

УДК: 519.872.6

Моделирование транспортных потоков на основе квазигазодинамического подхода и теории клеточных автоматов с использованием суперкомпьютеров

В. Ф. Тишкин, М. А. Трапезникова^а, А. А. Чечина, Н. Г. Чурбанова

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук,
Россия, 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4

E-mail: ^а mtrapez@yandex.ru

Получено 07.11.2023, после доработки — 22.12.2023.

Принято к публикации 22.12.2023.

Целью исследования являются моделирование динамики автотранспортных потоков на транспортных сетях мегаполисов и систематизация современного состояния дел в этой области. Во введении указывается, что на первый план выходит развитие интеллектуальных транспортных систем, которые становятся неотъемлемой частью современных транспортных технологий. Основным ядром таких систем являются адекватные математические модели, максимально приближенные к реальности. Отмечается, что в связи с большим объемом вычислений необходимо использование суперкомпьютеров, следовательно, создание специальных параллельных алгоритмов. В начале статьи приводится современная классификация моделей, обсуждаются отличительные особенности каждого класса со ссылками на соответствующие примеры. Далее основное внимание уделяется созданным авторами статьи разработкам в области как макроскопического, так и микроскопического моделирования и определению места этих разработок в приведенной выше классификации. Макроскопическая модель основана на приближении сплошной среды и использует идеологию квазигазодинамических систем уравнений. Указаны ее достоинства по сравнению с существующими моделями этого класса. Система уравнений модели представлена как в одномерном варианте, но с возможностью исследования многополосного движения, так и в двумерном варианте, с введением понятия боковой скорости, то есть скорости перестроения из полосы в полосу. Второй вариант позволяет проводить вычисления в расчетной области, соответствующей реальной геометрии дороги. Представлены тестовые расчеты движения по дороге с локальным расширением и по дороге с системой светофоров с различными светофорными режимами. Расчеты позволили в первом случае сделать интересные выводы о влиянии расширения на пропускную способность дороги в целом, а во втором случае — выбрать оптимальный режим для получения эффекта «зеленой волны». Микроскопическая модель основана на теории клеточных автоматов и однополосной модели Нагеля–Шрекенберга и обобщена авторами на случай многополосного движения. В модели реализованы различные поведенческие стратегии водителей. В качестве теста моделируется движение на реальном участке транспортной сети в центре г. Москвы. Причем для грамотного прохождения транспортных узлов сети в соответствии с правилами движения реализованы специальные алгоритмы, адаптированные для параллельных вычислений. Тестовые расчеты выполнены на суперкомпьютере К-100 ЦКП ИПМ им. М. В. Келдыша РАН.

Ключевые слова: интеллектуальные транспортные системы, теория транспортных потоков, макроскопические и микроскопические модели, квазигазодинамическая система уравнений, клеточные автоматы, многополосное движение, параллельные вычисления

© 2024 Владимир Федорович Тишкин, Марина Александровна Трапезникова, Антонина Александровна Чечина, Наталья Геннадьевна Чурбанова

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 519.872.6

Simulation of traffic flows based on the quasi-gasdynamic approach and the cellular automata theory using supercomputers

V. F. Tishkin, M. A. Trapeznikova^a, A. A. Chechina, N. G. Churbanova

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS,
4 Miusskaya square, Moscow, 125047, Russia

E-mail: ^a mtrapez@yandex.ru

Received 07.11.2023, after completion — 22.12.2023.

Accepted for publication 22.12.2023.

The purpose of the study is to simulate the dynamics of traffic flows on city road networks as well as to systematize the current state of affairs in this area. The introduction states that the development of intelligent transportation systems as an integral part of modern transportation technologies is coming to the fore. The core of these systems contain adequate mathematical models that allow to simulate traffic as close to reality as possible. The necessity of using supercomputers due to the large amount of calculations is also noted, therefore, the creation of special parallel algorithms is needed. The beginning of the article is devoted to the up-to-date classification of traffic flow models and characterization of each class, including their distinctive features and relevant examples with links. Further, the main focus of the article is shifted towards the development of macroscopic and microscopic models, created by the authors, and determination of the place of these models in the aforementioned classification. The macroscopic model is based on the continuum approach and uses the ideology of quasi-gasdynamic systems of equations. Its advantages are indicated in comparison with existing models of this class. The model is presented both in one-dimensional and two-dimensional versions. The both versions feature the ability to study multi-lane traffic. In the two-dimensional version it is made possible by introduction of the concept of “lateral” velocity, i. e., the speed of changing lanes. The latter version allows for carrying out calculations in the computational domain which corresponds to the actual geometry of the road. The section also presents the test results of modeling vehicle dynamics on a road fragment with the local widening and on a road fragment with traffic lights, including several variants of traffic light regimes. In the first case, the calculations allow to draw interesting conclusions about the impact of a road widening on a road capacity as a whole, and in the second case — to select the optimal regime configuration to obtain the “green wave” effect. The microscopic model is based on the cellular automata theory and the single-lane Nagel – Schreckenberg model and is generalized for the multi-lane case by the authors of the article. The model implements various behavioral strategies of drivers. Test computations for the real transport network section in Moscow city center are presented. To achieve an adequate representation of vehicles moving through the network according to road traffic regulations the authors implemented special algorithms adapted for parallel computing. Test calculations were performed on the K-100 supercomputer installed in the Centre of Collective Usage of KIAM RAS.

Keywords: intelligent transportation systems, traffic flow theory, macroscopic and microscopic models, quasi-gasdynamic system of equations, cellular automata, multi-lane traffic, parallel computing

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 175–194 (Russian).

1. Введение

В наши дни, когда цифровая трансформация затронула практически все сферы человеческой деятельности, неотъемлемой частью транспортной сферы стали интеллектуальные транспортные системы (ИТС), которые фактически представляют собой комплекс систем на основе информационных, телекоммуникационных и управленческих технологий, встроенных в транспортные средства и дорожную инфраструктуру. Безусловным лидером по развитию ИТС в России является Москва, однако за прошедшее десятилетие ИТС созданы в таких крупнейших городах, как Санкт-Петербург, Екатеринбург, Казань, на скоростных автомобильных дорогах. В регионах активно реализуется программа по созданию ИТС в городских агломерациях с населением свыше 300 тысяч человек. Представленные на портале «Интеллектуальные транспортные системы России» [Интеллектуальные транспортные системы. . .] интервью с руководителями отрасли, экспертами, учеными и разработчиками программных продуктов иллюстрируют как достижения, так и проблемы, возникающие на пути цифровизации. Особо отмечаются успехи в обеспечении безопасности: по статистике, за прошедшие 15 лет уровень смертности от ДТП в нашей стране сократился в два раза, чему способствовало функционирование автоматических комплексов фотовидеофиксации для предупреждения правонарушений на дорогах [Из чего складывается пазл. . .]. Однако на стадии обработки собираемых данных начинаются проблемы, которые, как следствие, продолжают при прогнозировании эффекта от управленческих воздействий на транспортную систему.

В последнее время резко возрос интерес к различным аспектам интеллектуального управления, в частности пониманию моделирования как основы управления. В литературе можно встретить мнение, что значимость моделирования существенно выше, чем значимость собственно управления, поскольку область применения моделирования как общего средства для решения проблем практически во всех областях несравненно шире [Пегат, 2013]. Все больше внимания уделяется гибридным методам моделирования, объединяющим традиционные математические модели, имитационное моделирование, нечеткие регуляторы, искусственные нейронные сети, генетические алгоритмы. Системы управления как системы с отрицательной обратной связью [Wiener, 2019] в качестве ядра имеют ту или иную модель, и системы управления на транспорте не являются исключением. Результаты моделирования на основе имеющихся данных сравниваются со значениями целевых показателей и, в случае необходимости, производится соответствующая коррекция различных элементов системы. Таким образом, актуальность моделирования процессов в транспортных системах очевидна.

В документах стратегического планирования Российской Федерации [Транспортная стратегия, 2021; Государственная программа, 2017; Ведомственная целевая программа, 2020] сформулированы ключевые инфраструктурные вызовы транспортного комплекса. Отмечается, что недостаточный уровень цифровизации и внедрения новых технологий на транспорте ограничивает долгосрочное инновационное развитие транспортного комплекса. Поэтому исследования, способствующие развитию математического аппарата ИТС, представляют не только теоретическую, но и практическую ценность.

В тех же документах зафиксировано, что основная загрузка дорог образуется вблизи крупных городов и на дорогах, связывающих между собой основные социально-экономические центры, в крупных городских агломерациях сохраняются проблемы перегруженности улично-дорожной сети (УДС) и подходов к городам, комплексное развитие городского и пригородного транспорта находится на начальной стадии. Для решения этих проблем можно предложить разработку разномасштабных моделей трафика и проведение сопряженных расчетов на основе математических моделей макроскопического типа на протяженных магистралях и микроскопических моделей на УДС внутри агломераций при необходимости детального описания транспортных потоков.

