphi - \varphi_0)}{2\sigma^2}\right\} R\,dR\,d\varphi. \tag{4}$$

Из выражения (4) следует, что распределения амплитуды R и фазы φ результирующего сигнала не являются независимыми, причем фаза φ результирующего сигнала, в отличие от фазы ψ шумовой составляющей, уже не является равномерно распределенной величиной.

Принимая во внимание (4) и проводя ряд математических преобразований, можно показать, что амплитуда R квазигармонического сигнала подчиняется статистическому распределению Райса с параметрами A, σ^2, совпадающими с величиной амплитуды исходного гармонического сигнала A и дисперсией искажающего его гауссовского шума σ^2. При этом функция плотности вероятности райсовской случайной величины R дается формулой

$$P\left(R \mid A, \sigma^2\right) = \frac{R}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{RA}{\sigma^2}\right). \tag{5}$$

В выражении (5) $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, имеющая интегральное представление [Абрамовиц, Стиган, 1979]:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos t}\, dt.$$

Задача, решаемая в настоящей работе, состоит в развитии теории и исследовании свойств статистического распределения фазы φ квазигармонического сигнала. Решение данной задачи представлено в нижеследующих разделах статьи.

3. Расчет характеристик статистического распределения фазы квазигармонического сигнала

В данном разделе представлены полученные в явном виде выражения для функции плотности вероятности и функции распределения фазы квазигармонического сигнала.

Для определения функции плотности вероятности статистического распределения фазы квазигармонического сигнала проинтегрируем выражение (4) совместной функции распределения случайных величин амплитуды R и фазы φ результирующего сигнала $\vec{R}$ по R в пределах от нуля до бесконечности. В результате рядя математических преобразований получаем

$$\omega_\varphi(\varphi)\, d\varphi = d\varphi \int_0^\infty W(R, \varphi)\, dR = e^{-A^2/(2\sigma^2)} \cdot \left[1 + \sqrt{\pi} \cdot \eta \cdot e^{\eta^2} \cdot (1 + \Phi(\eta))\right] \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}, \tag{6}$$

где используются следующие обозначения: $\eta = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$, а функция $\Phi(\eta)$ представляет собой известную специальную функцию, называемую интегралом ошибок:

$$\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\eta e^{-t^2}\, dt.$$

Формула (6) характеризует плотность распределения величины фазы случайного сигнала, полученного в результате воздействия гауссовского шума с дисперсией σ^2 на исходно детерминированный сигнал $\vec{A}$ с амплитудой A и фазой φ_0. Как следует из (6), в предельном случае отсутствия детерминированной составляющей, т. е. при $A = 0$, ожидаемо получаем равномерное распределение фазы сигнала: $\omega_\varphi(\varphi)\, d\varphi\big|_{A=0} = \frac{1}{2\pi}\, d\varphi$. Амплитуда такого сигнала, как известно, подчиняется частному случаю распределения Райса, а именно статистическому распределению Рэлея.

Для упрощения дальнейших математических выкладок введем обозначение $S = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma}$. Величину $S^2 = \frac{A^2}{2\sigma^2}$ часто используют в качестве характеристики отношения сигнала к шуму. С учетом введенного параметра S выражение для выше введенного параметра η имеет вид $\eta = S \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$.

Из вышеизложенного следует, что статистическое распределение фазы, описываемое выражением (4), определяется двумя параметрами задачи — отношением сигнала к шуму S и величиной отклонения текущего значения фазы φ от значения фазы φ_0 исходного сигнала — и является четной функцией этого отклонения, что вполне ожидаемо. Из (6) получаем следующее выражение для функции плотности вероятности распределения фазы $\omega_\varphi(\varphi \mid S, \varphi_0)$ как функции параметров S и φ_0:

$$\omega_\varphi(\varphi \mid S, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} e^{-S^2} \left\{1 + \sqrt{\pi}\eta e^{\eta^2}[1 + \Phi(\eta)]\right\} = \\ = \frac{1}{2\pi} e^{-S^2} \left\{1 + \sqrt{\pi} \cdot S \cos(\varphi - \varphi_0) e^{S^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)}[1 + \Phi(S \cos(\varphi - \varphi_0))]\right\}. \quad (7)$$

