

УДК: 519.8

Двухконтурная система с различными по длине кластерами и неодинаковым расположением двух узлов на контурах

М. В. Яшина^{1,2,3,a}, А. Г. Таташев^{1,2,b}

¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
Россия, 125319, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 64

²Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ),
Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, д. 8а

³Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

E-mail: ^a mv.yashina@madi.ru, ^b a-tatashev@yandex.ru

Получено 08.11.2023, после доработки — 23.11.2023.

Принято к публикации 28.11.2023.

Исследуется система, принадлежащая классу динамических систем, разработанному А. П. Буслаевым (сети Буслаева). В этой системе на каждом из двух замкнутых контуров находится отрезок, называемый кластером и движущийся с постоянной скоростью, если нет задержек. Длины кластеров равны l_1 и l_2 . Имеются две общие точки контуров, называемые узлами. Задержки в движении кластеров обусловлены тем, что два кластера не могут проходить через узел одновременно. Контуры имеют одинаковую длину, принимаемую за единицу. Узлы делят каждый контур на части, длина одной из которых равна d_i , а другой — $1 - d_i$, $i = 1, 2$, — номер контура. Исследуется спектр средних скоростей системы, т. е. множество пар значений (v_1, v_2) , где v_i — средняя скорость движения кластера i с учетом задержек, при различных начальных состояниях и фиксированных значениях l_1, l_2, d_1, d_2 . Выявлено 12 сценариев поведения системы и для каждого из этих сценариев найдены достаточные условия его реализации, причем при каждом из этих сценариев спектр содержит одну или две пары значений средних скоростей.

Ключевые слова: сети Буслаева, предельный цикл

UDC: 519.8

Double-circuit system with clusters of different lengths and unequal arrangement of two nodes on the circuits

M. V. Yashina^{1,2,3,a}, A. G. Tatashev^{1,2,b}

¹Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI),
64 Leningradsky prospekt, Moscow, 125319, Russia

²Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI),
8a Aviamotornaya st., Moscow, 111024, Russia

³Moscow Aviation Institute,
4 Volokolamskoe highway, Moscow, 125993, Russia

E-mail: ^a mv.yashina@madi.ru, ^b a-tatashev@yandex.ru

Received 08.11.2023, after completion — 23.11.2023.

Accepted for publication 28.11.2023.

We study a system that fulfills the class of driving systems developed by A. P. Buslaev (Buslaev networks). In this system, in each of two closed loops there is a segment called a cluster, and it moves at a constant speed if there are no delays. The lengths of the clusters are l_1 and l_2 . There are two common points of the contours, called nodes. Delays in the movement of clusters are due to the fact that two clusters cannot pass through a node at the same time. The contours have the same height, the glazing is accepted. The nodes divide each contour into parts, the length of one of which is equal to d_i , and the other $1 - d_i$, $i = 1, 2$, — contour number. Studies of the spectrum of average speeds of systems, i. e. set of pairs of results (v_1, v_2) , where v_i — cluster of average movement speed i taking into account delays, for different initial states and fixed values l_1, l_2, d_1, d_2 . 12 scenarios of system behavior have been identified, and for each of these manifestations sufficient conditions for its implementation have been found, and each of these observed spectra contains one or two pairs of average velocities.

Keywords: Buslaev networks, limit cycle

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 217–240 (Russian).

Введение

А. П. Буслаев разработал класс динамических систем, который был назван впоследствии сетями Буслаева (или контурными сетями). Введение этого класса динамических систем вызвано тем, что для сетевых моделей автотранспортных потоков практически не было известно аналитических результатов и сетевые модели в основном исследовались только имитационным моделированием. Структура и правила работы контурных сетей вводились таким образом, чтобы, с одной стороны, они отражали особенности реальных транспортных сетей и, с другой стороны, к их исследованию были применимы аналитические методы, в том числе подходы функционального анализа, алгебры, теории марковских процессов и других классических разделов математики.

Так, например, моделью перекрестка для движения автомобилей в одном направлении является двухконтурная система, вложенная в тор S^2 (рис. 1).

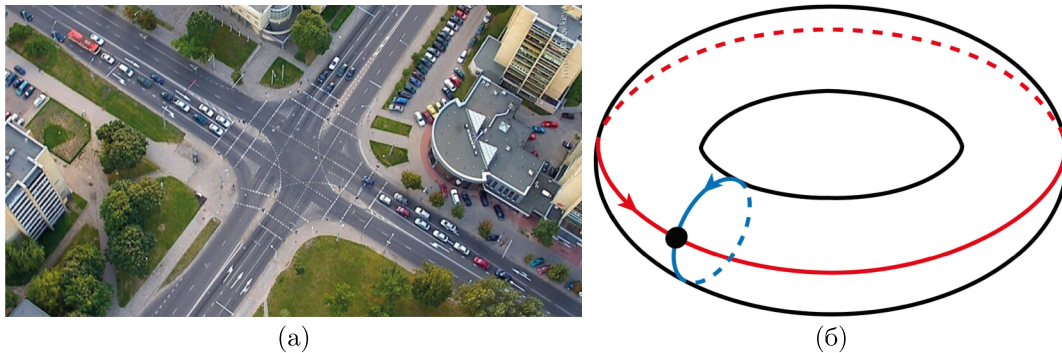


Рис. 1. (а) Транспортный перекресток; (б) двухконтурная система для движения автомобилей в одном направлении

Сети Буслаева могут иметь и другие приложения, в том числе могут использоваться при моделировании работы инфокоммуникационных систем.

Аналитические результаты для математических моделей трафика, в которых частицы движутся по определенным правилам на одномерной или двумерной решетке и которые могут интерпретироваться в терминах клеточных автоматов [Wolfram, 1983] или случайных процессов с запретами [Spitzer, 1970], были получены, например, в [Belitsky, Ferrari, 2005; Gray, Griffiths, 2001; Kanai, Nishinari, Tokihiro, 2009; Blank, 2010; Biham, Middleton, Levine, 1992; D'Souza, 2005; Yashina, Tatashev, 2018].

На основе эмпирических исследований на магистралях Б. С. Кернером создана трехфазная теория трафика [Kerner, 2004], согласно которой наряду с фазой свободного движения, соответствующей малой плотности потока, и фазой широкого движущегося кластера (затора), соответствующей большой плотности, существует промежуточная фаза, называемая фазой синхронизированного потока. Эта фаза может спонтанно переходить как в фазу свободного движения, так и в фазу затора. Были разработаны модели [Kerner, Klenov, 2002; Kerner, Klenov, Wolf, 2002], описывающие поведение автотранспортного потока, качественно согласующиеся с трехфазной теорией.

Установившиеся средние скорости кластеров не определяются однозначно загрузкой системы, аналогично тому, как это имеет место для согласующихся с теорией Кернера моделей [Kerner, Klenov, 2002; Kerner, Klenov, Wolf, 2002]. Выявлено, что при фиксированной загрузке системы средняя скорость кластеров в установившемся режиме зависит от начального состояния системы (расположения кластеров).

Понятие кластерного движения в математической модели трафика введено в [Bugaev et al., 2011]. В дискретном варианте кластер представляет собой группу частиц, располагающихся в соседних ячейках и перемещающихся одновременно, чем объясняется термин «кластер». В непрерывном варианте кластер представляет собой движущийся отрезок, скорость которого при отсутствии задержек постоянна.

Понятие контурных сетей (сети Буслаева) было введено в [Kozlov, Buslaev, Tatashev, 2013]. Контурная сеть содержит замкнутые контуры, по которым движутся частицы или кластеры. Соседние контуры имеют общие точки, называемые узлами. Задержки в перемещении кластеров возникают из-за ограничения, в соответствии с которым одновременно пересекать узел может не более одной частицы (кластера). Если кластер подошел к узлу в момент прохождения через этот узел другого кластера, то подошедший кластер останавливается и возобновляет движение после освобождения у узла. Если кластеры подошли к одному и тому же узлу одновременно, то возникает конкуренция, и первым через узел проходит один из этих кластеров, выбираемый в соответствии с заданным правилом разрешения конкуренции. Основными задачами являются нахождение средней скорости движения кластеров (частиц), нахождение условий попадания системы в состояние свободного движения (все кластеры движутся с некоторого момента времени без задержек в текущий момент и в будущем) или коллапса (движение частиц полностью прекращается), а также задача выбора правила разрешения конкуренции, оптимального в смысле максимизации средней скорости движения. Аналитические результаты были получены для двухконтурных систем с одним [Buslaev, Tatashev, 2018; Tatashev, Yashina, 2019a; Tatashev, Yashina, 2019b; Мышкис, Таташев, Яшина, 2020] или двумя [Yashina, Tatashev, 2020a; Yashina, Tatashev, 2020b; Yashina, Tatashev, Fomina, 2020; Yashina, Tatashev, 2021; Buslaev, Tatashev, Yashina, 2021] узлами, для систем с несколькими контурами и одним общим узлом [Buslaev, Tatashev, Yashina, 2016] и для контурных сетей с регулярными периодическими одномерными [Buslaev, Tatashev, Yashina, 2016; Buslaev et al., 2018; Tatashev, Yashina, 2019c; Yashina, Tatashev, 2019; Бугаев, Таташев, Яшина, 2021] или двумерными [Buslaev, Tatashev, Yashina, 2013; Kozlov et al., 2015; Kuteynikov, Tatashev, Yashina, 2019] системами контуров. Монографией по сетям Буслаева является книга [Яшина, Таташев, 2023].