Среди крупномасштабных задач можно выделить проблемы транспортного планирования, необходимость проведения краткосрочных и долгосрочных прогнозов использования инфраструктуры. Как уже отмечалось, существует необходимость обрабатывать большие объемы данных с камер видеонаблюдения, также существует необходимость оперативной оценки состояния транспортной системы и оперативного реагирования на дорожную обстановку в ситуационных центрах. Современные вычислительные мощности дают новые возможности для решения всех перечисленных проблем. Поэтому важно, чтобы заложенные в ИТС модели трафика допускали эффективную реализацию на многопроцессорных архитектурах суперкомпьютеров и позволяли проводить расчеты на УДС больших городов в режиме реального времени.

Настоящая статья посвящена развитию и верификации различных моделей для описания динамики автотранспортных потоков на УДС городов и магистралях, а также разработке методов реализации моделей на вычислительных системах сверхвысокой производительности. Авторами предложены оригинальные квазигазодинамическая модель трафика, основанная на приближении сплошной среды, и микроскопическая модель на основе теории клеточных автоматов, обладающие внутренним параллелизмом и адекватно описывающие многополосное движение.

Статья написана по материалам доклада на конференции «Транспортные потоки на сетях», проходившей 24–28 апреля 2023 г. в Научно-технологическом университете «Сириус», федеральная территория «Сириус», Краснодарский край.

2. Классификация моделей транспортных потоков

Моделирование потоков автомобильного транспорта имеет почти вековую историю — оно начало развиваться в США с тридцатых годов XX столетия, и постепенно сложилось самостоятельное научное направление — теория транспортных потоков. Модели транспортных потоков чрезвычайно разнообразны, и их классификацию можно проводить по разным признакам. Наиболее популярной является классификация по уровню детализации транспортного потока, которая традиционно делит математические модели трафика на два основных класса: макроскопические модели и микроскопические модели. Первые основаны на приближении сплошной среды, в них потоки автомобилей уподобляются потокам слабосжимаемой жидкости, отдельные автомобили не рассматриваются. Вторые же, напротив, рассматривают отдельные транспортные единицы «автомобиль – водитель» и их взаимодействие с окружающей обстановкой, в том числе с другими участниками движения.

Макроскопические модели описывают достаточно плотный поток автотранспорта — так называемое синхронизированное движение, когда все водители вынуждены придерживаться одинаковых стратегий и ехать приблизительно с одной скоростью. Движение рассматривается на больших расстояниях. Исследуются осредненные величины: поля плотности потока $\rho(x, t)$ (количество автомобилей на единицу длины дороги и на дорожную полосу) и средней скорости $V(x, t)$. Модели представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно этих величин. В зависимости от количества динамических уравнений в системе различают макроскопические модели первого и второго порядка.

Микроскопические модели позволяют исследовать поток любой плотности. Транспортные единицы «автомобиль – водитель» рассматриваются в совокупности их свойств, как технических характеристик автомобиля, так и стиля управления водителем, учитываются различные стратегии водителей. Такие модели представлены, как правило, обыкновенными дифференциальными уравнениями. Микроскопические модели помогают сделать описание транспортного потока наиболее близким к реальности. Следует отметить, что современные вычислительные системы сверхвысокой производительности предоставляют практически неограниченные возможности в этом направлении.

Одной из первых моделей макроскопического типа является широко известная модель первого порядка Лайтхилла–Уизема–Ричардса (Lighthill–Whitham–Richards, LWR) [Lighthill, Whitham, 1955], которая характеризуется единственным динамическим уравнением относительно плотности потока, отражающим закон сохранения числа автомобилей. В этой модели предполагается, что скорость и поток меняются мгновенно с изменением плотности. Соответствующая мгновенная адаптация скорости реализует неограниченные ускорения, что нереалистично.

Позже появились модели, включающие в себя, помимо уравнения неразрывности, второе динамическое уравнение — уравнение ускорения, которое описывает локальное ускорение как функцию от плотности, скорости, их градиентов и возможных других внешних факторов. Модели второго порядка различаются по их функциям ускорения. Для большей реалистичности в модели вводят пространственное упреждение [Treiber, Kesting, 2013], что позволяет корректировать ситуацию в связи с предполагаемыми будущими изменениями окружающей обстановки. Для реализации упреждения в уравнения вводят пространственные производные различного порядка от плотности и скорости, а также нелокальности, то есть учитывают поля плотности и скорости в точке x_a впереди текущей позиции x :

$$\rho_a(x, t) = \rho(x_a, t), \quad V_a(x, t) = V(x_a, t), \quad x_a > x.$$

В теории транспортных потоков вводится аналог давления как реакция водителя на ситуацию впереди автомобиля. Производные плотности и скорости при реализации упреждения могут быть выражены в терминах градиента давления трафика P , а нелокальности — в терминах обобщенной целевой скорости $V_e^*(\rho, V, \rho_a, V_a)$, которая может трактоваться как обобщение равновесной скорости $V_e(\rho)$. Аналогично модели LWR с диффузией уравнения могут содержать диффузионные члены — пространственные производные второго порядка, которые вводятся для того, чтобы смягчить острые переходы и ударные фронты.

В итоге большинство локальных и нелокальных моделей второго порядка (без учета боковых въездов/съездов и изменения числа полос, описываемых источниковыми членами) могут быть представлены в общем виде следующими уравнениями [Treiber, Kesting, 2013, с. 132]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e^*(\rho, V, \rho_a, V_a) - V}{T} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (2)$$

где T — характерное время адаптации скорости (оно же — время релаксации или время реакции, в простейшем случае постоянное, различается для городских улиц и магистралей), D и η — коэффициенты диффузии, возможно, переменные.

В локальных моделях $V_e^*(\rho, V, \rho_a, V_a) = V_e(\rho)$. К локальным моделям относятся, например, модель Пэйна (Payne), которую также называют моделью Пэйна–Уизема (Payne–Whitham, PW) [Payne, 1971], и модель Кернера–Конхойзера (Kerner–Konhaeuser, KK) [Kerner, Konhaeuser, 1994]. Они отличаются видом функции давления трафика, в обеих моделях время T постоянное, в модели PW — нулевая диффузия. Как и в моделях LWR, различные уравнения для стационарного соотношения «скорость–плотность» $V_e(\rho)$ характеризуют целые классы моделей PW и KK. Модель PW может быть получена из простой микроскопической модели следования за лидером, в то время как модель KK чисто феноменологическая. В научной литературе высказывается мнение, что модель Пэйна является одной из наиболее фундаментальных и значимых моделей транспортных потоков без диффузионного члена. Многие модели, появившиеся вслед за ней, обсуждаются как обобщение модели Пэйна, в частности, путем введения функции времени реакции, зависящей от плотности [Tomoe et al., 2010], или, собственно, за счет введения диффузионных поправок [Гасников и др., 2013, с. 101].

Примером нелокальной модели является газокинетическая модель трафика (Gas-Kinetic based Traffic, GKT) [Treiber, Hennecke, Helbing, 1999]. Она выведена из микроскопической модели с явным учетом неоднородности транспортных единиц «автомобиль – водитель». Микроскопическая модель, лежащая в основе модели GKT, описывает идеализированный одномерный газ, состоящий из твердых частиц, которым предписаны специфические, связанные с трафиком, свойства.

Для численной реализации макроскопических моделей второго порядка в основном применяют явные конечно-разностные схемы. Все макроскопические модели включают уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения числа автомобилей. Кроме того, без ускорения отдельных автомобилей, то есть если автомобили рассматривать как пассивные частицы, общий импульс тоже сохраняется [Treiber, Kesting, 2013]. Поэтому существенно, чтобы при переходе к разностным схемам эти условия сохранения удовлетворялись в точности. Для этого следует переформулировать уравнения транспортных моделей в терминах законов сохранения и далее использовать консервативные разностные схемы.

Общий вид моделей второго порядка в форме законов сохранения (в консервативной форме, с добавлением диффузии) относительно плотности ρ и потока Q может быть получен из уравнений (1) и (2) путем исключения локальной скорости соотношением $V = \frac{Q}{\rho}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\rho} + P \right) = \frac{\rho V_e^* - Q}{T} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\rho} \right) \right]. \quad (4)$$

Известно, что многим моделям второго порядка присущи некоторые общие недостатки, такие как возникновение при определенных условиях отрицательных скоростей, а также плотностей, превышающих максимально допустимые. Также в рамках данных моделей наблюдаются явления, которые можно расценивать как влияние автомобилей, находящихся сзади. Для преодоления этого недостатка были предприняты попытки сделать макромодели анизотропными, т. е. согласно этим моделям автомобили должны реагировать только на ситуацию перед ними. Перечисленные проблемы решены в моделях Эу – Раскла [Aw, Rascle, 2000] и Занга [Zhang, 2002], а также в их последующих обобщениях.

