

УДК: 519.8

Идентификация парадокса Браесса в модели стабильной динамики

Ю. В. Дорн^{1,2,a}, О. М. Шитиков^{3,b}

¹Институт перспективных исследований проблем искусственного интеллекта и интеллектуальных систем, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 1

²Институт проблем передачи информации РАН,
Россия, 127051, г. Москва, Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1

³Национальный исследовательский университет «Московский физико-технический институт»,
Россия, 141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: ^a dornyv@yandex.ru, ^b shitikov.om@phystech.edu

Получено 22.12.2023.

Принято к публикации 22.12.2023.

В работе исследуется поиск неэффективных ребер в модели стабильной динамики Нестрова – де Пальмы (2003). Для этой цели мы доказываем несколько общих теорем о свойствах равновесия, в том числе о том, что условие равенства стоимостей для всех используемых маршрутов может быть распространено на все пути, задействующие ребра из равновесных маршрутов. В работе показывается, что стандартная постановка задачи о поиске ребер, удаление которых приводит к уменьшению стоимости проезда для всех участников, не имеет практического смысла, так как одно и то же ребро может быть как эффективным, так и неэффективным (в зависимости от загрузки сети). В работе мы вводим понятие неэффективного ребра, опираясь на чувствительность суммарных издержек водителей к издержкам на ребре. В работе приводятся алгоритм поиска неэффективных ребер и результаты численных экспериментов для транспортной сети города Анахайм.

Ключевые слова: транспортное моделирование, парадокс Браесса

Исследования были выполнены при поддержке ежегодного дохода ФЦК МФТИ (целевого капитала № 5 на развитие направлений искусственного интеллекта и машинного обучения в МФТИ, <https://fund.mipt.ru/capitals/ck5/>).

UDC: 519.8

Detecting Braess paradox in the stable dynamic model

Yu. V. Dorn^{1,2,a}, O. M. Shitikov^{3,b}

¹MSU Institute for Artificial Intelligence,

27/1 Lomonosov's prospect, Moscow, 119991, Russia

²Kharkevich Institute for Information Transmission Problems,

19/1 Bolshoy Karenty per., Moscow, 127051, Russia

³National Research University Moscow Institute of Physics and Technology,

9 Institute lane, Dolgoprudny, 141701, Russia

E-mail: ^a dornyv@yandex.ru, ^b shitikov.om@phystech.edu

Received 22.12.2023.

Accepted for publication 22.12.2023.

The work investigates the search for inefficient edges in the model of stable dynamics by Nestrov – de Palma (2003). For this purpose, we prove several general theorems about equilibrium properties, including the condition of equal costs for all used routes that can be extended to all paths involving edges from equilibrium routes. The study demonstrates that the standard problem formulation of finding edges whose removal reduces the cost of travel for all participants has no practical significance because the same edge can be both efficient and inefficient depending on the network's load. In the work, we introduce the concept of an inefficient edge based on the sensitivity of total driver costs to the costs on the edge. The paper provides an algorithm for finding inefficient edges and presents the results of numerical experiments for the transportation network of the city of Anaheim.

Keywords: transportation modeling, Braess paradox

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 35–51 (Russian).

The study was carried out with the support of the annual income of the Endowment Fund of Moscow Institute of Physics and Technology (target capital no. 5 for the development of artificial intelligence and machine learning, <https://fund.mipt.ru/capitals/ck5/>).

Введение

В [Braess, 1968] немецкий математик Дитрих Браесс привел пример транспортной сети, искусственное ухудшение которой (удаление ребра) приводит к улучшению транспортного состояния для всех участников дорожного движения в статических равновесных моделях транспортных потоков. Это явление получило название «парадокс Браесса» и стало предметом многочисленных исследований [Braess, Nagurney, Wakolbinger, 2007; Frank, 1981; Zverovich, Avineri, 2014; Bittihn, Schadschneider, 2021]. Вариации парадокса Браесса были обнаружены в энергетических [Schäfer et al., 2022] и информационных сетях [Acemoglu et al., 2018], случайных графах [Valiant, Roughgarden, 2010]. Подтверждение реализации парадокса в условиях реального эксперимента было описано в [Rapoport et al., 2009].

Естественным следствием обнаружения парадокса Браесса стал вопрос о построении транспортных сетей, свободных от неэффективных ребер. Попытки развить теорию оптимальной топологии транспортной сети, свободной от возникновения неэффективных ребер [Epstein, Feildman, Mansour, 2009; Milchtaich, 2006; Anshelevich et al., 2008; Askoura, Lebacque, Haj-Salem, 2011], несмотря на свою многочисленность, не имели большого успеха: для любой предложенной нетривиальной (т. е. сеть не представляет собой набор параллельных ребер или, наоборот, идущих подряд последовательных ребер) топологии удавалось построить контрпример, при котором парадокс наблюдался. В цикле работ [Roughgarden, Tardos, 2002; Roughgarden, 2005; Roughgarden, 2006] Роугарден с соавторами показали, что в общем случае поиск оптимального подграфа заданного транспортного графа является (NP-)трудной задачей, т. е. не имеет эффективного алгоритмического решения.