В [Yashina, Tatashev, 2020a] исследовалась контурная сеть, содержащая два контура, на каждом из которых имеется один кластер. Длина контура и находящегося на нем кластера не зависит от контура. Имеются два узла, которые делят каждый контур на две части, длина одной из которых равна d , а другой $1 - d$ (если длину контура принять за единицу). Рассматривалось два варианта системы, различающиеся тем, как соотносятся друг с другом направления движения кластеров. В одном из этих вариантов оба кластера после прохождения одного из узлов оказываются на дуге длиной d , а после прохождения другого узла попадают на дугу длиной $1 - d$. В таком варианте система названа системой с сонаправленным движением. В другом варианте после прохождения одного и того же узла один кластер попадает на дугу длиной d , а другой — на дугу длиной $1 - d$. В этом варианте система названа системой с однонаправленным движением, так как в ее геометрической интерпретации либо оба кластера движутся против часовой стрелки, либо оба кластера движутся по часовой стрелке. В [Yashina, Tatashev, 2020a] рассматривалась система с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции, в соответствии с которым при конкуренции всегда предоставляется приоритет одному и тому же кластеру, располагающемуся слева. Основной исследуемой характеристикой является средняя скорость движения, равная среднему расстоянию, проходимому кластером в единицу времени, с учетом задержек. Как следует из результатов [Yashina, Tatashev, 2020a], при любых заданных значениях d , длине кластера l и начальном состоянии системы средняя скорость одинакова для обоих кластеров и при сонаправленном движении не зависит от начального состояния, а при однонаправленном движении для каждого заданных значениях d и l возможны одно или два значения средней скорости.

В [Yashina, Tatashev, 2020a] рассматривались дискретный вариант системы. В [Buslaev, Tatashev, Yashina, 2021] рассматривался непрерывный вариант системы с сонаправленным движением, а в [Yashina, Tatashev, 2020b] — непрерывный вариант системы с однонаправленным движением. Как оказалось, поведение системы в непрерывном и дискретном вариантах аналогично. В силу симметрии средняя скорость кластеров в системе с сонаправленным движением не зависит от правила разрешения конкуренции. В [Yashina, Tatashev, 2020b] для системы с однонаправленным движением рассматривалась задача нахождения правила разрешения конкуренции, оптимального в смысле максимизации средней скорости кластеров. Средняя скорость кластеров зависит от выбора правила разрешения конкуренции только при начальных состояниях, из которых система попадает в состояние такое, что имеет место конкуренция. В [Yashina, Tatashev, 2020b] доказано, что при любых значениях d существует правило разрешения конкуренции, при котором средняя скорость движения кластеров не меньше, чем при любом другом правиле, причем в зависимости от начального состояния таким оптимальным правилом является либо правило, при котором конкуренцию всегда выигрывает кластер, переходящий с меньшей дуги на большую, либо правило, при котором конкуренцию всегда выигрывает кластер, переходящий с большей дуги на меньшую. В [Yashina, Tatashev, 2020b] рассматривалась двухконтурная система с двумя узлами, в которой, как и в системе, рассматривавшейся в [Yashina, Tatashev, 2020b], контуры имеют одинаковую длину, но кластеры различны по длине, при этом два узла делят каждый контур в соотношении d к $1 - d$.

В настоящей работе исследуется двухконтурная система с двумя узлами, в которой контуры имеют одинаковую длину, а кластеры имеют в общем случае различные длины l_1, l_2 , при этом, в отличие от [Yashina, Tatashev, 2020a; Yashina, Tatashev, 2020b; Yashina, Tatashev, Fomina, 2020], предполагается, что контуры делятся узлами в разных соотношениях длин дуг. Контур i делится узлами в соотношении d_i к $1 - d_i$, $i = 1, 2$. Система рассматривается в непрерывном варианте. Выявлено 12 различных сценариев поведения системы и найдены достаточные условия, при которых тот или иной сценарий реализуется. Каждый сценарий характеризуется видом спектра значений средних скоростей кластеров, т.е. пар (v_1, v_2) , где v_1, v_2 — средние скорости кластеров. Оказалось, что для каждого сценария спектр содержит одну или две такие пары. Для симметричных случаев $l_1 = l_2$, $d_1 = d_2$ (однаправленное движение) и $l_1 = l_2$, $d_1 = 1 - d_2$ (сонаправленное движение) возможны соответственно 5 сценариев и 3 сценария, причем для каждого сценария найдены необходимые и достаточные условия его реализации.

Описание системы

Система содержит два замкнутых контура — контур 1 и контур 2 (рис. 2). Полагаем, что длина каждого контура равна 1. На контуре i находится кластер i , представляющий собой перемещающийся отрезок длиной $l_i < 1$, $i = 1, 2$. Скорость движения кластера, если нет задержек, равна 1, т.е. кластер совершает полный обход контура за интервал времени длительностью 1. Имеются две общие точки контуров, называемые узлами. На каждом контуре задана система координат, представляющая собой отрезок $[0, 1]$. Направление системы координат совпадает с направлением движения кластера. Состояние системы в момент времени $t \geq 0$ представляет собой вектор $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, где $x_i(t)$ — координата передней точки кластера, $i = 1, 2$. При нахождении системы в состоянии $(x_1(t), x_2(t))$ кластер i располагается на дуге $(x_i(t) - l_i, x_i(t))$ (вычитание по модулю 1), $i = 1, 2$. Узел i располагается в точке с координатой 0 на контуре i и в точке с координатой d_j на контуре $j \neq i$, $i = 1, 2$. Будем говорить, что при нахождении системы в состоянии $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ кластер i занимает узел i , если $0 < x_i(t) < l_i$, и занимает узел $j \neq i$, если $d_j < x_i < d_j + l_i$ или $0 \leq x_i < d_j + l_i - 1$, $i = 1, 2$. Будем говорить, что при нахождении системы в состоянии $(x_1(t), x_2(t))$ кластер i находится у узла i , если $x_i(t) = 0$, и кластер i находится у узла $j \neq i$, если $x_i(t) = d_j$, $i = 1, 2$.

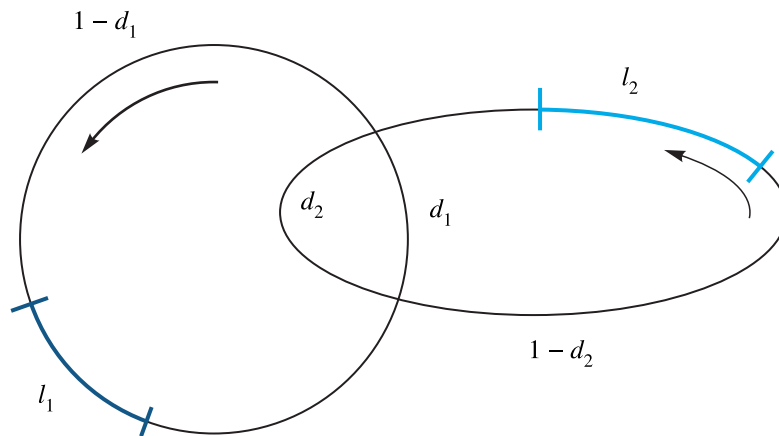


Рис. 2. Несимметричная двухконтурная система с двумя узлами

Состояние системы называется допустимым, если при нахождении системы в этом состоянии ни один узел не занят сразу двумя кластерами. Начальное состояние $x(0)$ задается.

Задержка в перемещении кластера возникает в момент, когда этот кластер находится у узла, который в этот момент занят другим кластером. Задержка продолжается до момента, когда данный узел перестает быть занятым. Если два кластера подошли к узлу одновременно, то возникает конкуренция. Первым проходит через узел кластер, который *выигрывает* конкуренцию в соответствии с заданным *правилом разрешения конкуренции*. Будем считать, что правило разрешения конкуренции *левоприоритетное*, в соответствии с которым конкуренцию всегда выигрывает кластер 1.

Отметим, что при $d_1 = d_2 = d$ рассматриваемая система соответствует системе с односторонним движением, а при $d_1 = d, d_2 = 1 - d$ — системе с сонаправленным движением.

Основные понятия

Как будет доказано в настоящей работе, начиная с некоторого момента периодически повторяются состояния системы, принадлежащие некоторому множеству. Таким образом, инвариантные множества состояний рассматриваемой динамической системы относятся к типу *предельных циклов*.

Пусть $H_i(t)$ — расстояние, которое проходит кластер i в интервале времени $(0, t)$. Назовем средней скоростью v_i кластера i предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H_i(t)}{t}, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

В силу того, что реализуется один из предельных циклов, предел (1) существует и равен $v_i = \frac{A_i}{T}$, где A_i — расстояние, проходимое кластером на предельном цикле, а T — период.

Средние скорости кластеров зависят от значений l_1, l_2, d_1, d_2 и в общем случае от начального состояния системы.

Множество пар значений (v_1, v_2) , где v_i — средняя скорость движения кластера i с учетом задержек, при различных начальных состояниях и фиксированных значениях l_1, l_2, d_1, d_2 , называем *спектром средних скоростей системы*.

Если в любой момент $t \geq t_0$ все частицы перемещаются, то говорим, что с момента t_0 система находится в состоянии свободного движения. Будем называть *самоорганизацией* свойство системы попадать в состояние свободного движения из любого начального состояния. Если система находится в состоянии свободного движения, то $v_1 = v_2 = 1$.

Если начиная с момента t_0 ни одна частица не перемещается, то говорим, что с момента t_0 система находится в состоянии *коллапса*. Если система находится в состоянии коллапса, то $v_1 = v_2 = 0$.

Условия коллапса и самоорганизации

Докажем лемму, дающую необходимое условие состояния свободного движения.

Лемма 1. *Если выполняется неравенство*

$$l_1 + l_2 > 1, \quad (2)$$

то система не может находиться в состоянии свободного движения.