Заметим, что существуют также макроскопические модели третьего порядка: в работе [Phillips, 1979] предложена модель, которая включает законы сохранения массы, импульса и энергии, в ней введено понятие равновесного давления трафика. В работах [Helbing, 1995; Helbing, 2001] к системе уравнений второго порядка добавлено третье уравнение относительно вариации скорости, при этом второе уравнение модифицировано с учетом вариации.

В рамках микроскопического подхода отдельным самостоятельным направлением исследований является моделирование на основе теории клеточных автоматов (Cellular Automata, CA). Эта теория впервые появилась и была разработана для использования в различных областях науки в 40-е годы прошлого столетия, а в 90-е годы была применена и для моделирования динамики транспортных потоков. Пионерами в этой области считаются немецкие ученые К. Нагель и М. Шреккенберг [Nagel, Schreckenberg, 1992]. Суть модели состоит в том, что все величины (время, пространство, ускорение) в ней дискретны. Дорога представлена в виде одномерной решетки, ячейки в которой могут принимать значение 0 или 1, что можно интерпретировать как присутствие или отсутствие в этой ячейке автомобиля в данный дискретный момент времени. Соответственно, ячейка имеет длину, равную длине автомобиля плюс некоторый зазор между автомобилями, что соответствует величине $\frac{1}{\rho_{\max}}$ в макроскопических моделях. В каждый последующий момент времени состояние ячеек обновляется по определенным правилам — автомобили могут передвигаться вправо в соответствии со своей скоростью, выбранной по этим правилам,

которая может быть нулевой или соответствовать некоторому разумному с точки зрения автомобильного движения количеству ячеек. Правила Нагеля – Шрекенберга по выбору скорости автомобиля просты и состоят из четырех шагов. Это ускорение, если нужно и возможно, замедление, если есть опасность столкновения с впереди идущим автомобилем, рандомизация (введение вероятности отмены выбранного решения) и, наконец, продвижение вперед в соответствии с выбранной скоростью. В последние годы это направление исследований быстро развивается и в сторону описания многополосных магистралей с различными развязками, и в сторону описания того, что называется «человеческий фактор», в этой связи можно отметить, например, работы [Qi, Zheng, Gang, 2017; Chen, Jiang, Lin, 2017; Guzman et al., 2018].

Близким к клеточным автоматам подходом является описание транспортных потоков с помощью контурных сетей А. Буслаева [Бугаев и др., 2015]: рассматривается система контуров, образующих сетевую структуру, на контурах по заданному правилу движутся частицы, на систему накладываются некоторые ограничения.

В связи с клеточными автоматами также следует отметить модели [Kerner, Klenov, Wolf, 2002], удовлетворяющие трехфазной теории Б. Кернера [Kerner, 2004; Kerner, 2009]. В отличие от прежних теорий, где рассматривались две фазы транспортных потоков — свободное движение и плотный поток, Кернер признает существование трех фаз: свободный поток, синхронизированное движение и широкий движущийся кластер. Трехфазная теория объясняет эмпирические свойства перехода от свободного к плотному потоку, а также особенности образующихся пространственно-временных структур трафика.

Промежуточное положение между макроскопическими и микроскопическими моделями занимают мезоскопические модели, которые комбинируют свойства тех и других. К этому классу в литературе относят принципиально разные модели, вплоть до моделей расчета матриц межрайонных корреспонденций, которые отражают взаимодействие пары районов, порождающих транспортные потоки [Недяк, Рудзейт, Зайнетдинов, 2019]. Если рассматривать мезоскопические модели как модели, в которых движение и взаимодействие единичных транспортных средств описываются на основании статистических зависимостей, то к этому классу следует отнести кинетические модели. Это направление было заложено в работах И. Пригожина [Prigogine, Andrews, 1960; Prigogine, Herman, 1971], предложившего использовать для описания транспортных потоков кинетическое уравнение типа уравнения Больцмана относительно фазовой плотности потока, т. е. функции распределения автомобилей как по координате, так и по индивидуальной скорости. Макроскопические характеристики потока (плотность, средняя скорость, вариация скоростей) определяются моментами различного порядка фазовой плотности по скоростям. Дальнейшее развитие кинетический подход получил в работах С. Павери-Фонтана, Д. Хельбинга и др. [Paveri-Fontana, 1975; Helbing, Treiber, 1998].

В отечественной и зарубежной литературе широко представлены обзоры моделей и методов описания динамики транспортных потоков, а также соответствующего свободного и коммерческого программного обеспечения, в частности, обстоятельный обзор современного состояния данной области исследований представлен в работе [Trapeznikova, Chechina, Churbanova, 2023].

3. Квазигазодинамическая модель транспортных потоков

В ИПМ им. М. В. Келдыша РАН разработана макроскопическая модель транспортных потоков [Карамзин и др., 2006; Сухинова и др., 2009; Churbanova et al., 2019; Chetverushkin et al., 2022], построенная по аналогии с квазигазодинамической (КГД) системой уравнений [Четверушкин, 2004]. КГД-система была создана для описания газодинамических течений в широком диапазоне чисел Маха, в том числе хорошо зарекомендовала себя при моделировании существенно дозвуковых течений, поэтому естественно было использовать ее при построении модели транспортных потоков в приближении сплошной среды. Особенность уравнений КГД-системы,

в отличие от традиционных газодинамических уравнений, — присутствие в правой части дополнительных диффузионных членов, обеспечивающих сглаживание решений на характерных масштабах среды.

КГД-модель трафика изначально разрабатывалась как двумерная, с целью использовать в качестве расчетных областей участки дорог в их реальной геометрии — с явным учетом числа полос, расширений/сужений, карманов и т. п. Поэтому, помимо скорости движения вдоль дороги (продольной компоненты скорости), в модели введено понятие боковой скорости (поперечной компоненты скорости), которая имеет смысл скорости перестроения автомобилей из полосы в полосу. Соответственно, помимо уравнения неразрывности и уравнения для определения продольной компоненты скорости, модель включает уравнение для поперечной компоненты. Предложено несколько вариантов модели: с уравнением в частных производных и с алгебраическим уравнением для поперечной скорости. Подробное описание, верификацию, а также параллельные алгоритмы реализации КГД-модели транспортных потоков можно найти в работах [Карамзин и др., 2006; Сухинова и др., 2009; Chetverushkin et al., 2022]. Ниже приведен один из вариантов этой двумерной модели:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\tau_x}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 + P_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho UV) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\tau_y}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y}(\rho V^2 + P_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho UV) \right) \right], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 + P_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho UV) = f + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\tau_x}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho U^3 + 3P_x U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho U^2 V) \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\tau_y}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y}(\rho UV^2 + P_y U) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 V) \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$V = k_u \rho \frac{\partial U}{\partial y} - k_\rho U \frac{\partial \rho}{\partial y} + k_{des} \frac{U^2}{(x_{des} - x)^2} (y_{des} - y). \quad (7)$$

Здесь ρ — плотность транспортного потока, U — продольная компонента скорости, V — поперечная компонента скорости, P_x и P_y — транспортное давление, вообще говоря, различное вдоль и поперек дороги, f — ускоряющая/замедляющая сила.

Уравнение (7) выражает желание водителя перестроиться в полосу с большей скоростью (первое слагаемое), ехать по полосе с меньшей плотностью (второе слагаемое) и достичь определенной цели (третье слагаемое). Здесь k_u , k_ρ и k_{des} — феноменологические константы, (x_{des}, y_{des}) — координаты цели.

По аналогии с КГД-системой, при выводе которой использован принцип минимальных размеров в газовой динамике [Четверушкин, 2009] (длина свободного пробега молекулы трактуется как минимальное характерное расстояние, а время между столкновениями молекул — как минимальное характерное время), для транспортных потоков также вводятся характерные минимальные масштабы. Характерные длины вдоль и поперек дороги не равны друг другу: вдоль дороги — это среднее расстояние $\delta(U)$ между автомобилями, зависящее от скорости U , а поперек дороги — это ширина одной полосы. Также вводится понятие характерного времени как временного интервала, за который некоторую точку дороги пересекут несколько автомобилей. Таким образом определяются малые параметры в диффузионных слагаемых в уравнениях (5), (6):

$$\tau_x \approx \frac{\delta(U)}{U}, \quad \tau_y \approx \frac{1}{V}. \quad (8)$$

При синхронизированном движении их можно считать постоянными.