Обозначим как $F(\varphi \mid S, \varphi_0)$ функцию распределения вероятностей статистического распределения фазы квазигармонического сигнала. Естественно предположить, что фаза φ изменяется в интервале от $\varphi_0 - \pi$ до $\varphi_0 + \pi$. Тогда выражение для функции $F(\varphi \mid S, \varphi_0)$ распределения получим, интегрируя функцию плотности вероятности (7) в диапазоне значений фазы от $\varphi_0 - \pi$ до текущего значения фазы φ:

$$F(\varphi \mid S, \varphi_0) = \int\limits_{\varphi_0 - \pi}^{\varphi} \omega_\varphi(\varphi \mid S, \varphi_0)\, d\varphi. \quad (8)$$

В результате ряда математических преобразований получаем следующее выражение для функции распределения фазы квазигармонического сигнала:

$$F(\varphi \mid S, \varphi_0) = \frac{\exp\left(-S^2\right)}{2\pi} \left\{\varphi - \varphi_0 + \pi - \sqrt{\pi} \int\limits_{-S}^{S\cos(\varphi - \varphi_0)} \frac{\eta \exp\left(\eta^2\right)}{\sqrt{S^2 - \eta^2}} (1 + \Phi(\eta))\, d\eta\right\}. \quad (9)$$

На рис. 2 представлены графики функции плотности вероятности распределения фазы квазигармонического сигнала (рис. 2, *а*) и функции распределения вероятностей (рис. 2, *б*) в зависимости от значения параметра отношения сигнала к шуму S.

На рис. 3 представлены трехмерные графики функции плотности вероятности $\omega_\varphi(\varphi \mid S, \varphi_0)$ (рис. 3, *а*) и функции распределения вероятностей $F(\varphi \mid S, \varphi_0)$ (рис. 3, *б*) фазы квазигармонического сигнала в зависимости от параметра, характеризующего отношение уровней сигнала и шума.

Как следует из представленных графических данных, с ростом величины отношения сигнала к шуму функция плотности вероятности фазы сигнала $\omega_\varphi(\varphi \mid S, \varphi_0)$ (рис. 3, *а*) заметно сужается, что вполне ожидаемо, учитывая, что в предельном случае очень малой величины отношения сигнала к шуму мы имеем сигнал, состоящий практически из шумовой составляющей, с функцией плотности вероятности, близкой к равномерной, в то время как при большой величине отношения сигнала к шуму мы имеем практически детерминированный сигнал, функция плотности вероятности которого близка к δ-функции. По той же причине градиент функции распределения вероятностей $F(\varphi \mid S, \varphi_0)$ (рис. 3, *б*) более резко возрастает с ростом параметра отношения сигнала к шуму.