Доказательство. Если на предельном цикле система находится в состоянии свободного движения, то период цикла равен 1, и за этот период каждый узел занят кластером 1 в течение интервала времени длительностью l_1 и кластером 2 — в течение интервала времени длительностью l_2 . Но это невозможно при невыполнении неравенства (2), так как узел не может одновременно быть занятым сразу двумя кластерами. Лемма 1 доказана. \square

Лемма 2. *Если на предельном цикле система не находится ни в состоянии свободного движения, ни в состоянии коллапса, то система попадает на этом предельном цикле хотя бы в одно из состояний $(d_1 + l_1, 0)$, $(0, d_2 + l_2)$, (l_1, d_2) , (d_1, l_2) (сложение по модулю 1).*

Доказательство. Из условия леммы следует, что на рассматриваемом предельном цикле происходят задержки хотя бы одного кластера. Если происходит задержка кластера 2 у узла 2, то в момент окончания этой задержки система находится в состоянии $(d_1 + l_1, 0)$ (сложение по модулю 1). Если происходит задержка кластера 1 у узла 1, то эта задержка заканчивается при нахождении системы в состоянии $(0, d_2 + l_2)$ (сложение по модулю 1). Если происходит задержка кластера 2 у узла 1, то в момент окончания этой задержки система находится в состоянии (l_1, d_2) (сложение по модулю 1). Если происходит задержка кластера 1 у узла 2, то эта задержка заканчивается при нахождении системы в состоянии (d_1, l_2) . Таким образом, система попадает на предельном цикле по крайней мере в одно из перечисленных в условии леммы состояний. Лемма 2 доказана. \square

Лемма 3. *Необходимым условием того, что система может находиться в состоянии коллапса, является выполнение неравенств*

$$l_1 > \min(d_1, 1 - d_1), \quad (3)$$

$$l_2 > \min(d_2, 1 - d_2). \quad (4)$$

Доказательство. Если (3) не выполняется, то кластер 1 не может одновременно находиться у одного узла и занимать другой узел. Аналогично: если не выполняется условие (4), то кластер 2 не может одновременно находиться у одного узла и занимать другой узел. Но при нахождении системы в состоянии коллапса каждый кластер находится у одного узла и занимает другой, и, таким образом, утверждение леммы 3 верно. \square

Сценарии поведения системы

Следующая теорема дает достаточное условие попадания системы в состояние свободного движения из любого начального состояния.

Теорема 1. Если выполняются неравенства

$$\max(l_1, l_2) < \min(d_1, d_2), \quad l_1 + l_2 < 1 - d_1 - d_2,$$

то система попадает в состояние свободного движения из любого начального состояния системы.

Доказательство. В предположениях теоремы 1 система, в соответствии с леммой 3, не может находиться в состоянии коллапса. Если на некотором предельном цикле система не находится также в состоянии свободного движения, то, в соответствии с леммой 2, на любом предельном цикле система находится хотя бы в одном из состояний $(l_1 + d_1, 0)$, $(0, l_2 + d_2)$, (l_1, d_2) , (d_1, l_2) . Докажем, что из любого этого состояния система за некоторое время попадает в состояние свободного движения.

Пусть в момент времени t_0 система находится в состоянии

$$x(t_0) = (l_1 + d_1, 0).$$

Тогда в предположениях теоремы имеем следующую последовательность состояний:

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_2) &= (l_1 + d_1 + d_2, d_2), & x(t_0 + 1 - d_1 - l_1) &= (0, 1 - d_1 - l_1), \\ x(t_0 + 1 - l_1) &= (d_1, 1 - l_1), & x(t_0 + 1) &= (d_1 + l_1, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, за единицу времени система возвращается в состояние $(l_1 + d, 0)$, т. е. находится в состоянии свободного движения.

Аналогично доказывается, что $(0, l_2 + d_2)$ также является состоянием свободного движения.

Пусть

$$x(t_0) = (l_1, d_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_1 - l_1) &= (d_1, d_1 + d_2 - l_1), & x(t_0 + 1 - d_2) &= (1 - d_2 + l_1, 0), \\ x(t_0 + 1 - l_1) &= (0, d_2 - l_1), & x(t_0 + 1) &= (l_1, d_2). \end{aligned}$$

Таким образом, состояние (l_1, d_2) является состоянием свободного движения. Аналогично доказывается, что состоянием свободного движения является состояние (d_1, l_2) . Теорема 1 доказана. \square

ПРИМЕР 1. Условия теоремы 1 выполняются, если, например,

$$l_1 = 0,05, \quad l_2 = 0,1, \quad d_1 = 0,2, \quad d_2 = 0,3.$$

Теорема 2. Если выполняются условия

$$\max(l_1, l_2) < \min(d_1, d_2), \quad \max(l_1, l_2) < 1 - d_1 - d_2, \quad l_1 + l_2 > 1 - d_1 + d_2,$$

то в зависимости от начального состояния системы либо система попадает в состояние свободного движения, либо средняя скорость кластеров равна

$$v = \frac{1}{l_1 + l_2 + d_1 + d_2}. \quad (5)$$

Доказательство. В предположениях теоремы 2 система, как следует из утверждения леммы 3, не может находиться в состоянии коллапса. Если на некотором предельном цикле система не находится также в состоянии свободного движения, то в соответствии с леммой 2 на любом предельном цикле система находится хотя бы в одном из состояний $(l_1 + d_1, 0)$, $(0, l_2 + d_2)$, (l_1, d_2) , (d_1, l_2) . Докажем, что из любого этого состояния либо система за некоторое время попадает в состояние свободного движения, либо реализуется предельный цикл со средней скоростью каждого кластера, вычисляемого по формуле (5).

Предположим, что в момент t_0 система находится в состоянии

$$x(t_0) = (d_1 + l_1, 0).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_2) &= (d_1 + d_2 + l_1, d_2), & x(t_0 + 1 - l_1 - d_1) &= (0, 1 - l_1 - d_1), \\ x(t_0 + d_2 + l_2) &= (0, d_2 + l_2), & x(t_0 + d_1 + d_2 + l_2) &= (d_1, d_1 + d_2 + l_2), \\ x(t_0 + 1) &= (1 - d_2 - l_2, 0), & x(t_0 + d_1 + d_2 + l_1 + l_2) &= (d_1 + l_1, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, за интервал времени длительностью $d_1 + d_2 + l_1 + l_2$ все кластеры совершают полный оборот. Таким образом, для предельного цикла, содержащего состояния $(d_1 + l_1, 0)$, $(0, d_2 + l_2)$, средняя скорость кластеров вычисляется по формуле (5).

Если в момент времени t_0

$$x(t_0) = (l_1, d_2),$$

то

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_1 - l_1) &= (d_1, d_1 + d_2 + l_1), & x(t_0 + 1 - d_2) &= (1 - d_2 + l_1, 0), \\ x(t_0 + 1 - l_1) &= (0, d_2 - l_1), & x(t_0 + 1) &= (l_1, d_2). \end{aligned}$$

Следовательно, состояние (l_1, d_2) является состоянием свободного движения. Аналогичным образом доказывается, что состоянием свободного движения является состояние (d_1, l_2) . Теорема 2 доказана. \square

ПРИМЕР 2. Условия теоремы 2 выполняются, например, при

$$l_1 = 0,1, \quad l_2 = 0,15, \quad d_1 = 0,3, \quad d_2 = 0,5.$$

Теорема 3. Если выполняются условия

$$\begin{aligned} l_1 &< \min(d_1, 1 - d_1 - d_2), \\ d_1 &< l_2 < d_1 + d_2 < l_1 + l_2 < 1 - d_1 - d_2, \end{aligned}$$

то в зависимости от начального состояния системы либо система попадает в состояние свободного движения, либо средняя скорость кластеров вычисляется по формуле

$$v = \frac{1}{l_1 + l_2 + 1 - d_1 - d_2}. \quad (6)$$

Доказательство. При

$$x(t_0) = (l_1 + d_1, 0)$$

имеем

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_2) &= (l_1 + d_1 + d_2, d_2), & x(t_0 + 1 - d_1 - l_1) &= (0, 1 - d_1 - l_1), \\ x(t_0 + 1 - l_1) &= (d_1, 1 - l_1), & x(t_0 + 1) &= (d_1 + l_1, 0). \end{aligned}$$

Следовательно, состояние (l_1, d_2) является состоянием свободного движения.

Аналогично доказывается, что состояние $(0, l_2 + d_2)$ также является состоянием свободного движения.

В соответствии с леммой 3 состояний коллапса не существует.

Как уже доказано, состояния $(l_1 + d_1, 0)$ и $(0, l_2 + d_2)$ являются состояниями свободного движения, и, следовательно, для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть поведение системы после пребывания в состояниях (l_1, d_2) и (d_1, l_2) , которые, как будет сейчас установлено, принадлежат одному и тому же циклу.

Пусть

$$x(t_0) = (l_1, d_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_1 - l_1) &= (d_1, d_1 + d_2 - l_1), & x(t_0 + l_2 - d_2) &= (d_1, l_2), \\ x(t_0 + 1 - d_2) &= (1 + d_1 - l_2, 0), & x(t_0 + 1 + l_2 - d_1 - d_2) &= (0, l_2 - d_1), \\ x(t_0 + 1) &= (d_1 + d_2 - l_2, d_2), \\ x(t_0 + l_1 + l_2 - d_1 - d_2) &= (l_1, d_2). \end{aligned}$$

Таким образом, состояния (l_1, d_2) и (d_1, l_2) принадлежат циклу со средней скоростью кластеров, вычисляемой по формуле (6). Теорема 4 доказана. \square

ПРИМЕР 3. Условия теоремы 3 выполняются, например, при

$$l_1 = 0,15, \quad l_2 = 0,35, \quad d_1 = 0,2, \quad d_2 = 0,25.$$

Теорема 4. Пусть

$$\begin{aligned} l_1 &< \min(d_1, 1 - d_1 - d_2), & d_2 &< l_2 < \min(d_1 + d_2, 1 - d_1 - d_2), \\ l_1 + l_2 &> \max(d_1 + d_2, 1 - d_1 - d_2). \end{aligned}$$

Тогда существует ровно два предельных цикла, одному из которых соответствует средняя скорость кластеров, вычисляемая по формуле (5), а другому — средняя скорость, вычисляемая по формуле (6).