Транспортное давление в уравнениях (5), (6) имеет вид

$$P_x = \lambda_x \frac{\rho^{\beta_x}}{\beta_x}, \quad P_y = \lambda_y \frac{\rho^{\beta_y}}{\beta_y}. \quad (9)$$

Ускоряющая/замедляющая сила:

$$f = a \cdot \rho, \quad (10)$$

где ускорение равно

$$a = \frac{U_{eq} - U}{T}, \quad (11)$$

равновесная скорость (на основании параболической фундаментальной диаграммы) имеет вид

$$U_{eq} = U_{free} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{jam}} \right), \quad (12)$$

время релаксации (время адаптации скорости) —

$$T = t_0 \left(1 + \frac{r\rho}{\rho_{jam} - r\rho} \right). \quad (13)$$

В уравнения входит ряд констант, в том числе скорость свободного движения U_{free} и плотность пробки ρ_{jam} .

Свойства КГД-модели транспортных потоков, в частности вопросы параболичности и устойчивости малых возмущений для данной системы, были исследованы в работах [Злотник, 2009; Злотник, 2010]. Для первоначального варианта модели [Карамзин и др., 2006] в случае произвольной поперечной скорости V установлены необходимые и достаточные условия неравномерной параболичности [Злотник, 2009]. В представленном варианте модели (5)–(13) в силу того, что поперечная скорость (7) зависит не только от искомых функций ρ и U , но и от их производных, старшие производные по пространству имеют третий, а не второй порядок, и модель уже не является параболической [Злотник, 2010].

В некоторых случаях, когда двумерная детализация транспортного потока не является целью расчетов, можно ограничиться одномерной версией КГД-модели трафика, в которой неоднородность дороги описывается источниковыми членами [Treiber, Kesting, 2013]. Ниже приведена консервативная форма уравнений в терминах «плотность – поток», где поток $Q = \rho U$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\rho} + P \right) \right] + F_\rho, \quad (14)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\rho} + P \right) = \frac{\rho U_{eq} - Q}{T} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^3}{\rho^2} + P \frac{Q}{\rho} \right) \right] + F_U. \quad (15)$$

Давление $P = P_x$ (9), равновесная скорость U_{eq} и время релаксации T определены формулами (12) и (13) соответственно.

Источник в правой части уравнения (14) имеет вид

$$F_\rho(x, t) = -\frac{Q}{I} \frac{dI}{dx} + v_{rmp}(x), \quad (16)$$

где I — функция числа полос магистрали, соответственно, первое слагаемое описывает изменение числа полос, а второе — наличие боковых въездов/съездов,

$$v_{rmp}(x, t) = \begin{cases} \frac{Q_{rmp}(t)}{IL_{rmp}} & \text{внутри зоны въезда/съезда,} \\ 0 & \text{в остальной области.} \end{cases} \quad (17)$$

Источник в правой части уравнения (15) —

$$F_U(x, t) = -\frac{Q^2}{\rho I} \frac{dI}{dx} + Uv_{rmp}(x) + \rho A_{rmp}, \quad (18)$$

— по сравнению с (16) имеет дополнительное слагаемое:

$$A_{rmp} = \frac{(U_{rmp} - U)|Q_{rmp}|}{\rho I L_{rmp}}. \quad (19)$$

Использованы обозначения: Q_{rmp} — поток на въезде/съезде, U_{rmp} — скорость на въезде/съезде, L_{rmp} — длина зоны въезда/съезда.

В соответствии с классификацией моделей транспортных потоков (см. уравнения (3), (4) из § 2 данной статьи) модель (14)–(15) является локальной макроскопической моделью второго порядка с диффузионными слагаемыми специального вида, давлением и временем релаксации, зависящими от плотности. Заметим, что выбор вида функции давления очень важен и влияет на устойчивость методов численной реализации модели.

Достоинством приведенных здесь 2D- и 1D-КГД-моделей трафика является простота численной реализации с помощью явных и полунявных методов, основанных на конечных разностях второго порядка аппроксимации по пространству: аппроксимация конвективных членов с помощью центральных разностей приводит к условно устойчивой схеме. В то время как, например, для гиперболической модели PW и модели КК, имеющей диффузионные добавки, такая схема является абсолютно неустойчивой. Известно, что для реализации модели Пэйна нужны специальные методы [Treiber, Kesting, 2013]. Отметим, что для эффективного распараллеливания предпочтительны логически простые алгоритмы, такие как явные схемы. Параллельные алгоритмы, примеры многопроцессорной реализации КГД-моделей трафика и достигнутые достаточно высокие ускорения обсуждаются в работе [Chetverushkin et al., 2022].

Среди многочисленных тестовых расчетов на основе 2D- и 1D-КГД-моделей трафика наиболее интересным представляется решение задачи о локальном расширении дороги, геометрию расчетной области для которой иллюстрирует рис. 1.

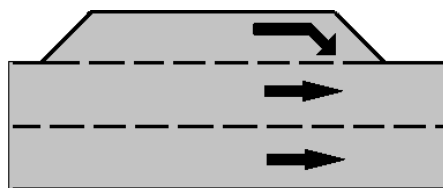


Рис. 1. Расчетная область в задаче о локальном расширении дороги, стрелками указано направление движения транспорта

Численное решение этой задачи на основе 2D-модели подробно описано в [Сушинова и др., 2009]. В зависимости от начальной плотности наблюдается различная динамика транспортного потока. При низкой начальной плотности в зоне расширения дороги происходит разрежение потока, а в зоне перехода от трех полос к двум — небольшое уплотнение, которое распространяется вниз по потоку и постепенно сглаживается, однако плотность после расширения устанавливается выше начальной плотности. При высокой начальной плотности сужение дороги провоцирует образование пробки. Этот случай иллюстрирует рис. 2: уплотнение, возникающее в зоне перехода от трех полос к двум, со временем распространяется вверх по потоку, охватывает все локальное расширение и выходит за его пределы. Можно видеть, что передний фронт пробки зафиксирован возле узкого места, а задний фронт движется вверх по потоку.

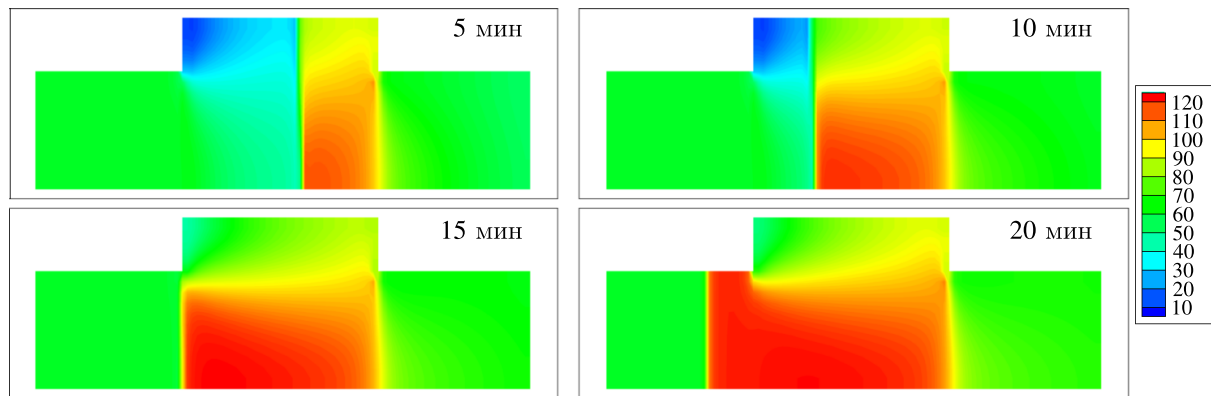


Рис. 2. Поля плотности на несколько моментов времени, полученные в результате расчета задачи о локальном расширении дороги на основе 2D-КГД-модели трафика. Цветовая шкала отображает значения плотности потока автотранспорта, измеряемой в авто/км/полоса

Эта же задача была решена на основе одномерного варианта КГД-модели (14)–(15) с источниками в правой части, описывающими изменение числа полос — первые слагаемые в (16) и (18). В расчетах использовались следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} \lambda_x &= 60 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2}, \quad \beta_x = 2, \quad \tau = 5 \cdot 10^{-4} \text{ ч}, \quad t_0 = 50 \text{ с}, \\ r &= 0,95, \quad \rho_{jam} = 120 \frac{\text{авто}}{\text{км} \cdot \text{полоса}}, \quad U_{free} = 120 \frac{\text{км}}{\text{ч}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Профили эффективной (осредненной по полосам) плотности, полученные при различной начальной плотности, представлены на рис. 3–5. На качественном уровне воспроизводится та же динамика, что и в расчетах по двумерной модели. Заметим, что при некоторых средних значениях начальной плотности (см. рис. 4, $\rho(x, 0) = 50$ авто/км/полоса) уплотнение, движущееся вверх по потоку, не выходит за пределы расширения. Стационарное распределение плотности соответствует графику в момент времени 120 мин. Проведенные расчеты позволяют сделать вывод о негативном влиянии расширения на пропускную способность дороги в целом.