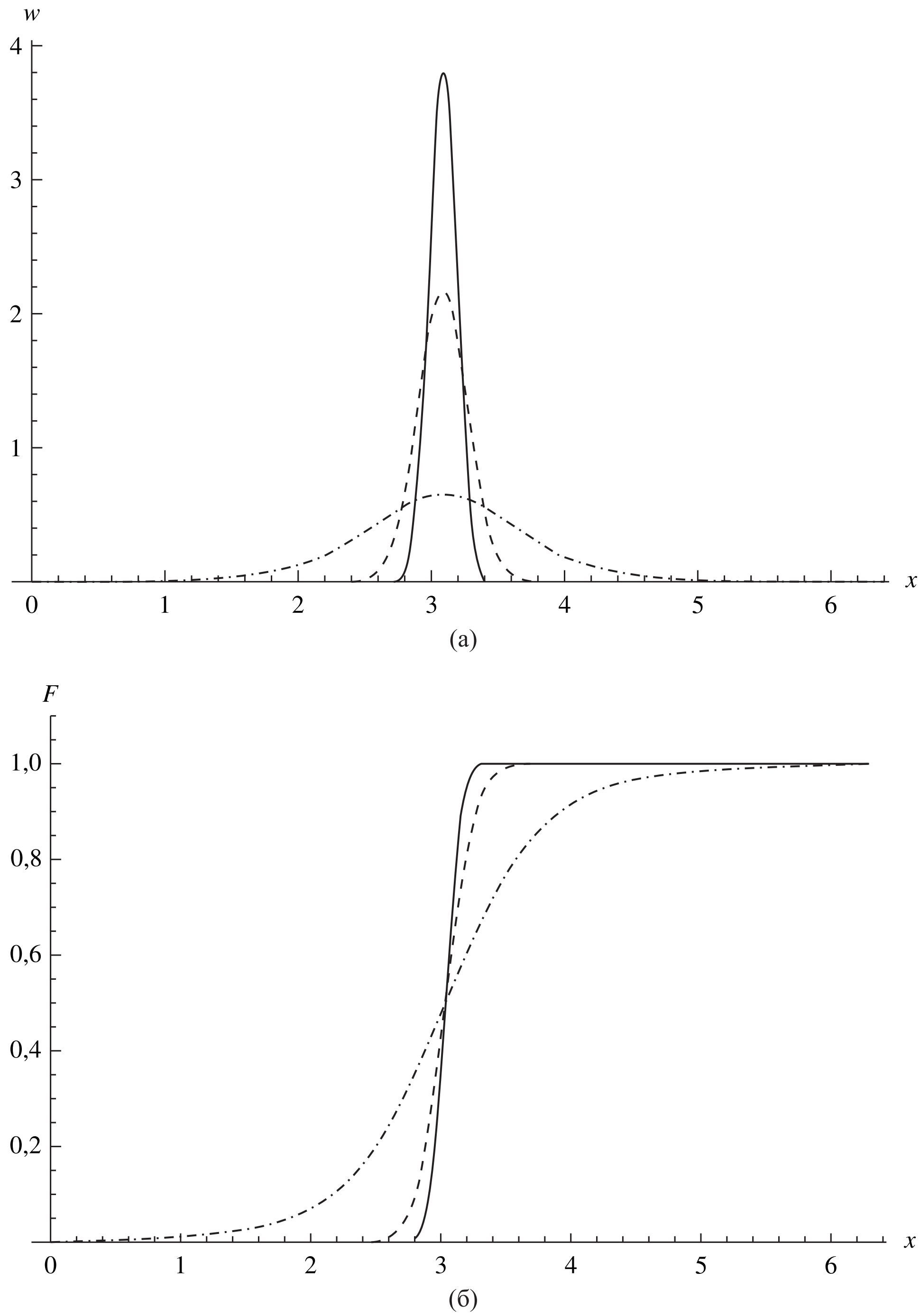

Рис. 2. Зависимость функции плотности вероятности $\omega_{\varphi}(\varphi \mid S, \varphi_0)$ (а) и функции распределения вероятности $F(\varphi \mid S, \varphi_0)$ (б) статистического распределения фазы квазигармонического сигнала от параметров данного распределения φ_0 и S: $\varphi_0 = \pi$, $S = 1, 4, 7$ (штрихпунктирная, пунктирная и сплошная линии соответственно)

4. Расчет параметров распределения фазы квазигармонического сигнала

Цель статистической обработки случайных сигналов состоит в определении их исходных, не искаженных шумом параметров. В случае рассматриваемого распределения фазы квазигар-