Доказательство. В предположениях теоремы 4 система, в соответствии с леммой 3, не может находиться в состоянии коллапса. Отсюда следует, что существуют моменты времени, в которые передняя точка кластера 2 находится в ячейке с номером 0. Пусть в момент времени t_0 система находится в состоянии

$$x(t_0) = (\alpha, 0).$$

Предположим, что

$$0 \leq \alpha < d_1.$$

Тогда имеем

$$x(t_0 + d_1 - \alpha) = (d_1, d_1 - \alpha),$$

и, следовательно, в момент $t = d_1 - \alpha$ начинается задержка кластера 1.

Если

$$d_1 \leq \alpha < d_1 + l_1,$$

то в момент $t = 0$ кластер 2 не перемещается.

Если

$$d_1 + l_1 \leq \alpha < 1 + l_1 - d_2,$$

то в момент $t = 1 - \alpha$ начинается задержка кластера 1.

Если

$$d_1 + l_1 \leq \alpha \leq 1 - d_2,$$

то в момент $t = d_2$ начинается задержка кластера 2.

Если

$$d_1 + l_1 \leq \alpha < 1 - d_2 + l_1,$$

то в момент $t = 1 - \alpha$ начинается задержка кластера 1.

Если

$$\alpha \leq 1 - d_2 + l_1,$$

то задержка кластера 1 начинается в момент $t = 1 - \alpha + d + 1$.

Таким образом, учитывая лемму 3, получаем, что существует момент времени, в который система находится в одном из состояний $(l_1 + d, 0)$, $(0, l_2 + d)$, (l_1, d) , (d, l_2) .

Пусть в момент времени t_0 система находится в состоянии

$$x(t_0) = (l_1 + d_1, 0).$$

Тогда в предположениях теоремы имеем следующую последовательность состояний:

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_2) &= (l_1 + d_1 + d_2, d_2), & x(t_0 + 1 - l_1 - d_1) &= (0, 1 - l_1 - d_1), \\ x(t_0 + l_2 + d_2) &= (0, l_2 + d_2), & x(t_0 + l_2 + d_1) &= (d_1, l_2 + d_1 + d_2), \\ x(t_0 + 1) &= (1 - l_2 - d_2, 0), & x(t_0 + l_1 + l_2 + d_1 + d_2) &= (l_1 + d, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, состояния $(l_1 + d, 0)$, $(0, l_2 + d)$ принадлежат предельному циклу со средней скоростью кластеров, вычисляемой по формуле (5).

Предположим, что

$$x(t_0) = (l_1, d_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_1 - l_1) &= (d_1, d_1 + d_2 - l_1), & x(t_0 + l_2 - d_2) &= (d_1, l_2), \\ x(t_0 + 1 - d_2) &= (1 + d_1 - l_2, 0), & x(t_0 + 1 + l_2 - d_1 - d_2) &= (0, l_2 - d_1), \\ x(t_0 + 1) &= (d_1 + d_2 - l_2, d_2), & x(t_0 + l_1 + l_2 + 1 - d_1 - d_2) &= (l_1, d_2). \end{aligned}$$

Таким образом, состояния (l_1, d_2) , (d_1, l_2) принадлежат предельному циклу со средней скоростью кластеров, вычисляемой по формуле (6). Теорема 4 доказана. \square

ПРИМЕР 4. Условия теоремы 4 выполняются, например, при

$$l_1 = 0,16, \quad l_2 = 0,4, \quad d_1 = 0,2, \quad d_2 = 0,28.$$

Теорема 5. Если выполняются условия

$$\begin{aligned} l_1 < d_1, \quad d_1 + d_2 < l_2 < 1 - d_1 - d_2, \\ l_1 + l_2 > 1 - d_1 - d_2, \end{aligned}$$

то существует ровно один предельный цикл. Этому циклу соответствует средняя скорость кластеров, вычисляемая по формуле (5).

Доказательство. При выполнении условия теоремы система, в соответствии с леммой 3, не может находиться в состоянии коллапса. Система не может также находиться в состоянии

свободного движения, что доказывается так же, как аналогичный факт при доказательстве теоремы 4. Таким образом, в соответствии с леммой 2 остается рассмотреть поведение системы после ее пребывания в состояниях $(d_1 + l_1, 0)$, $(0, d_2 + l_2)$, (l_1, d_2) , (d_1, l_2) .

Пусть

$$x(t_0) = (l_1 + d_1, 0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t_0 + 1 - l_1 - d_1) &= (0, 1 - l_1 - d_1), & x(t_0 + d_2 + l_2) &= (0, d_2 + l_2), \\ x(t_0 + 1) &= (1 - d_2 - l_2), & x(l_1 + l_2 + d_1 + d_2) &= (d_1 + l_1, 0). \end{aligned}$$

Следовательно, состояния $(l_1 + d_1, 0)$, $(0, l_2 + d_2)$ принадлежат предельному циклу со средней скоростью частиц, вычисляемой по формуле (5).

Предположим, что

$$x(t_0) = (l_1, d_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_1 - l_1) &= (d_1, d_1 + d_2 - l_1), & x(t_0 + l_2 - d_2) &= (d_1, l_2), \\ x(t_0 + 1 - d_2) &= (1 - l_2 + d_1, 0), & x(t_0 + 1) &= (1 - l_2 + d_1 + d_2, d_2), \\ x(t_0 + 1 + l_2 - d_1 - d_2) &= (0, l_2 - d_1), & x(t_0 + 1) &= (1 - l_2 + d_1 + d_2, d_2), \\ x(t_0 + 1 + l_2 - d_1 - d_2) &= (0, l_2 + d_2). \end{aligned}$$

Таким образом, из каждого из состояний (l_1, d_2) и (d_1, l_2) система попадает в состояние $(0, l_2 + d_2)$, принадлежащее циклу со средней скоростью частиц, вычисляемой по формуле (5). Теорема 5 доказана. \square

ПРИМЕР 5. Условия теоремы 5 выполняются, если, например,

$$l_1 = 0,2, \quad l_2 = 0,25, \quad d_1 = 0,4, \quad d_2 = 0,5.$$

Теорема 6. Пусть

$$\begin{aligned} l_1 < d_1, \quad d_1 + d_2 < l_2 < 1 - d_1 - d_2, \\ l_1 + l_2 > 1 - d_1 - d_2. \end{aligned}$$

Тогда существует ровно один предельный цикл. Этому циклу соответствует средняя скорость кластеров, вычисляемая по формуле (6).

Доказательство. При выполнении условия теоремы система, в соответствии с леммой 3, не может находиться в состоянии коллапса. Система не может также находиться в состоянии свободного движения. Это доказывается так же, как аналогичный факт при доказательстве теоремы 4. В соответствии с леммой 2 остается рассмотреть поведение системы после ее пребывания в состояниях $(d_1 + l_1, 0)$, $(0, d_2 + l_2)$, (l_1, d_2) , (d_1, l_2) .

Предположим, что

$$x(t_0) = (d_1 + l_1, 0).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}x(t_0 + d_2) &= (d_1 + d_2 + l_2, d_2), & x(t_0 + 1 - d_1 - l_1) &= (0, 1 - d_1 - l_1), \\x(t_0 + d_2 + l_2) &= (0, d_2 + l_2), & x(t_0 + 1) &= (1 - d_2 - l_2, 0), \\x(t_0 + d_1 + d_2 + l_2) &= (d_1, d_1 + d_2 + l_2 - 1), & x(t_0 + 1 + l_2) &= (d_1, l_2), \\x(t_0 + 2) &= (1 + d_1 - l_2), & x(t_0 + 2 + l_2 - d_1) &= (0, l_2 - d_1), \\x(t_0 + 2 + d_2) &= (d_1 + d_2 - l_2, d_2), & x(t_0 + 2 + l_1 + l_2 - d_1) &= (l_1, d_2), \\x(t_0 + 2 + l_2) &= (d_1, d_1 + d_2 - l_1), & x(t_0 + 2 + l_1 + 2l_2 - d_1 - d_2) &= (d_1, l_2).\end{aligned}$$

Таким образом, состояния (l_1, d_2) , (d_1, l_2) принадлежат предельному циклу со средней скоростью частиц, вычисляемой по формуле (6), а из состояний $(d_1 + l_1, 0)$, $(0, d_2 + l_2)$ система попадает в состояния этого цикла. Теорема 6 доказана. \square

ПРИМЕР 6. Условия теоремы 6 выполняются, если, например,

$$l_1 = 0,15, \quad l_2 = 0,55, \quad d_1 = 0,2, \quad d_2 = 0,4.$$

Теорема 7. В предположении, что

$$\begin{aligned}|1 - d_1 - d_2| &< l_1 < \min(d_1, 1 - d_1), \\1 - d_2 &< l_2 < d_2, \quad l_1 + l_2 > 1\end{aligned}$$

для любого начального состояния

$$v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1 + l_2}. \quad (7)$$

Доказательство. В соответствии с леммами 1–3 состояний свободного движения и коллапса не существует и достаточно рассмотреть поведение системы после нахождения ее в состояниях $(d_1 + l_1, 0)$, $(0, d_2 + l_2 - 1)$, (l_1, d_1) , (d_1, l_2) .

Пусть

$$x(t_0) = (l_1 + d_1, 0).$$

Имеем

$$\begin{aligned}x(t_0 + 1 - l_1) &= (d_1, 1 - l_1), & x(t_0 + l_2) &= (d_1, l_2), \\x(t_0 + 1) &= (1 + d_1 - l_2, 0), & x(t_0 + l_1 + l_2) &= (l_1 + d_1, 0).\end{aligned}$$

Значит, состояния $(l_1 + d_1, 0)$ и (d_1, l_1) принадлежат циклу со средней скоростью кластеров, вычисляемой по формуле (7).