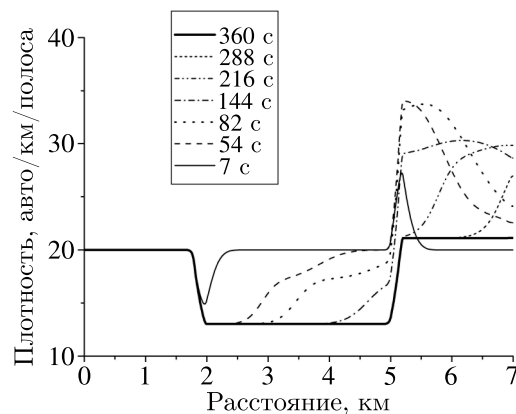


Рис. 3. Профили эффективной плотности на разные моменты времени в результате расчета задачи о локальном расширении дороги на основе 1D-КГД-модели при начальной плотности 20 авто/км/полоса

Другая задача, имеющая практическое значение, — задача о светофорном регулировании, позволяющая исследовать влияние режимов светофоров на плотность потока. На рис. 6 показана

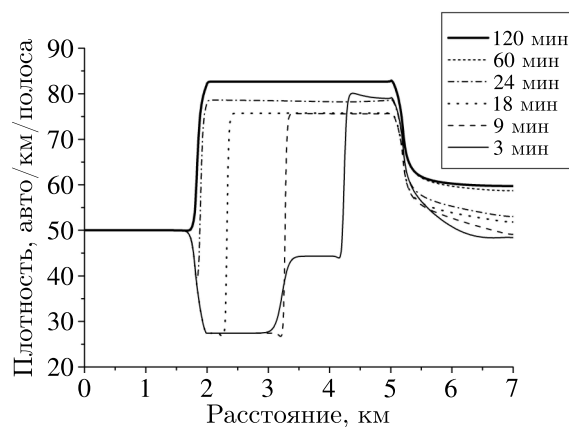


Рис. 4. Профили эффективной плотности на разные моменты времени в результате расчета задачи о локальном расширении дороги на основе 1D-КГД-модели при начальной плотности 50 авто/км/полоса

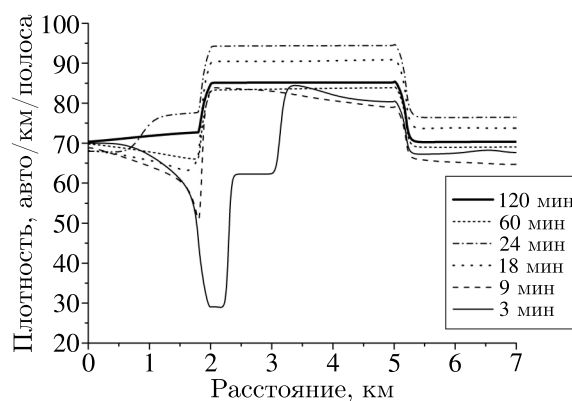


Рис. 5. Профили эффективной плотности на разные моменты времени в результате расчета задачи о локальном расширении дороги на основе 1D-КГД-модели при начальной плотности 70 авто/км/полоса



Рис. 6. Расчетная область в задаче о светофорном регулировании, стрелкой указано направление движения транспорта

расчетная область, которая представляет собой дорогу с двумя светофорами, расположенными на некотором расстоянии друг от друга. Движение происходит слева направо. Светофоры двухфазные (красный и зеленый свет), могут переключаться одновременно или со сдвигом по времени, длительности красного и зеленого сигналов могут отличаться.

Заметим, что в простейшем случае — на основе модели LWR — задачи о светофорах могут быть решены аналитически [Treiber, Kesting, 2013; Гасников и др., 2013]. Здесь приведем результаты численного решения на основе 1D-КГД-модели трафика. В расчетах использовались значения параметров (20), начальная плотность составляла $\rho(x, 0) = 30$ авто/км/полоса, светофоры установлены на расстоянии 1,7 км и 2,5 км от начала расчетной области. Осуществлялся сквозной счет по всей области. Красный сигнал светофора задавался значением пото-

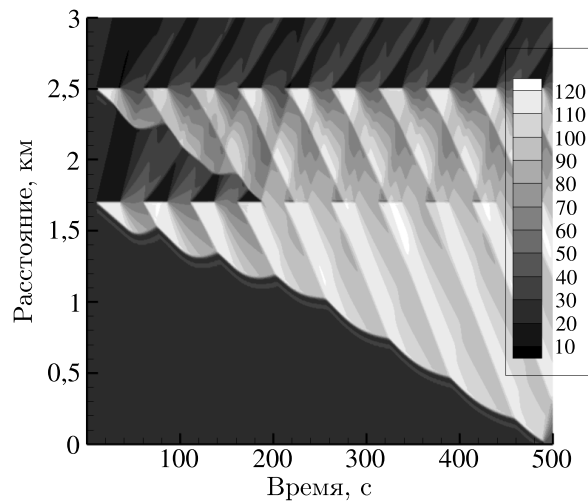


Рис. 7. Пространственно-временная диаграмма плотности: светофоры включаются одновременно, длительности красной и зеленой фаз одинаковые — по 25 с. Шкала отображает значения плотности потока, измеряемой в авто/км/полоса

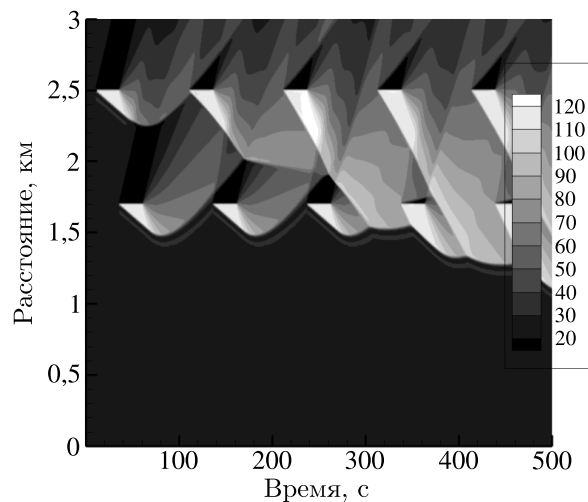


Рис. 8. Пространственно-временная диаграмма плотности: светофоры включаются со сдвигом по времени, равным длительности красной фазы — 25 с, длительность зеленой фазы — 75 с. Шкала отображает значения плотности потока, измеряемой в авто/км/полоса

ка $Q(x_{traffic_light}, t_{red}) = 0$ авто/полоса/ч в расчетной точке, соответствующей расположению светофора, в течение промежутков времени, соответствующих красному свету.

На рис. 7–9 представлены полученные пространственно-временные диаграммы плотности при различных режимах светофоров, в шкалах указаны значения плотности, измеряемой в авто/км/полоса. За время красного света перед светофорами образуются очереди автомобилей — области максимальной плотности, которые распространяются вверх по потоку (ударная волна), а вниз по потоку образуются области минимальной плотности. При включении зеленого света автомобили начинают разъезжаться — от светофоров вниз идет выходной поток.

В зависимости от режима наблюдается влияние светофоров друг на друга: выходной поток от одного светофора догоняет очередь от другого светофора (рис. 7 и 8). При короткой зеленой фазе очередь не успевает разъезжаться, и в следующем цикле длина очереди увеличивается (рис. 7).

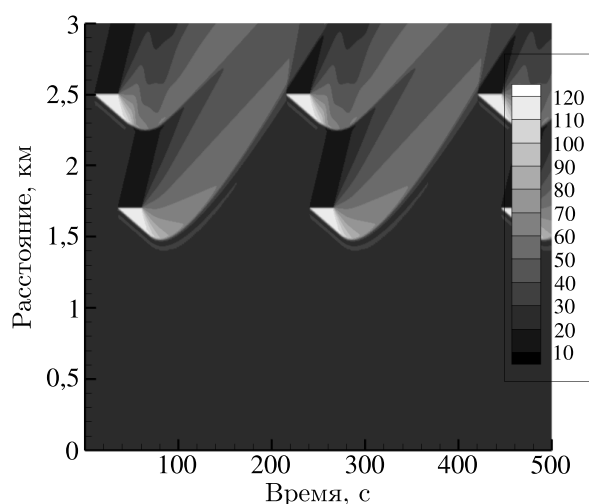


Рис. 9. Пространственно-временная диаграмма плотности: светофоры включаются со сдвигом по времени, равным длительности красной фазы — 25 с, длительность зеленой фазы — 175 с. Шкала отображает значения плотности потока, измеряемой в авто/км/полоса

Рисунок 7 иллюстрирует самый неблагоприятный случай, когда светофоры включаются одновременно, красная и зеленая фазы одинаковые и достаточно короткие — по 25 с. Такой режим даже при низкой начальной плотности провоцирует заторы.