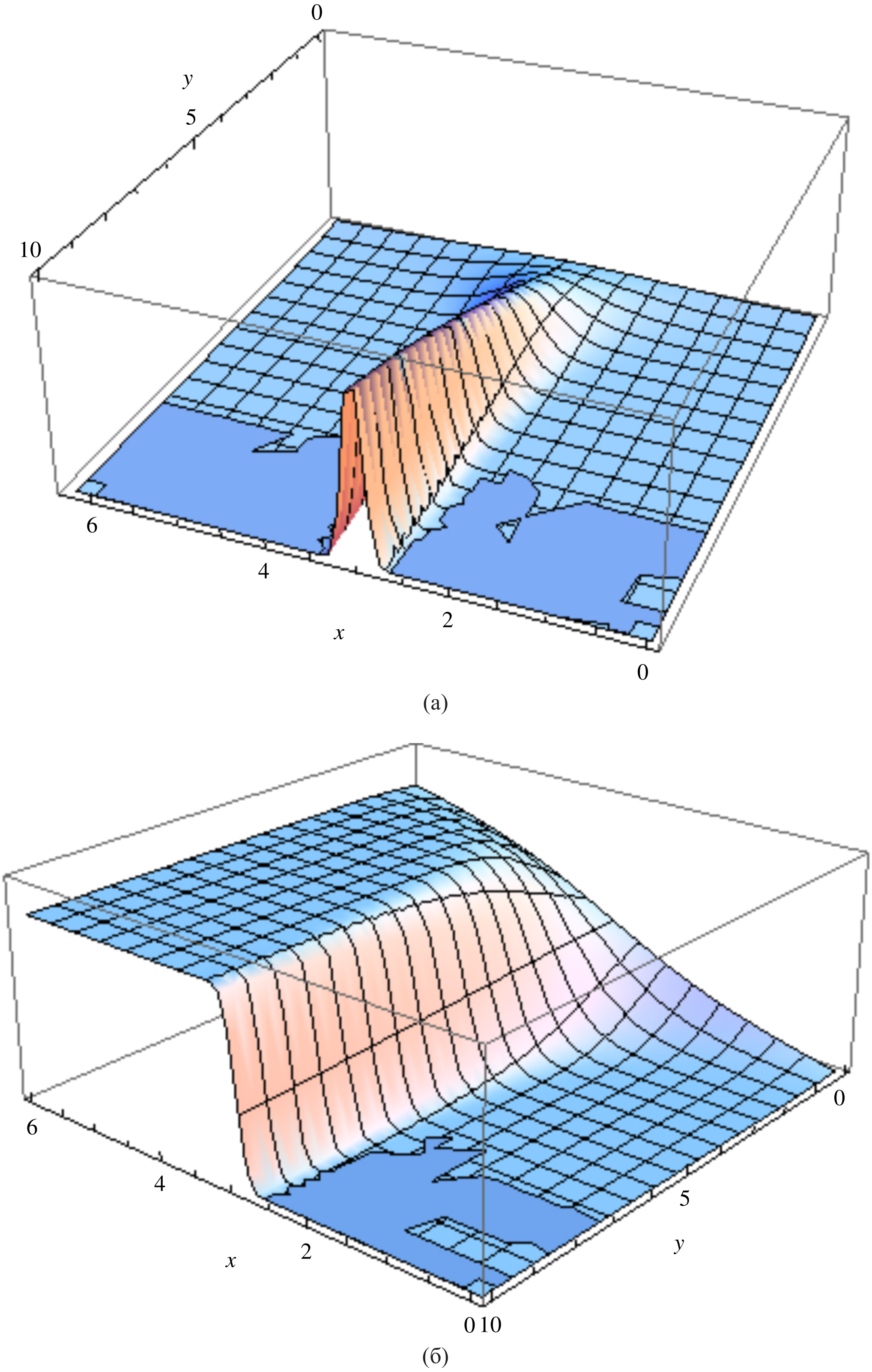

Рис. 3. Трехмерные графики функции плотности вероятности $\omega_\varphi(\varphi \mid S, \varphi_0)$ (а) и функции распределения вероятностей $F(\varphi \mid S, \varphi_0)$ (б) статистического распределения фазы квазигармонического сигнала, иллюстрирующие зависимость этих функций от параметра уровня сигнала S при $\varphi_0 = \pi$ (по оси x отложена величина фазы, вдоль оси y отложена величина отношения сигнала к шуму S)

монического сигнала к таким искомым параметрам, которые можно рассчитать путем статистической обработки результатов выборочных измерений, относятся исходное значение фазы φ_0 сигнала и величина уровня сигнала относительно уровня шума S.

Как следует из выражения для функции плотности вероятности (7) и вышеприведенных графиков, плотность вероятности является четной функцией отклонения фазы φ от ее истинного значения φ_0 в силу четности функции $\cos(\varphi-\varphi_0)$, которая определяет параметр $\eta = S\cdot\cos(\varphi-\varphi_0)$ в выражении для $\omega_\varphi(\varphi \mid S, \varphi_0)$. Из свойства четности функции плотности вероятности следует, что первый момент случайной величины сдвига фазы относительно ее исходного значения φ_0 равен нулю:

$$\overline{\varphi-\varphi_0} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\varphi-\varphi_0)\cdot\omega_\varphi(\varphi \mid S, \varphi_0)\, d\varphi = 0.$$

Таким образом, величина исходного, не искаженного значения фазы φ_0 совпадает с величиной ее математического ожидания:

$$\varphi_0 = \overline{\varphi} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\omega_\varphi(\varphi \mid S, \varphi_0)\, d\varphi$$

и может быть определена простым усреднением по выборочным измерениям.

Что касается второго параметра S исходного сигнала, определяющего уровень сигнала относительно шума, то он, как следует из свойств функции (7), также может быть определен путем статистической обработки фазовых измерений. Возможность такого измерения следует из особенностей статистического распределения фазы квазигармонического сигнала и лежит в основе нового, оригинального способа измерений амплитудных характеристик сигнала путем анализа выборочных фазовых измерений.