Если

$$x(t_0) = (0, d_2 + l_2 - 1),$$

то

$$\begin{aligned}x(t_0 + 2 - d_2 - l_2) &= (2 - d_2 - l_2, 0), & x(t_0 + d_1) &= (d_1 + d_2 + l_2 - 2), \\x(t_0 + 2 - d_1) &= (d_1, l_2).\end{aligned}$$

Следовательно, из состояния $(0, d_2 + l_2 - 1)$ система попадает в состояние (d_1, l_1) , принадлежащее циклу со средней скоростью, вычисляемой по формуле (7).

Предположим, что

$$x(t_0) = (l_1, d_2).$$

Тогда

$$x(t_0 + 1 - d_2) = (1 - d_2 + l_1, 0), \quad x(t_0 + d_1) = (d_1 + l_1, 0).$$

Таким образом, из состояния (l_1, d_2) система попадает в состояние $(d_1 + l_1, 0)$, которое принадлежит циклу со средней скоростью, вычисляемой по формуле (7). Теорема 7 доказана. \square

ПРИМЕР 7. Условия теоремы 6 выполняются, например, при

$$l_1 = 0,3, \quad l_2 = 0,8, \quad d_1 = 0,4, \quad d_2 = 0,85.$$

Теорема 8. При выполнении неравенств

$$\begin{aligned} l_1 &< \min(d_1, 1 - d_1 - d_2), \\ \max(d_1 + d_2, 1 - d_1 - d_2) &< l_2 < 1 - d_2, \\ 1 - d_2 &< l_2 < d_2, \quad l_1 + l_2 < 1 \end{aligned}$$

существует единственный цикл. На этом цикле средняя скорость одного кластера равна $\frac{1}{2}$, а скорость другого кластера равна 1.

Доказательство. В соответствии с леммой 3 при выполнении условия теоремы 8 система не может попасть в состояние коллапса. Система не может также находиться в состоянии свободного движения, что доказывается аналогично тому, как при выполнении условий теоремы 4. Таким образом, нужно рассмотреть поведение системы после нахождения в состояниях $(l_1 + d_1, 0)$, $(0, l_2 + d_2)$, (l_1, d_2) , (d_1, l_2) .

Пусть

$$x(t_0) = (d_1 + l_1, 0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_2) &= (d_1 + d_2 - l_1, d_2), \quad x(t_0 + 1 - d_1 - l_1) = (0, 1 - d_1 - l_1), \\ x(t_0 + d_2 + l_2) &= (0, d_2 + l_2), \quad x(t_0 + 1) = (1 - d_2 - l - 2, 0), \\ x(t_0 + d_1 + d_2 + l_2) &= (d_1, d_1 + d_2 + l_2 - 1), \quad x(t_0 + 1 + l_2) = (d_1, l_2), \\ x(t_0 + 2 + l_2 - d_1) &= (0, l_2 - d_1), \quad x(t_0 + 2 + d_2 + l_2) = (0, d_2 + l_2). \end{aligned}$$

Таким образом, состояния $(0, d_2 + l_2)$ и (d_1, l_2) принадлежат циклу со средними скоростями кластеров $v_1 = \frac{1}{2}$ и $v_2 = 1$, а из состояния $(d_1 + l_1, 0)$ система попадает в состояния этого цикла.

Если

$$x(t_0) = (l_1, d_1),$$

то

$$x(t_0 + d_1 - l_1) = (d_1, d_1 + d_2 - l_1), \quad x(t_0 + l_2 - d_1) = (d_1, l_2).$$

Таким образом, из состояния (l_1, d_1) система попадает в состояние цикла со средними скоростями кластеров $v_1 = \frac{1}{2}$ и $v_2 = 1$. Теорема 8 доказана. \square

ПРИМЕР 8. Условия теоремы 6 выполняются, например, при

$$l_1 = 0,05, \quad l_2 = 0,75, \quad d_1 = 0,1, \quad d_2 = 0,3.$$

Теорема 9. Пусть

$$l_1 < \min(d_1, 1 - d_1 - d_2), \quad \max(d_1 + d_2, 1 - d_1 - d + 2) < l_2 < 1 - d_2, \quad l_1 + l_2 > 1.$$

Тогда имеет единственный цикл. На этом цикле средняя скорость одного кластера равна $\frac{1}{2(l_1+l_2)}$, а другого — $\frac{1}{l_1+l_2}$.

Доказательство. В предположениях теоремы 9 система, в соответствии с леммой 3, не может находиться в состоянии коллапса, а в соответствии с леммой 1 система не может находиться в состоянии свободного движения. Докажем, что состояния $(d_1 + l_1, 0)$, $(0, d_2 + l_2 - 1)$, (l_1, d_2) , (d_1, l_2) принадлежат циклу со средними скоростями кластеров

$$v_1 = \frac{1}{2(d_1 + l_1)}, \quad v_2 = \frac{1}{l_1 + l_2},$$

откуда, в соответствии с леммой 2, будет следовать утверждение теоремы.

Пусть

$$x(t_0) = (l_1 + d_1, 0).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_2) &= (d_1 + d_2 + l_1, d_2), & x(t_0 + 1 - d_1 - l_1) &= (0, 1 - d_1 - l_1), \\ x(t_0 + d_2 + l_2) &= (0, d_2 + l_2), & x(t_0 + 1) &= (1 - d_2 - l_2, 0), \\ x(t_0 + 1 + d_2) &= (1 - l_2, d_2), & x(t_0 + d_1 + d_2 + l_2) &= (d_1, d_1 + d_2 - l_1), \\ x(t_0 + l_1 + 2l_2) &= (d_1, l_2), & x(t_0 + 1 + l_1 + l_2) &= (1 + d_1 - l_2, 0), \\ x(t_0 + 2(l_1 + l_2)) &= (d_1 + l_1, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, состояния $(d_1 + l_1, 0)$, $(0, d_2 + l_2 - 1)$, (l_1, d_2) , (d_1, l_2) принадлежат циклу с периодом $2(l_1 + l_2)$, за который кластер 1 совершает один оборот, а кластер 2 — два оборота. Теорема 9 доказана. \square

ПРИМЕР 9. Условия теоремы 9 выполняются, например, в случае, если

$$l_1 = 0,3, \quad l_2 = 0,75, \quad d_1 = 0,35, \quad d_2 = 0,2.$$

Теорема 10. Если

$$\min(l_1, l_2) > \max(d_1, d_2), \quad l_1 + l_2 < 1 - d_1 - d_2,$$

то из любого начального состояния система попадает либо в состояние свободного движения, либо в состояние коллапса.

Доказательство. Пусть

$$x(t_0) = (d_1 + l_1, 0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_2) &= (d_1 + d_2 + l_1, d_2), & x(t_0 + 1 - d_1 - l_1) &= (0, 1 - d_1 - l_1), \\ x(t_0 + 1 - l_1) &= (d_1, 1 - l_1), & x(t_0 + 1) &= (d_1 + l_1, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, состояние $(d_1 + l_1, 0)$ является состоянием свободного движения.

Аналогичным образом доказывается, что состояние $(0, d_2 + l_2)$ также является состоянием свободного движения.

Если

$$x(t_0) = (l_1, d_2),$$

то имеем

$$\begin{aligned} x(t_0 + 1 - l_1) &= (0, 1 + d_2 - l_1), & x(t_0 + 1 - d_2) &= (l_1 - d_2, 0), \\ x(t_0 + 1 + d_1 - l_1) &= (d_1, d_1 + d_2 - l_1), & x(t_0 + 1) &= (d_1, d_2). \end{aligned}$$

Таким образом, из состояния (l_1, d_2) система попадает в состояние (d_1, d_2) , являющееся состоянием коллапса. Аналогично доказывается, что из состояния (d_1, l_2) система также попадает в состояние коллапса.

Циклов, на которых система не находится в состоянии свободного движения или в состоянии коллапса, не существует. Действительно, такому циклу, в соответствии с леммой 2, принадлежало хотя бы одно из состояний $(d_1 + l_1, 0)$, $(0, d_2 + l_2)$, (l_1, d_2) , (d_1, l_2) . Но уже установлено, что из каждого этого состояния система попадает либо в состояние свободного движения, либо в состояние коллапса. Теорема 10 доказана. \square

ПРИМЕР 10. Условия теоремы 10, например, выполняются, если

$$l_1 = 0,2, \quad l_2 = 0,3, \quad d_1 = 0,1, \quad d_2 = 0,15.$$

Теорема 11. Если выполняются неравенства

$$\min(l_1, l_2) > \max(d_1, d_2), \quad l_1 < 1 - d_1, \quad l_2 < 1 - d_2, \quad 1 - d_1 - d_2 < l_1 + l_2 < 1,$$

то в зависимости от начального состояния либо система попадает в состояние коллапса, либо реализуется предельный цикл со средней скоростью кластеров, вычисляемой по формуле (7).

Доказательство. В предположении теоремы система не попадает в состояние свободного движения ни из какого начального состояния, что доказывается так же, как аналогичное утверждение при доказательстве теоремы 4. \square

Как при доказательстве теоремы 10, устанавливается, что из состояний (l_1, d_2) и (d_1, l_2) система попадает в состояние коллапса. В соответствии с леммой 2 достаточно рассмотреть поведение системы после ее нахождения в состояниях $(d_1 + l_1, 0)$ и $(0, d_2 + l_2)$.