Альтернативой поиска оптимальной топологии стало направление исследований, связанное с введением платы за проезд. Исследование платных дорог, получившее активное развитие после работы [Vickrey, 1963], ставило целью не столько поиск неэффективных ребер, сколько снижение пробок за счет введения платных дорог и, соответственно, замещении временных издержек денежными. В этой работе, в продолжение исследования [Дорн, 2015], развивается идея поиска неэффективных ребер именно в том смысле, что увеличение временных издержек на ребре приводит к снижению временных издержек в равновесии для всех пользователей сети.

Наиболее близкими к нашей работе, в первую очередь в связи с использованием в качестве модели транспортного равновесия модели стабильной динамики, являются работы [Bagloee et al., 2019; Park, 2011; Дорн, 2015; Ma et al., 2018]. В статье Парка [Park, 2011] был предложен алгоритм, который позволял бы искать так называемые браессовские пути, данное понятие достаточно сильно отличается от понятия неэффективных ребер: найти неэффективные ребра при найденном браессовском пути — это задача в худшем случае столь же сложная, как и поиск неэффективного ребра. В статье [Bagloee et al., 2019] была предложена эвристика для поиска неэффективных дорог, основанная на аппроксимации двухуровневой задачи оптимизации. В статье [Ma et al., 2018] задача поиска неэффективных ребер сводится к задаче нелинейной оптимизации со смешанными (mixed-integer) ограничениями, без обсуждения возможности эффективного численного решения. В статье [Дорн, 2015] неэффективные ребра определялись иначе — как ребра, увеличение минимальных затрат на которых приводило бы к улучшению ситуации для всех участников сети. В ней разбираются некоторые свойства равновесия в модели стабильной динамики, благодаря которым удается построить алгоритм поиска неэффективных ребер для одной пары «источник–сток». Однако в работе практически не обсуждаются условия применимости алгоритма и ситуация со многими парами «источник–сток». При этом тестирование алгоритма описано только для модельных примеров.

В этой работе результаты [Дорн, 2015] существенно дополняются, а именно, мы получили условия применимости алгоритма, получили некоторые новые условия единственности равновесия в модели стабильной динамики, предложили новый алгоритм для транспортных сетей

со многими источниками и стоками. Эффективность алгоритма была протестирована численно для транспортной сети города Анахайма.

Обозначения

$\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau})$ — ориентированный транспортный граф с множеством вершин V ($|V| = n$) и множеством ребер $E \subset V \times V$ ($|E| = m$). Каждое ребро $e \in E$ имеет пропускную способность \bar{f}_e и минимальные временные издержки $\bar{\tau}_e$. Пропускные способности и минимальные временные издержки собраны в векторы $\bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)^T$ и $\bar{\tau} = (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \dots, \bar{\tau}_m)^T$ для удобства. Среди всего множества вершин выделяют два (возможно, пересекающихся) подмножества вершин-источников S и вершин-стоков D . Пары $(s, t) \in S \times D$ образуют корреспонденцию. Матрица $\{d_{ij}\}$, $i \in S$, $j \in D$, $d_{ij} \geq 0$, называется матрицей корреспонденций и задает агрегированные потоки между всеми парами вида «источник–сток». Дуплет $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \tau(f)), \{d_{ij}\})$ называется конфигурацией сети. В случае когда рассматривается модель с одним источником–стоком (т. е. у матрицы $\{d_{ij}\}$ ровно один ненулевой элемент), мы будем писать $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \tau(f)), d_{ij})$ или явно оговаривать это заранее.

Пусть (неориентированное) ребро e и вершины i и j инцидентны. Будем говорить, что триплет (i, e, j) задает локальную ориентацию ребра e . При этом вершина i будет называться началом ребра e , а вершина j будет называться его концом. Будем говорить, что на графе $\Gamma(V, E)$ задана глобальная ориентация, если для каждого ребра e определена локальная ориентация.

Пусть $p = (i_{p_1}, e_{p_1}, i_{p_2}, \dots, e_{p_k}, i_{p_{k+1}})$, $i_j \in V$, $e_j \in E$, есть последовательность вершин и ребер графа. При этом каждый элемент входит в последовательность только один раз (то есть отсутствуют петли). Тогда мы назовем p путем из вершины i_{p_1} в вершину $i_{p_{k+1}}$. Каждый путь задает свою локальную ориентацию ребер, которые в него входят. Ориентация ребер в пути p и в графе Γ не обязательно совпадает. Мы будем называть путь p маршрутом, если для всех ребер, принадлежащих пути p , локальная ориентация, индуцированная путем p , совпадает с глобальной ориентацией, заданной на Γ . Согласованные пути называются маршрутами. Если же нас не интересует, совпадает или нет локальная ориентация пути и заданная на графе глобальная ориентация, то мы будем говорить о пути p как о неориентированном. Неориентированность значит не отсутствие локальной ориентации (она есть у любого пути), а отсутствие привязки к заданной на графе глобальной ориентации.