Рисунок 8 представляет более реалистичную ситуацию: красные сигналы светофоров включаются со сдвигом по времени, равным длительности красной фазы (25 с), зеленые сигналы по длительности в 3 раза дольше, чем красные (75 с).

Наиболее благоприятная ситуация продемонстрирована на рис. 9, когда светофоры включаются со сдвигом по времени, равным длительности красного сигнала (25 с), а длительность зеленого сигнала в 7 раз дольше, чем красного (175 с). В этом случае можно проследить так называемую «зеленую волну».

4. Многополосная модель транспортных потоков на основе клеточных автоматов

В ИПМ им. М.В. Келдыша РАН создана оригинальная модель клеточных автоматов, основанная на правилах Нагеля – Шрекенберга для однополосной магистрали и обобщенная на многополосный случай [Трапезникова, Чечина, Чурбанова, 2017; Churbanova et al., 2019; Chetverushkin et al., 2022]. В модель включены различные возможные стратегии водителей, такие, например, как «осторожный», «агрессивный» и «вежливый» стили вождения [Чечина, 2021]. Модель была реализована в виде программного комплекса CAM-2D (Cellular Automata Model – 2 Dimensional), который получил государственную регистрацию [Свидетельство о регистрации. . .].

Для удобства использования программного комплекса, помимо вычислительных модулей, был разработан модуль пользовательского интерфейса и визуализации данных. Веб-интерфейс позволяет задавать дорожную сеть, вводить начальные данные и параметры моделирования, а также получать результаты расчета, как в виде численных характеристик, так и в виде визуализации в динамике дорог со светофорами и с движущимися по ним автомобилями [Trapeznikova et al., 2022].

Для расчетов на дорожных сетях создана параллельная версия программы [Chetverushkin et al., 2022]. Разработан ряд программных модулей, реализующих расчеты на различных элементах УДС, таких как прямолинейный однородный участок и участки с въездом/съездом, с раз-

воротом, с пешеходным светофором, перекрестки разных типов и т. п. УДС, как из кирпичиков, собирается из этих элементов. Параллельный алгоритм ориентирован на многопроцессорные системы с распределенной памятью, поэтому основан на принципе геометрического параллелизма и модели передачи сообщений: УДС — это вся расчетная область, а отдельные элементы УДС — ее подобласти, расчет в подобластях производится одновременно на отдельных процессорах с помощью соответствующих модулей, на границах подобластей реализуются специальные граничные условия, регулирующие обмен данными между процессорами.

В качестве примера, демонстрирующего возможности программного комплекса SAM-2D, приведем расчет на реальном участке УДС, находящемся около ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (рис. 10). Участок состоит из четырех элементов: двух нерегулируемых Т-образных перекрестков (№ 1 и № 4 на рис. 10), одного четырехстороннего перекрестка со светофором (№ 2 на рис. 10) и одного нерегулируемого четырехстороннего перекрестка (№ 3 на рис. 10). Нерегулируемые перекрестки имеют знаки приоритета проезда, главные дороги отмечены на схеме ромбами (знак «главная дорога»), второстепенные — треугольниками (знак «уступи дорогу»).

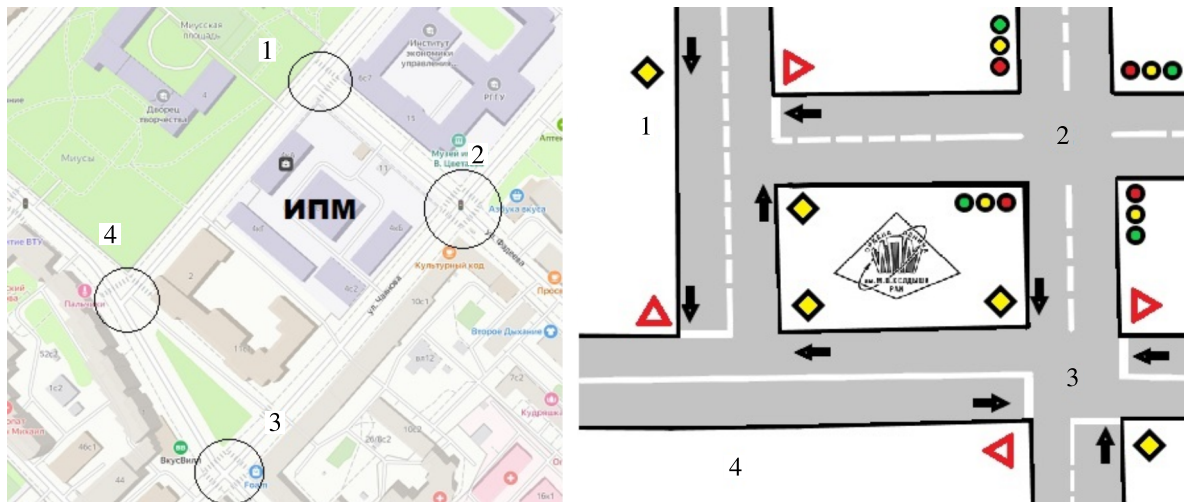


Рис. 10. Участок УДС в районе Миусской площади, г. Москва: слева — карта, справа — схема движения. Цифрами обозначены номера перекрестков для определения соответствия между картой и схемой

На нерегулируемых перекрестках с целью обеспечения безопасности требуется соблюдение водителями приоритета проезда. Для этого реализованы специальные алгоритмы движения: автомобилю, подъезжающему к перекрестку по второстепенной дороге, требуется остановиться у стоп-линии и проверить наличие автомобилей на главной дороге и расстояние до них (одно направление при повороте направо, два направления при повороте налево). Перед перекрестком автомобиль замедляется и затем останавливается. Определяются скорость и расстояние до ближайшего автомобиля, принимается решение о выезде на перекресток. В зависимости от стиля вождения водители могут определять безопасные параметры въезда по-разному, при условии, что выполняется минимальное требование безопасности — проезд перекрестка без столкновений.

Описание алгоритма проезда регулируемых перекрестков содержится, например, в статье [Трапезникова, Чечина, Чурбанова, 2017].

Визуализация результатов расчета представлена на рис. 11. Автомобили представлены в виде кружков, их оттенок определяется текущей целью автомобиля, а именно — по какой дороге он выедет с элемента УДС, по которому сейчас движется. При въезде на следующий элемент УДС цель переопределяется с учетом выбранного пути проезда сети и конечной цели при выезде из расчетной области.

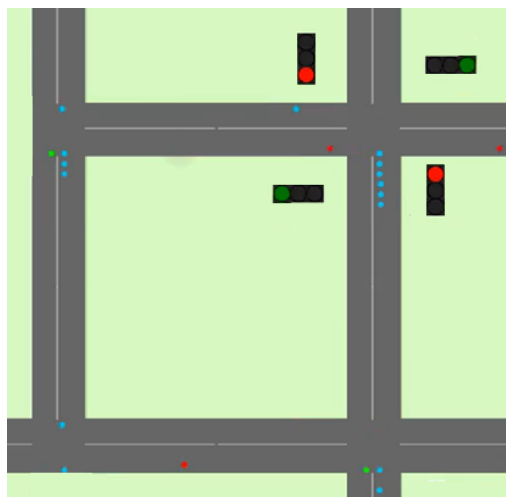


Рис. 11. Участок УДС в районе Миусской площади, г. Москва. Визуализация результатов расчета

Визуализация наглядно демонстрирует перемещение автомобилей по сети на каждом шаге по времени, может происходить одновременно со счетом.

Каждый элемент УДС рассчитывается при помощи соответствующего модуля, модули запускаются на отдельных процессорах. Организован межпроцессорный обмен данными на внутренних границах соседних подобластей, соответствующих различным элементам УДС. Обмен происходит в два этапа: предварительно проверяется возможность въезда автомобиля на соседний элемент, а затем — передача данных по этому автомобилю процессору, на котором происходит расчет соседнего элемента. В данной конфигурации сети каждый процессор обменивается данными с двумя соседними.