Предположим, что

$$x(t_0) = (d_1 + l_1, 0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t_0 + d_2) &= (d_1 + d_2 + l_1, d_2), & x(t_0 + 1 - d_1 - l_1) &= (0, 1 - d_1 - l_1), \\ x(t_0 + d_2 + l_2) &= (0, d_2 + l_2), & x(t_0 + 1) &= (1 - d_2 - l_2, 0), \\ x(t_0 + d_1 + d_2 + l_1 + l_2) &= (d_1 + l_1, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, состояния $(d_1 + l_1, 0)$ и $(0, d_2 + l_2)$ принадлежат циклу с периодом $d_1 + d_2 + l_1 + l_2$, за который оба кластера совершают по одному обороту, и, следовательно, средняя скорость каждого кластера вычисляется по формуле (5). Теорема 11 доказана. \square

ПРИМЕР 11. Условия теоремы 11 выполняются, например, если

$$l_1 = 0,4, \quad l_2 = 0,5, \quad d_1 = 0,2, \quad d_2 = 0,3.$$

Теорема 12. Пусть

$$\min(l_1, l_2) > \max(d_1, d_2, 1 - d_1, 1 - d_2).$$

Тогда система попадает в состояние коллапса из любого начального состояния.

Доказательство. При выполнении условия теоремы в любом состоянии каждый кластер занимает хотя бы один узел. Но кластер не может занимать одновременно два узла, так как хотя бы один из узлов должен быть занят другим кластером, а узел не может быть занят одновременно двумя кластерами. Если кластер находится у узла, то он не может перемещаться, так как, в предположениях теоремы, кластер сразу после пересечения узла должен занимать оба узла. Таким образом, оба кластера останавливаются в момент времени, в который передняя точка кластера достигает узла, откуда следует утверждение теоремы. \square

ПРИМЕР 12. Условия теоремы 12 выполняются, например, при

$$l_1 = 0,8, \quad l_2 = 0,9, \quad d_1 = 0,3, \quad d_2 = 0,4.$$

Примеры 1–12 показывают, что для каждой из теорем 1–12 значения l_1, l_2, d_1, d_2 могут быть заданы так, чтобы условия теоремы выполнялись.

Таким образом, выявлены следующие 12 возможных сценариев, характеризующихся спектром средних скоростей, при заданных значениях l_1, l_2, d_1, d_2 .

1. Система попадает в состояние свободного движения из любого начального состояния, $v_1 = v_2 = 1$.
2. В зависимости от начального состояния либо система попадает в состояние свободного движения, $v_1 = v_2 = 1$, либо $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1 + l_2 + d_1 + d_2}$.
3. В зависимости от начального состояния либо система попадает в состояние свободного движения, $v_1 = v_2 = 1$, либо $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1 + l_2 + 1 - d_1 - d_2}$.
4. В зависимости от начального состояния либо $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1 + l_2 + d_1 + d_2}$, либо $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1 + l_2 + 1 - d_1 - d_2}$.
5. Для любого начального состояния $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1 + l_2 + d_1 + d_2}$.
6. Для любого начального состояния $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1 + l_2 + 1 - d_1 - d_2}$.
7. Для любого начального состояния $v_1 = v_2 = \frac{1}{l_1 + l_2}$.
8. Для любого начального состояния средняя скорость одного кластера равна $\frac{1}{2}$, а другого — 1.
9. Для любого начального состояния средняя скорость одного кластера равна $\frac{1}{2(l_1 + l_2)}$, а другого — $\frac{1}{l_1 + l_2}$.
10. В зависимости от начального состояния система попадает либо в состояние свободного движения, $v_1 = v_2 = 1$, либо в состояние коллапса, $v_1 = v_2 = 0$.

11. В зависимости от начального состояния либо система попадает в состояние коллапса, $v_1 = v_2 = 0$, либо средняя скорость кластеров равна $v = \frac{1}{l_1 + l_2 + d_1 + d_2}$.
12. Система попадает в состояние коллапса из любого начального состояния.

Гипотеза 1. При любых значениях l_1, l_2, d_1, d_2 выполняется один из выявленных 12 сценариев.

Имитационное моделирование подтверждает эту гипотезу.

Симметричная система

В настоящем разделе система рассматривается в следующих предположениях:

- 1) $l_1 = l_2 = l, d_1 = d_2 = d$,
- 2) $l_1 = l_2 = l, d_1 = 1 - d_2 = d \leq \frac{1}{2}$.

В обоих случаях каждый контур делится в соотношении d к $1 - d$. Без ограничения общности будем считать, что $d \leq \frac{1}{2}$. В первом случае один из кластеров переходит с большей дуги на меньшую, а другой — с меньшей на большую (однаправленное движение); рис. 3. Во втором случае, проходя через один из узлов, оба кластера переходят с большей дуги на меньшую, а проходя через другой узел — оба кластера переходят с меньшей дуги на большую (сонаправленное движение); рис. 4.

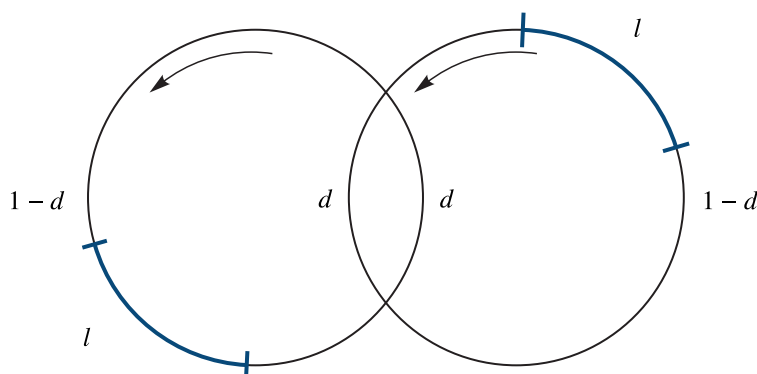


Рис. 3. Симметричная система с однонаправленным движением

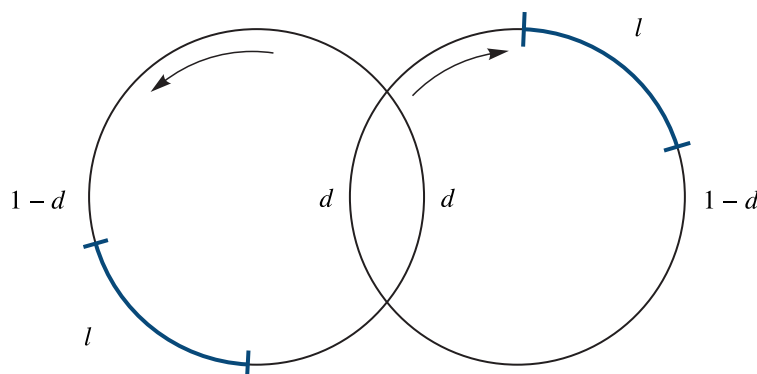


Рис. 4. Симметричная система с сонаправленным движением

Дискретный вариант симметричной системы рассматривался в [Yashina, Tatashev, 2020a]. В непрерывном варианте такая система рассматривалась в [Yashina, Tatashev, 2020b] (для сонаправленного движения) и в [Buslaev, Tatashev, Yashina, 2021] (для однонаправленного движения). Для симметричных случаев $l_1 = l_2$, $d_1 = d_2$ (однаправленное движение) и $l_1 = l_2$, $d_1 = 1 - d_2$ (сонаправленное движение) возможны 5 сценариев и 3 сценария соответственно, причем для каждого сценария найдены необходимые и достаточные условия его реализации.

Приведем подробное рассмотрение симметричных вариантов систем. Дадим доказательство того, что для непрерывной системы возможны ровно 5 сценариев поведения для однонаправленного движения и ровно 3 сценария для сонаправленного движения. Для каждого сценария приведем необходимые и достаточные условия на параметры l , d для того, чтобы этот сценарий выполнялся.

Теорема 13. Если $l_1 = l_2 = l$, $d_1 = d_2 = d$,

$$(l \leq d) \& \left(\left(l \leq \frac{n}{2} - d \right) \vee (l \geq n - 2d) \right),$$

то из любого начального состояния система попадает в состояние свободного движения.

Доказательство. В соответствии с леммой 2 достаточно рассмотреть поведение системы после ее пребывания в состояниях $(d + l, 0)$, $(0, d + l)$, (l, d) , (d, l) .

Докажем сначала утверждение теоремы в предположении, что $(l \leq d) \& \left(l \leq \frac{1}{2} - d \right)$.

Если $x(t_0) = (d + l, 0)$, то $x(t_0 + d) = (2d + l, d)$, $x(t_0 + 1 - d - l) = (0, 1 - d - l)$, $x(t_0 + 1 - l) = (d, 1 - l)$, $x(t_0 + 1) = (d + l, 0)$. Следовательно, $(d + l, 0)$ — состояние свободного движения. Аналогично доказывается, что состоянием свободного движения является состояние $(0, d + l)$.

Если $x(t_0) = (l, d)$, то $x(t_0 + d - l) = (d, 2d - l)$, $x(t_0 - d + l) = (1 - d + l, 0)$, $x(t_0 + 1) = (l, d)$. Таким образом, состояние (l, d) — состояние свободного движения. Аналогично с состоянием свободного движения при $x(t_0) = (d, l)$. Таким образом, при выполнении условия $(l \leq d) \& \left(l \leq \frac{1}{2} \right)$ утверждение теоремы верно.

Пусть $(l \leq d) \& \left(l \geq \frac{1}{2} - d \right)$. Тогда если $x(t_0) = (d + l, 0)$, то $x(t_0 + 1 - d - l) = (0, 1 - d - l)$, $x(t_0 + 1 - l) = (d, 1 - l)$, $x(t_0 + 1) = (d + l, 0)$. Если $x(t_0) = (l, d)$, то $x(t_0 + d - l) = (d, 2d - l)$, $x(t_0 + 1 - l) = (0, d - l)$, $x(t_0 + 1) = (l, d)$. Таким образом, состояния $(d + l, 0)$, (l, d) — состояния свободного движения. Аналогично доказывается, что состояния $(d + l, 0)$, (l, d) также состояния свободного движения. Теорема 13 доказана. \square

В предположениях теоремы 13 реализуется сценарий 1 (список в конце § 5).