В настоящей работе рассматривается конкретный способ оценивания параметра S, основанный на принципе максимума правдоподобия.

Предположим, что в результате выборочных измерений фазы φ получены значения φ_i ($i = 1, \ldots, n$), где n — количество измерений в выборке, называемой также длиной выборки. Функция правдоподобия $L\left(\nu, \sigma^2\right)$ для заданных значений выборочных измерений случайной величины фазы φ_i ($i = 1, \ldots, n$) определяется как совместная вероятность данных событий, т. е. как произведение вероятностей $Pb(\varphi_i \mid S, \varphi_0)$ того, что в результате i-го измерения фазы получаем значение φ_i ($i = 1, \ldots, n$):

$$L(S, \varphi_0) = \prod_{i=1}^{n} Pb(\varphi_i \mid S, \varphi_0) = \prod_{i=1}^{n} d\varphi_i \cdot \omega(\varphi_i \mid S, \varphi_0). \tag{10}$$

При заданных результатах выборочных измерений φ_i ($i = 1, \ldots, n$) функция правдоподобия (10) является функцией искомых параметров S и φ_0 статистического распределения фазы. Как известно, метод максимума правдоподобия состоит в расчете таких значений искомых параметров S и φ_0, которые максимизируют функцию правдоподобия $L(S, \varphi_0)$.

Для расчета параметра сигнала будем использовать метод правдоподобия с учетом того, что один из искомых параметров распределения — параметр φ_0 — может быть легко определен простым усреднением фазовых измерений. Подставляя в выражение для функции правдоподобия значение $\varphi_0 = \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i$, получаем функцию одной переменной S:

$$L(S, \varphi_0) = \frac{e^{-S^2}}{2\pi}\prod_{i=1}^{n} d\varphi_i \left\{1 + \sqrt{\pi} S\cos\left(\varphi_i - \sum_{i=1}^{n}\varphi_i\right) e^{S^2\cos^2\left(\varphi_i - \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i\right)}\left[1 + \Phi\left(S\cos\left(\varphi_i - \sum_{i=1}^{n}\varphi_i\right)\right)\right]\right\}. \tag{11}$$

Таким образом, с учетом возможности расчета параметра φ_0 простым усреднением выборочных фазовых измерений метод правдоподобия для расчета параметра S состоит в определении той величины этого параметра, которая максимизирует значение функции правдоподобия $L(S, \varphi_0)$.

Возможность эффективного расчета параметра S демонстрируется рис. 4, на котором иллюстрируется зависимость функции правдоподобия от параметра уровня сигнала. На рис. 4 представлены три графика, характеризующие зависимость нормированной функции правдоподобия от величины S для трех значений этого параметра, которые соответствуют точкам максимума каждой из трех кривых.