Тестовые расчеты выполнены на суперкомпьютере К-100 ЦКП ИПМ им. М. В. Келдыша РАН.

5. Заключение

В работе рассмотрены созданные ранее авторами статьи макроскопическая квазигазодинамическая (КГД) модель транспортных потоков в одномерном и двумерном вариантах, а также модель клеточных автоматов (СА), предназначенные для описания многополосного движения автомобилей. С целью определения места разработанных моделей среди многообразия существующих подходов к транспортному моделированию приведена современная классификация математических моделей трафика, указаны достоинства оригинальных разработок авторов статьи по сравнению с другими моделями соответствующих классов, в частности простота численной реализации и внутренний параллелизм, обеспечивающий высокую эффективность при многопроцессорных вычислениях.

В статье представлены тестовые расчеты движения по дороге с локальным расширением и по дороге с системой светофоров с различными светофорными режимами. Расчеты позволили в первом случае сделать интересные выводы о влиянии расширения на пропускную способность дороги в целом, а во втором случае — выбрать оптимальный режим для получения эффекта «зеленой волны». Также представлены результаты моделирования движения на реальном участке УДС г. Москвы.

В настоящее время продолжается развитие оригинальных КГД- и СА-моделей для описания неоднородных транспортных потоков, в том числе с учетом беспилотных транспортных средств. Также предусмотрено приведение КГД- и СА-моделей в соответствие с теорией трех

фаз Кернера. В перспективе — разработка разномасштабных моделей трафика и проведение сопряженных расчетов на основе КГД-моделей на протяженных магистралях и моделей клеточных автоматов на УДС внутри городских агломераций при необходимости комплексного описания транспортных потоков на подходах к городам.

Кроме того, разрабатывается интерактивное веб-приложение, которое объединяет как классические модели, так и новые подходы к транспортному моделированию, предложенные в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН и в МАДИ. Приложение обобщает опыт преподавания теории транспортных потоков на базовой кафедре «Математическое моделирование сложных социально-технических систем» МАДИ в ИПМ и может быть использовано в качестве виртуальной лаборатории в образовательном процессе.

Список литературы (References)

- Бугаев А. С., Буслаев А. П., Козлов В. В., Таташев А. Г., Яшина М. В. Обобщенная транспортно-логистическая модель как класс динамических систем // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 12. — С. 65–87.
- Bugaev A. S., Buslaev A. P., Kozlov V. V., Tatashev A. G., Yashina M. V. Obobshchennaya transportno-logisticheskaya model' kak klass dinamicheskikh sistem [Generalized transport-logistic problem as class of dynamical systems] // Matematicheskoe modelirovanie. — 2015. — Vol. 27, No. 12. — P. 65–87 (in Russian).
- Ведомственная целевая программа Министерства транспорта Российской Федерации «Цифровая платформа транспортного комплекса Российской Федерации», утверждена Минтрансом России 28 декабря 2020 года.
- Vedomstvennaya tcelevaya programma Ministerstva transporta Rossijskoj Federacii “Cifrovaya platforma transportnogo kompleksa Rossijskoj Federacii”, utverzhdena Mintransom Rossii 28 dekabrya 2020 goda [The departmental target program of the Ministry of Transport of the Russian Federation “Digital platform of the transport complex of the Russian Federation” was approved by the Ministry of Transport of Russia on December 28, 2020] (in Russian).
- Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. А. В. Гасникова. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2013. — 427 с.
- Gasnikov A. V., Klenov S. L., Nurminskij E. A., Holodov Ya. A., Shamraj N. B. Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnyh potokov [Introduction to mathematical modeling of traffic flows] / pod red. A. V. Gasnikova. — 2-e izd. — Moscow: MCNMO, 2013. — 427 p. (in Russian).
- Государственная программа «Развитие транспортной системы», утвержденная постановлением Правительства РФ от 20 декабря 2017 года № 1596.
- Gosudarstvennaya programma “Razvitie transportnoj sistemy”, utverzhdannaya postanovleniem Pravitel'stva RF ot 20 dekabrya 2017 goda No. 1596 [State program “Development of the transport system”, approved by Decree of the Government of the Russian Federation of December 20, 2017, No. 1596] (in Russian).
- Злотник А. А. О некоторых свойствах уравнений двумерной квазигазодинамической модели транспортных потоков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2009. — Т. 49, № 2. — С. 373–381.
- Zlotnik A. A. O nekotoryh svojstvah uravnenij dvumernoj kvazigazodinamicheskoy modeli transportnyh potokov [On some properties of the equations of a two-dimensional quasi-gasdynamic model of transport flows] // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2009. — Vol. 49, No. 2. — P. 373–381 (in Russian).
- Злотник А. А. Об устойчивости малых возмущений для модифицированной двумерной квазигазодинамической модели транспортных потоков // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 4. — С. 110–117.
- Zlotnik A. A. Ob ustojchivosti malyh vozmushchenij dlya modifitsirovannoj dvumernoj kvazigazodinamicheskoy modeli transportnyh potokov [On the stability of small disturbances for a modified two-dimensional quasi-gasdynamic model of transport flows] // Matematicheskoe modelirovanie. — 2010. — Vol. 22, No. 4. — P. 110–117 (in Russian).
- Из чего складывается пазл безопасности на дорогах // Интеллектуальные транспортные системы России. Информационно-аналитический журнал и портал. — [Электронный ресурс]. — <https://www.itsjournal.ru/articles/technologies/iz-chego-skladyvaetsya-pazl-bezopasnosti-na-dorogakh/> (дата обращения: 05.12.2023).
- Iz chego skladyvaetsya pazl bezopasnosti na dorogah [What makes up the road safety puzzle?] // Intellektual'nye transportnye sistemy Rossii. Informacionno-analiticheskij zhurnal i portal. — [Electronic resource]. — <https://www.itsjournal.ru/articles/technologies/iz-chego-skladyvaetsya-pazl-bezopasnosti-na-dorogakh/> (accessed: 05.12.2023, in Russian).