Теорема 14. Если $l_1 = l_2 = l$, $d_1 = d_2 = d$,

$$\frac{1}{2} - d < l < \min(d, 1 - 2d),$$

то в зависимости от начального состояния либо система попадает в состояние свободного движения, либо средняя скорость кластеров вычисляется по формуле

$$v = v_1 = v_2 = \frac{1}{2(d + l)}. \quad (8)$$

Существует единственный цикл, при этом период этого цикла равен

$$T = 2(d + l). \quad (9)$$

Доказательство. Пусть $x(t_0) = (0, 0)$. Имеем $x(t_0 + d) = (d, d)$, $x(t_0) = (0, 0)$. Следовательно, состояние $(0, 0)$ — состояние свободного движения.

Пусть $x(t_0) = (d + l, 0)$. Тогда $x(t_0 + d) = (2d + l, d)$, $x(t_0 + 1 - d - l) = (0, 1 - d - l)$, $x(t_0 + d + l) = (0, d + l)$, $x(t_0 + 2d + 2l) = (d + l, 0)$. Следовательно, существует цикл со средней скоростью и периодом, вычисляемым соответственно по формулам (8) и (9), причем этому циклу принадлежат состояния $(d + l, 0)$, $(0, d + l)$.

Из состояния (l, d) система попадает в состояния, принадлежащие данному циклу. Действительно, при $x(t_0) = (l, d)$ имеем $x(t_0 + d - l) = (d, 2d - l)$, $x(t_0 + 1 - l) = (0, 1 - d - l)$, $x(t_0 + 2d - l) = (0, d + l)$. Аналогично доказывается, что из состояния (d, l) система также попадает в состояния рассматриваемого цикла. Учитывая лемму 2, получаем утверждение теоремы 14. \square

При выполнении условия теоремы 14 реализуется сценарий 2 (§ 5).

Теорема 15. Пусть $l_1 = l_2 = l$, $d_1 = d_2 = d$,

$$d < l < \frac{1}{2} - d.$$

Тогда система попадает в состояние свободного движения или в состояние коллапса.

Доказательство. В предположениях теоремы выполняется неравенство, и, следовательно, (d, d) — состояние коллапса.

При $x(t_0 + d) = (d + l, 0)$ имеем $x(t_0 + d) = (2d + l, d)$, $x(t_0 + 1 - d - l) = (0, 1 - d - l)$, $x(t_0 + 1 - l) = (d, 1 - l)$, $x(t_0 + 1) = (d + l, 0)$. Следовательно, $(d + l, 0)$ — состояние свободного движения. Аналогично доказывается, что состояние $(0, d + l)$ также является состоянием свободного движения.

Если $x(t_0) = (l, d)$, то $x(t_0 + 1 - l) = (0, 1 + d - l)$.

Пусть $l < 2d$. Тогда имеем $x(t_0 + 1 - d) = (l - d, 0)$, $x(t_0 + 1 + d - l) = (d, 2d - l)$, $x(t_0 + 1) = (d, d)$, и, следовательно, система попадает в состояние коллапса.

Если $l > 2d$, то $x(t_0 + 1 + d - l) = (d, 1 + 2d - l)$, $x(t_0 + 1 - d) = (l - d, 0)$, $x(t_0 + 1 - d) = (d + l, 0)$, и, следовательно, система попадает в состояние свободного движения.

Если $x(t_0) = (d, l)$, $l > 2d$, то система также попадает в состояние свободного движения, что доказывается аналогично.

Пусть $x(t_0) = (l, d)$, $l = 2d$. В этом случае $x(t_0 + 1 - 2d) = (0, 1 - 2d)$, $x(t_0 + 1 - d) = (d, 0)$, $x(t_0 + 1 - d + l) = (d + l, 0)$. Следовательно, система попадает в состояние свободного движения.

Если $x(t_0) = (d, l)$, $l = 2d$, то имеем $x(t_0 + 1 - 2d) = (0, 1 - d)$, $x(t_0 + 1 - d) = (d, 0)$, и, следовательно, система попадает в состояние свободного движения. Теорема 15 доказана. \square

В предположениях теоремы 15 реализуется сценарий 10 (§ 5).

Теорема 16. Пусть $l_1 = l_2 = l$, $d_1 = d_2 = d$,

$$\max\left(d, \frac{1}{2} - d\right) < l < 1 - 2d.$$

Тогда система попадает либо в состояние коллапса, либо в состояние, принадлежащее единственному циклу. Средняя скорость и период этого цикла вычисляются по формулам (8) и (9) соответственно.

Условия теоремы 16 соответствуют следующей теореме.

Теорема 17. Пусть $l_1 = l_2 = l$, $d_1 = d_2 = d$,

$$l > d, \quad l \geq 1 - 2d.$$

Тогда из любого начального состояния система попадает в состояние коллапса.

Теоремы 16, 17 доказываются аналогично теоремам 13–15.

Условия теоремы 16 соответствуют сценарию 11, а условия теоремы 17 — сценарию 12 (§ 5).

При любых значениях l , d для симметричного варианта системы выполняются условия одной и только одной из теорем 13–17.

Сценарии 3–9 не соответствуют никаким сценариям, которые могут иметь место для симметричной системы с однонаправленным движением.

Для симметричной системы с однонаправленным движением имеет место один из трех сценариев, которые описываются формулировками следующих теорем.

Теорема 18. Если $l \leq \frac{1}{2}$, то система попадает в состояние свободного движения из любого начального состояния.

Теорема 19. Если $\frac{1}{2} < l \leq 1 - d$, то существует единственный цикл. При этом средняя скорость этого цикла равна $v = \frac{1}{2l}$, а период цикла — $T = 2l$.

Теорема 20. Если $l > 1 - d$, то система попадает в состояние коллапса из любого начального состояния.

В предположениях теорем 18, 19, 20 поведение системы соответствует сценариям 1, 7 и 12 (§ 5).

Перечислим сценарии для симметричной системы с однонаправленным и сонаправленным движением (рис. 4).

Для однонаправленного движения имеем следующие 5 сценариев.

1. Система попадает в состояние свободного движения из любого начального состояния, $v = 1$.
2. Система попадает в состояние свободного движения из любого начального состояния, $v = 0$.
3. В зависимости от начального состояния система попадает в состояние свободного движения, $v = 1$, или реализуется цикл со средней скоростью $v = \frac{1}{2(l+d)}$ для каждого кластера.
4. В зависимости от начального состояния система попадает в состояние свободного движения, $v = 1$, или в состояние коллапса, $v = 0$.
5. В зависимости от начального состояния система попадает в состояние коллапса, $v = 0$, или реализуется цикл со средней скоростью $v = \frac{1}{2(l+d)}$ для каждого кластера.

Для сонаправленного движения имеем следующие 3 сценария (рис. 5).

1. Система попадает в состояние свободного движения из любого начального состояния, $v = 1$.
2. Система попадает в состояние коллапса из любого начального состояния, $v = 0$.
3. При любом начальном состоянии реализуется цикл со средней скоростью $v = \frac{1}{2l}$ для каждого кластера.

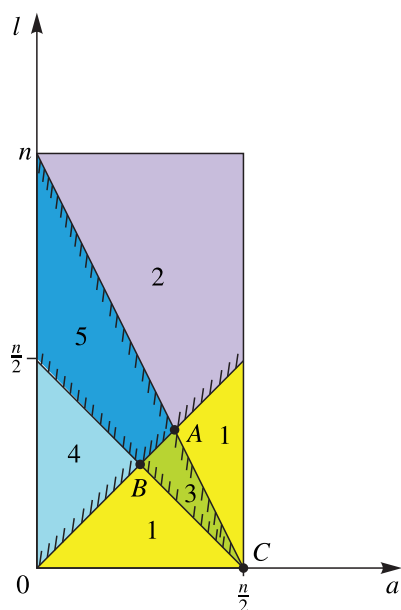


Рис. 5. Поведение системы с однонаправленным движением: 1 — $v = 1$; 2 — $v = 0$; 3 — $v = \frac{1}{2(d+l)}$ или $v = 1$; 4 — $v = 0$ или $v = 1$; 5 — $v = 0$ или $v = \frac{1}{2(d+l)}$

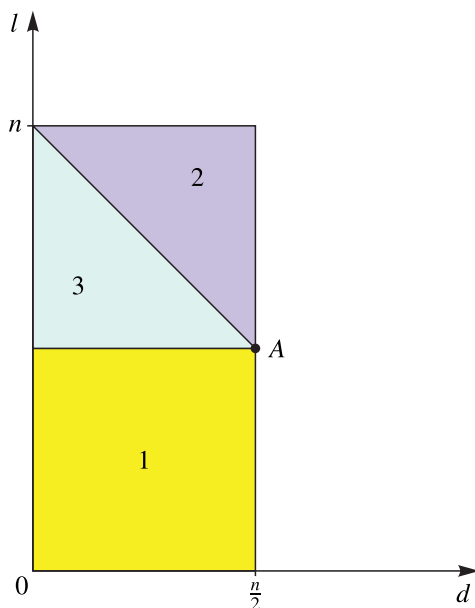


Рис. 6. Поведение системы с сонаправленным движением: 1 — $v = 1$; 2 — $v = 0$; 3 — $v = \frac{1}{2l}$

Заключение

Рассмотрен несимметричный вариант двухконтурной системы с двумя узлами, которая принадлежит к классу сетей Буслаева. Контурные имеют одинаковую длину, принимаемую за единицу. Длины кластеров в общем случае различны и равны l_1, l_2 . Узлы делят контур 1 в соотношении d_1 к $1 - d_1$, а контур 2 — в соотношении d_2 к $1 - d_2$. Выявлено 12 вариантов вида спектра средних скоростей — множества пар значений средних скоростей кластеров при фиксированных значениях l_1, l_2, d_1, d_2 . В каждом из этих сценариев спектр содержит одну или две пары значений средних скоростей, причем средние скорости кластеров 1 и 2 равны между собой или средняя

скорость одного кластера в два раза превышает среднюю скорость другого кластера. Для симметричных случаев $l_1 = l_2$, $d_1 = d_2$, $l_1 = l_2$, $d_1 = 1 - d_2$ (сонаправленное движение) возможны 5 сценариев и 3 сценария соответственно. Для каждого сценария найдены необходимые и достаточные условия для значений параметров системы, при которых этот сценарий реализуется.