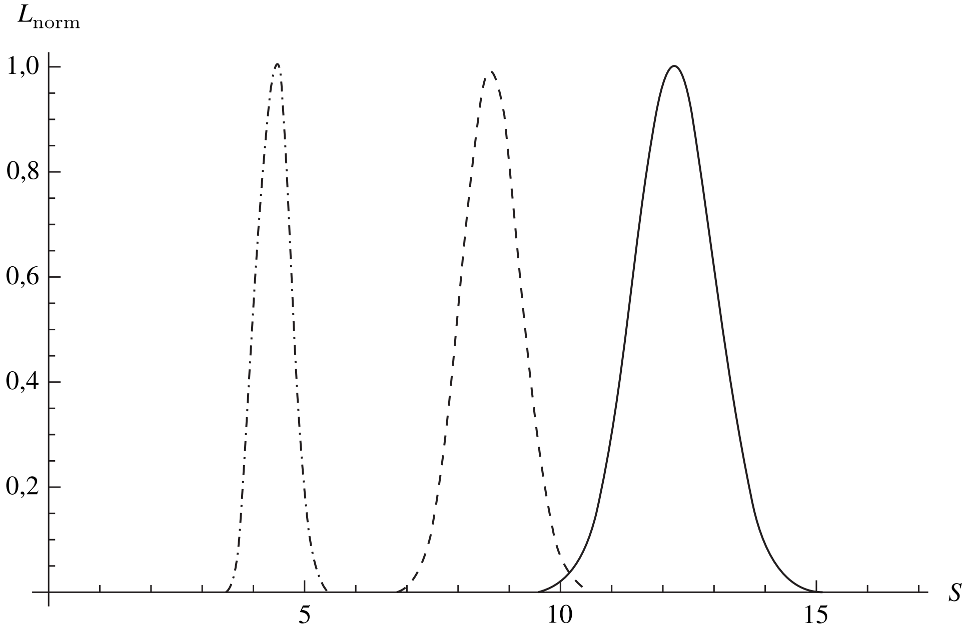

Рис. 4. Зависимость нормированной функции правдоподобия $L_{\rm norm}$ от параметра уровня сигнала S для трех исходных искомых значений данного параметра: $S = 4, 8, 12$ (пунктирная, штрихпунктирная и сплошная линии соответственно)

Наличие и единственность максимума функции правдоподобия как функции параметра уровня сигнала S означают, что метод максимума правдоподобия может эффективно использоваться для оценивания величины данного параметра при заданном наборе результатов выборочных измерений φ_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Кривые, представленные на рис. 4, демонстрируют, что функция правдоподобия имеет максимум именно при том значении параметра S, которое соответствует исходному, истинному значению данного параметра, определяющему конкретный анализируемый набор результатов выборочных измерений фазы сигнала φ_i $(i = 1, \ldots, n)$, на основе которых рассчитывается функция правдоподобия (11). Тем самым представленные на рис. 4 графики подтверждают возможность эффективного оценивания уровня сигнала относительно уровня шума на основе измерений фазы квазигармонического сигнала.

5. Заключение

В работе теоретически исследуется статистическое распределение величины фазы квазигармонического сигнала, получены в явном виде аналитические выражения для функции плотности вероятности, функции распределения вероятностей, функции правдоподобия распределения фазы. Решается задача оценивания параметров данного распределения, разработан принципиально новый, оригинальный метод расчета уровня квазигармонического сигнала относительно уровня шума на основе измерений фазы квазигармонического сигнала.

Полученные в работе результаты вносят вклад в развитие теории вероятностей и теоретических основ информатики. Развитые методы расчета параметров фазового распределения могут эффективно использоваться при решении различных научных и прикладных задач, связанных с высокоточными измерениями фазы квазигармонического сигнала, в частности, в таких областях науки и техники, как радиофизика, оптика, радиолокация, радионавигация, метрология.

Список литературы (References)

Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.

Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. — Applied Mathematics Series 55. — Washington D.C., USA; New York, USA: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964. (Russ. ed.: *Abramovic M., Stigan I.* Spravochnik po special'nym funkciyam. — Moscow: Nauka, 1979.)

Зельдович Б. Я., Шкунов В. В., Яковлева Т. В. Теория восстановления толстослойных голограмм спекл-полей // Квантовая электроника. — 1983. — Т. 10, № 8. — С. 1581–1586.

Zeldovich B. Ya., Shkunov V. V., Yakovleva T. V. Teoriya vosstanovleniya tolstosloinyck gologram speckle-poley [Theory of reconstruction of the speckle-fields thick-layer holograms] // Quantum Electronics. — 1983. — Vol. 10, Issue 8. — P. 1581–1586 (in Russian).

Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. — М.: Наука, 1976. — 494 с.

Rytov S. M. Vvedenie v statisticheskuyu radiophiziky. Ch. 1. Sluchainyie protsessy [Introduction in statistical radiophysics. P. 1. Random processes]. — Moscow: Nauka, 1976. — 494 p. (in Russian).

Daryanoosh Sh., Slussarenko S., Berry D. W., Wiseman H. M., Pryde G. J. Experimental optical phase measurement approaching the exact Heisenberg limit // Nature Communications. — 2018. — Vol. 9. — Article 4606.

Du B., Li S., Huang G., Geng X., Li Zh., Deng R., Mo C. High-precision frequency measurement system based on different frequency quantization phase comparison // Measurement. — 2018. — Vol. 122. — P. 220–223.

Webster J. G. (ed.) Electrical measurement, signal processing, and displays. — Boca Raton: CRC Press, 2004. — 723 p.

Yakovleva T. V. Features of the statistical distribution of a quasi-harmonic signal phase // Dokl. Math. — 2021. — Vol. 103. — P. 95–97. — https://doi.org/10.1134/S1064562421020083