- Интеллектуальные транспортные системы России. Информационно-аналитический журнал и портал. — [Электронный ресурс]. — <https://www.itsjournal.ru> (дата обращения: 05.12.2023). Intellectual'nye transportnye sistemy Rossii. Informacionno-analiticheskij zhurnal i portal. — [Electronic resource]. — <https://www.itsjournal.ru> (accessed: 05.12.2023, in Russian).
- Карамзин Ю. Н., Трапезникова М. А., Четверушкин Б. Н., Чурбанова Н. Г. Двумерная модель автомобильных потоков // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 18, № 6. — С. 85–95. Karamzin Yu. N., Trapeznikova M. A., Chetverushkin B. N., Churbanova N. G. Dvumernaya model' avtomobil'nyh potokov [Two-dimensional model of vehicular flows] // Matematicheskoe modelirovanie. — 2006. — Vol. 18, No. 6. — P. 85–95 (in Russian).
- Недяк А. В., Рудзейт О. Ю., Зайнетдинов А. Р. Классификация методов моделирования транспортных потоков // Вестник Евразийской науки. — 2019. — Т. 11, № 6. — <https://esj.today/PDF/87SAVN619.pdf> Nedyak A. V., Rudzeyt O. Yu., Zainetdinov A. R. Classification of methods for modeling traffic flows // The Eurasian Scientific Journal. — 2019. — Vol. 11, No. 6. — <https://esj.today/PDF/87SAVN619.pdf> (in Russian).
- Пегат А. Нечеткое моделирование и управление / пер. с англ. — 2-е изд. — М.: Бином, Лаборатория знаний, 2013. — 798 с. Piegat A. Fuzzy modeling and control. — Heidelberg: Physica-Verlag, 2001. (Russ. ed.: Piegat A. Nechetkoe modelirovanie i upravlenie / per. s angl. — 2-e izd. — Moscow: Binom, Laboratoriya znaniy, 2013. — 798 p.)
- Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ «Программа микроскопического моделирования транспортных потоков САМ-2Д». Правообладатель: ФГУ ФИЦ «ИПМ им. М. В. Келдыша РАН». Автор: Чечина А. А. Свидетельство о государственной регистрации № 2016662572 от 15.11.2016. Svidetel'stvo o registracii programmy dlya EVM "Programma mikroskopicheskogo modelirovaniya transportnyh potokov SAM-2D". Pravoobladatel': FGU FIC "IPM im. M. V. Keldysha RAN". Avtor: Chechina A. A. Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii No. 2016662572 ot 15.11.2016 [Certificate of registration of the computer program "Program for microscopic modeling of traffic flows CAM-2D". Copyright holder: Federal State Institution Federal Research Center "KIAM RAS". Author: Chechina A. A. Certificate of state registration No. 2016662572 dated November 15, 2016] (in Russian).
- Сухинова А. Б., Трапезникова М. А., Четверушкин Б. Н., Чурбанова Н. Г. Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков // Математическое моделирование. — 2009. — Т. 21, № 2. — С. 118–126. Sukhinova A. B., Trapeznikova M. A., Chetverushkin B. N., Churbanova N. G. Two-dimensional macroscopic model of traffic flows // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2009. — Vol. 1, No. 6. — P. 669–676. — DOI: 10.1134/S2070048209060027 (Original Russian paper: Sukhinova A. B., Trapeznikova M. A., Chetverushkin B. N., Churbanova N. G. Dvumernaya makroskopicheskaya model' transportnyh potokov // Matematicheskoe modelirovanie. — 2009. — Vol. 21, No. 2. — P. 118–126.)
- Транспортная стратегия Российской Федерации до 2030 года с прогнозом до 2035 года, утверждена распоряжением Правительства РФ от 27 ноября 2021 года № 3 363-р. Transportnaya strategiya Rossijskoj Federacii do 2030 goda s prognozom do 2035 goda, utverzhdena rasporyazheniem Pravitel'stva RF ot 27 noyabrya 2021 goda № 3 363-r [The transport strategy of the Russian Federation until 2030 with a forecast until 2035, approved by Decree of the Government of the Russian Federation dated November 27, 2021, No. 3 363-r] (in Russian).
- Трапезникова М. А., Чечина А. А., Чурбанова Н. Г. Двумерная модель клеточных автоматов для описания динамики транспортных потоков на элементах улично-дорожной сети // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 9. — С. 110–120. Trapeznikova M. A., Chechina A. A., Churbanova N. G. Dvumernaya model' kletochnyh avtomatov dlya opisaniya dinamiki transportnyh potokov na elementah ulichno-dorozhnoj seti [Two-dimensional cellular automata model for describing the dynamics of traffic flows on elements of the road network] // Matematicheskoe modelirovanie. — 2017. — Vol. 29, No. 9. — P. 110–120 (in Russian).
- Четверушкин Б. Н. К вопросу об ограничении снизу на масштабы в механике сплошной среды // Время, хаос, математические проблемы. — Вып. 4. — М.: Изд-во МГУ, 2009. — С. 75–96. Chetverushkin B. N. K voprosu ob ogranichenii snizu na masshtaby v mekhanike sploshnoj sredy [On the question of lower bounds on scales in continuum mechanics] // Vremya, haos, matematicheskie problemy. — Vol. 4. — Moscow: Izd-vo MGU, 2009. — P. 75–96 (in Russian).
- Четверушкин Б. Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2004. — 332 с. Chetverushkin B. N. Kinetic schemes and quasi-gas dynamic system of equations. — CIMNE: Barcelona, 2008. — 298 p. (Original Russian book: Chetverushkin B. N. Kineticheskie skhemy i kvazigazodinamicheskaya sistema uravnenij. — Moscow: MAKS Press, 2004. — 332 p.)

- Чечина А. А.* Алгоритмы поведения водителей на нерегулируемых перекрестках с приоритетом и при объезде препятствий // Математическое моделирование. — 2021. — Т. 33, № 9. — С. 47–59. — <https://doi.org/10.20948/mm-2021-09-04>
- Chechina A. A.* Driver behavioral algorithms at unregulated priority intersections and when bypassing obstacles // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2022. — Vol. 14, No. 2. — P. 297–304. — <https://doi.org/10.1134/S2070048222020053> (Original Russian paper: *Chechina A. A.* Algoritmy povedeniya voditelej na nereguliruemym perekrestkah s prioriteto i pri ob"ezde prepyatstvij // Matematicheskoe modelirovanie. — 2021. — Vol. 33, No. 9. — P. 47–59. — <https://doi.org/10.20948/mm-2021-09-04>)
- Aw A., Rascle M.* Resurrection of “second order models” of traffic flow // SIAM J. Appl. Math. — 2000. — Vol. 60, No. 3. — P. 916–938.
- Chen J., Jiang R., Lin L.* Assigning on ramp flows to maximize capacity of highway with two on-ramps and one off-ramp in between // Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications. — 2017. — Vol. 465. — P. 347–357.
- Chetverushkin B., Chechina A., Churbanova N., Trapeznikova M.* Development of parallel algorithms for intelligent transportation systems // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, No. 4. — P. 643.
- Churbanova N. G., Chechina A. A., Trapeznikova M. A., Sokolov P. A.* Simulation of traffic flows on road segments using cellular automata theory and quasigasdynamic approach // Mathematica Montisnigri. — 2019. — Vol. XLVI. — P. 72–90.
- Guzman H. A., Larraga M. E., Alvarez-Icaza L., Carvajal J.* A cellular automata model for traffic flow based on kinetics theory, vehicles capabilities and driver reactions // Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications. — 2018. — Vol. 491. — P. 528–548.
- Helbing D.* Improved fluid dynamic model for vehicular traffic // Physical Review E. — 1995. — Vol. 51. — P. 3164–3169.
- Helbing D.* Traffic and related self-driven many-particle systems // Reviews of Modern Physics. — 2001. — Vol. 73. — P. 1067–1141.
- Helbing D., Treiber M.* Enskog equations for traffic flow evaluated up to Navier–Stokes order // Granular Matter. — 1998. — Vol. 1. — P. 21–31.
- Kerner B. S.* Introduction to modern traffic flow theory and control. — Berlin: Springer, 2009.
- Kerner B. S.* The physics of traffic. — Berlin: Springer, 2004.
- Kerner B. S., Klenov S. L., Wolf D. E.* Cellular automata approach to three-phase traffic theory // J. Phys. A: Math. Gen. — 2002. — Vol. 35. — P. 9971–10013.
- Kerner B., Konhaeuser P.* Structure and parameters of clusters in traffic flow // Phys. Review E. — 1994. — Vol. 50. — P. 54–83.
- Lighthill M. J., Whitham G. B.* On kinematic waves (Part II): A theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. R. Soc. A. — 1955. — Vol. 229. — P. 317–345.
- Nagel K., Schreckenberg M.* A cellular automaton model for freeway traffic // J. Phys. I France. — 1992. — Vol. 2. — P. 2221–2229.
- Paveri-Fontana S. L.* On Boltzmann like treatments for traffic flow // Transportation Research. — 1975. — Vol. 9. — P. 225–235.
- Payne H. J.* Models of freeway traffic and control // Mathematical models of public systems / G. A. Bekey (Ed.). — Vol. 1. — La Jolla, CA: Simulation Council, 1971. — P. 51–61.
- Phillips W.* A kinetic model for traffic flow with continuum implications // Transport. Plan. Technol. — 1979. — Vol. 5. — P. 131–138.
- Prigogine I., Andrews F. C.* A Boltzmann like approach for traffic flow // Operations Research. — 1960. — Vol. 8, No. 6. — P. 789–797.
- Prigogine I., Herman R.* Kinetic theory of vehicular traffic. — Amsterdam: Elsevier, 1971.
- Qi L., Zheng Z., Gang L.* A cellular automation model for ship traffic flow in waterways // Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications. — 2017. — Vol. 471. — P. 705–717.

- Tomoeda A., Shamoto D., Nishi R., Ohtsuka K., Nishinari K.* A compressible fluid model for traffic flow and nonlinear saturation of perturbation growth // *Natural Computing. Proc. in Information and Communications Technology* / F. Peper et al. (eds.) — Vol. 2. — Tokyo: Springer, 2010. — P. 308–315. — https://doi.org/10.1007/978-4-431-53868-4_35
- Trapeznikova M. A., Chechina A. A., Churbanova N. G.* Simulation of vehicular traffic using macro- and microscopic models // *Computational Mathematics and Information Technologies*. — 2023. — Vol. 7, No. 2. — P. 60–72. — <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-60-72>
- Trapeznikova M. A., Churbanova N. G., Chechina A. A., Ermakov A. V., German M. S.* Visual environment for mathematical modeling of traffic flows // *Proc. of 2022 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications*, Moscow, Russia, 15–17 March 2022. — IEEE, 2022. — P. 1–6. — DOI: 10.1109/IEEECONF53456.2022.9744301
- Treiber M., Hennecke A., Helbing D.* Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, non-local traffic model // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 59, No. 1. — P. 239–253.
- Treiber M., Kesting A.* *Traffic flow dynamics. Data, models and simulation*. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. — 503 p.
- Wiener N.* *Cybernetics, or control and communication in the animal and the machine*. — Cambridge, MA: The MIT Press, 2019. — [Reissue of the 1961 second edition.]
- Zhang H. M.* A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior // *Transp. Res. B*. — 2002. — Vol. 36, No. 3. — P. 275–290.