Список литературы (References)

- Бугаев А. С., Таташев А. Г., Яшина М. В. Спектр непрерывной замкнутой симметричной цепочки с произвольным числом контуров // Матем. моделирование. — 2021. — Т. 33, № 4. — С. 21–44. — DOI: 10.20948/mm-2021-04-02
- Bugaev A. S., Tatashev A. G., Yashina M. V. Spectrum of a continuous closed symmetric chain with an arbitrary number of contours // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2021. — Vol. 13, No. 6. — P. 1014–1027. (Original Russian paper: Bugaev A. S., Tatashev A. G., Yashina M. V. Spektr nepreryvnoi zamknutoi simmetrichnoi tsepochki s proizvol'nym chislom konturov // Matem. modelirovanie. — 2021. — Vol. 33, No. 4. — P. 21–44. — DOI: 10.20948/mm-2021-04-02)
- Мышкис П. А., Таташев А. Г., Яшина М. В. Кластерное движение в двухконтурной системе с приоритетным правилом разрешения конфликта // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2020. — № 3. — С. 3–13.
- Myshkis P. A., Tatashev A. G., Yashina M. V. Cluster motion in a two-contour system with priority rule for conflict resolution // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2020. — Vol. 59, No. 3. — P. 311–321. — DOI: 10.1134/s1064230720030119 (Original Russian paper: Myshkis P. A., Tatashev A. G., Yashina M. V. Klasternoe dvizhenie v dvukhkонтурной системе s prioritetnym pravilom razresheniya konflikta // Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya. — 2020. — No. 3. — P. 3–13.)
- Яшина М. В., Таташев А. Г. Сети Буслаева: динамические системы потоков частиц на регулярных сетях. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2023. — 216 с.
- Yashina M. V., Tatashev A. G. Seti Buslaeva: dinamicheskiye sistemy potokov chastits na regul'yarnykh setyakh [Buslaev networks: dynamical systems of particle flows on regular networks]. — Moscow–Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy, 2023 (in Russian).
- Belitsky V., Ferrari P. A. Invariant measures and convergence properties for cellular automaton 184 and related processes // J. Stat. Phys. — 2005. — Vol. 118, No. 3/4. — P. 589–523. — DOI: 10.1007/s10955-004-8822-4
- Biham O., Middleton A. A., Levine D. Self-organization and a dynamic transition in traffic-flow models // Phys. Rev. A. The American Physical Society. — 1992. — Vol. 46, No. 10. — P. R6124–R6127.
- Blank M. Metric properties of discrete time exclusion type processes in continuum // J. Stat. Phys. — 2010. — Vol. 140, No. 1. — P. 170–197. — DOI: 10.1007/s10955-010-9983-y
- Bugaev A. S., Buslaev A. P., Kozlov V. V., Yashina M. V. Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling, p. 6, 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC 2011), Washington, USA, Part 6. — 2011. — P. 477–481. — DOI: 10.1109/ITSC.2011.6082805
- Buslaev A. P., Fomina M. Yu., Tatashev A. G., Yashina M. V. On discrete flow networks model spectra: statements, simulation, hypotheses // Journal of Physics: Conference Series. — 2018. — Vol. 1053. — 012034. — P. 1–7. — DOI: 10.1088/1742/6596/1053/1/012034
- Buslaev A. P., Tatashev A. G. Exact results for discrete dynamical systems on a pair of contours // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — Vol. 41, No. 17. — P. 7283–7294. — DOI: 10.1002/mma.4822
- Buslaev A. P., Tatashev A. G., Yashina M. V. About synergy of flows on flower // Dependability Engineering and Complex Systems. Proceedings of the Eleventh International Conference on Dependability and Complex Systems DepCoS, RELCOMEX, June 27 – July 1, Brunow, Poland. — 2016. — Vol. 470.
- Buslaev A. P., Tatashev A. G., Yashina M. V. Flow spectrum of closed/open contours chains // Computational and Mathematical Methods. — 2021. — Vol. 3, No. 3. — P. e1087. — DOI: 10.1002/cmm4.1087

- Buslaev A. P., Tatashev A. G., Yashina M. V.* Qualitative properties of dynamical system on toroidal chainmail // 11th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM). — 2013. — DOI: 10.1063/1.4825710
- D'Souza R. M.* Coexisting phases and lattice dependence of a cellular automaton model for traffic flow // *Phys. Rev. E. The American Society.* — 2005. — Vol. 71, No. 6. — P. 066112.
- Gray L., Griffeth D.* The ergodic theory of traffic jams // *J. Stat. Phys.* — 2001. — Vol. 105, No. 3/4. — P. 413–452. — DOI: 10.1023/A:1012202706850
- Kanai M., Nishinari K., Tokihiro T.* Exact solution and asymptotic behavior of the asymmetric behavior of the asymmetric simple exclusion process on a ring. — 2009. — arXiv.0905.2795
- Kerner B. S.* The physics of traffic. Empirical freeway pattern features. Applications and theory. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.
- Kerner B. S., Klenov S. L.* A microscopic model for phase transitions in traffic flow // *J. Phys. A. Math. Gen.* — 2002. — Vol. 35. — P. L31. — DOI: 10.1088/0305-4470/35/3/102
- Kerner B. S., Klenov S. L., Wolf D. E.* Cellular automata approach to three phase traffic theory // *J. Phys. A. Math. Gen.* — 2002. — Vol. 3. P. 9971–10013. — DOI: 10.1088/0305.4470/35/47/303
- Kozlov V. V., Buslaev A. P., Tatashev A. G.* On synergy of totally connected flows on chainmails // *Proceed. of International Conference of CMMSE, Almeria, Spain.* — 2013. — Part. 3. — P. 861–874.
- Kozlov V. V., Buslaev A. P., Tatashev A. G., Yashina M. V.* Dynamical systems on honeycombs // *Traffic and Granular Flow '13, Springer, II.* — 2015. — P. 441–452. — DOI: 10.1007/978-3-31910629-8-49
- Kutepnikov I. A., Tatashev A. G., Yashina M. V.* On properties of closed/open two-dimensional network-chainmail with different rules of particle movement // *Periodicals of Engineering and Natural Sciences.* — 2019. — Vol. 7, No. 1. — P. 447–457. — DOI: 10.21533/pen.v7i1.340.g288
- Spitzer F.* Interaction of Markov processes // *Advances in Mathematics.* — 1970. — Vol. 5. — P. 246–290. — DOI: 10.1016/0001-8708(70)90034-4
- Tatashev A. G., Yashina M. V.* Behavior of continuous two-contours system // *WSEAS Transactions on Mathematics.* — 2019a. — Vol. 18, Art. 5. — P. 37–45.
- Tatashev A. G., Yashina M. V.* Self-organization of two-contours dynamical system with common node and cross movement // *WSEAS Transactions on Mathematics.* — 2019b. — Vol. 18, Art. 45. — P. 373–378.
- Tatashev A. G., Yashina M. V.* Spectrum of elementary cellular automata and closed chains of contours // *Machines.* — 2019c. — Vol. 7, No. 2. — P. 28. — DOI: 10.3390/machines7020028053/1/012034
- Wolfram S.* Statistical mechanics of cellular automata // *Rev. Mod. Phys.* — 1983. — Vol. 55. — P. 601–644. — DOI: Rev.Mod.Phys.55.601
- Yashina M. V., Tatashev A. G.* A two-contour system with two clusters of different lengths // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* — 2021. — Vol. 17, No. 2. — P. 221–242.
- Yashina M. V., Tatashev A. G.* Discrete open Buslaev chain with heterogeneous loading // 7th International Conference on Control Mechatronics and Automation, ICCMA 2019, Delft, Netherlands, 8988654. — 2019. — P. 283–288. — DOI: 10.1109/ICCMA46720.2019.8988654
- Yashina M. V., Tatashev A. G.* Spectral cycles and average velocity of clusters in discrete two-contours system with two nodes // *Math. Method. Appl. Sci.* — 2020a. — Vol. 43, No. 7. — P. 4303–4316. — DOI: 10.1102/mma6194
- Yashina M. V., Tatashev A. G.* Traffic model based on synchronous and asynchronous exclusion processes // *Math. Method. Appl. Sci.* — 2018. — Vol. 43, No. 14. — P. 8136–8146. — DOI: 10.1002/mma.6237
- Yashina M. V., Tatashev A. G.* Uniform cluster traffic model on closed two-contours system with two non-symmetrical common nodes // *Traffic and Granular Flow 2019.* — Cham: Springer International Publishing, 2020b. — P. 583–588.
- Yashina M. V., Tatashev A. G., Fomina M. Y.* Optimization of velocity mode in Buslaev two-contour networks via competition resolution rules // *International Journal of Interactive Mobile Technologies.* — 2020. — Vol. 14, No. 10. — P. 61–73. — DOI: 103991/ijim.v14i10.14641