Величина

$$\gamma_{\Gamma,p}(e) = \begin{cases} 1, & e \in p \text{ и глобальная и локальная ориентация } e \text{ в } p \text{ совпадают,} \\ -1, & e \in p \text{ и глобальная и локальная ориентация } e \text{ в } p \text{ не совпадают,} \\ 0, & \text{если } e \notin p, \end{cases}$$

характеризует связь локальной и глобальной ориентации для ребра e . Множества P_{st} и K_{st} задают все маршруты и пути из вершины s в вершину t соответственно, $P = \bigcup P_{st}$, $K = \bigcup K_{st}$.

Поток по маршруту p обозначается через x_p , $x = (x_1, \dots, x_{|P|})^T \in X$ — вектор распределения потоков по маршрутам, где $X = X(\{d_{ij}\}) = \left\{ x \in R_+^{|P|} : \sum_{p \in P_{st}} x_p = d_{st} \right\}$ задает множество допустимых распределений потоков по маршрутам для заданной конфигурации.

$\Theta = \{\delta_{ep}\}_{e \in E, p \in P}$ — матрица инцидентностей ребер маршрутам. Здесь $\delta_{ep} = 1$, если $e \in p$, и $\delta_{ep} = 0$ — если иначе. Загрузка ребра e для заданного распределения x задается как $f_e = \sum_p x_p \cdot \delta_{ep}$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, $f = \Theta x$.

Вес ребра e при распределении потоков x обозначим через $\tau_e(x)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)^T$. $C_p(x) = \sum_{e \in p} \tau_e(x) = \sum_{e \in p} \tau_e$ — издержки на маршруте p при распределении потоков по маршрутам x .
 $T_{ij}(\tau) = \min_{p \in P_{ij}} C_p(\tau)$ — издержки на кратчайшем маршруте из i в j .

Остаточной сетью для графа $\Gamma(V, E, \bar{f})$ при загрузке f называется граф $\Gamma^*(V, E^*, \bar{f} - f)$. Здесь $E^* = \{e \in E: 0 < f_e < \bar{f}_e\}$. Дополняющим путем из вершины s в вершину t в графе $\Gamma(V, E, \bar{f})$ при загрузке f называется (неориентированный) путь p из s в t , такой, что для любого $e \in p$ выполнено $f_e < \bar{f}_e$.

Состояние (f, τ) называется стабильным, если выполнено $f \leq \bar{f}$ и $\tau \geq \bar{\tau}$, причем

- 1) если $f_e < \bar{f}_e$, то $\tau_e = \bar{\tau}_e$,
- 2) если $f_e = \bar{f}_e$, то $\tau_e \geq \bar{\tau}_e$.

Модель стабильной динамики и транспортное равновесие

Исследование парадокса Браесса невозможно без формализации модели, описывающей транспортную (или иную сетевую) систему и правила взаимодействия агентов. Наиболее популярной моделью транспортного равновесия можно считать модель Бекмана [Beckmann, McGuire, Winsten, 1956]. В этой работе предлагается в качестве основного фреймворка использовать модель стабильной динамики [de Palma, Nesterov, 2003], которую можно рассматривать в качестве предельного случая модели Бекмана [Гасников и др., 2014].

Пусть задана некоторая конфигурация сети $(\Gamma(V, E, \tau(f)), \{d_{ij}\})$. Матрица корреспонденций считается заданной и не зависящей от текущего распределения потоков по маршрутам и ассоциированных с ними издержек. Можно считать, что каждая пара «источник–сток» (i, j) представляет собой класс игроков-водителей, следующих из вершины i в вершину j . Величина d_{ij} описывает величину популяции соответствующих агентов, их количество. Нас будут интересовать равновесное распределение потоков по маршрутам и соответствующие ему равновесная загрузка сети и порождаемые им издержки.

Определение 1. Говорят, что при распределении $x^{eq} \in X$ выполнен принцип равновесия Нэша–Вардропа [Nash, 1951; Wardrop, Whitehead, 1952], если для любого маршрута $p \in P_{st}$ верно

$$x_p > 0 \iff C_p(x^{eq}) = \min_{q \in P_{st}} C_q(x^{eq}).$$

Распределение, удовлетворяющее этому условию, называется равновесным распределением потоков по маршрутам. Соответствующая загрузка $f^{eq} = \Theta x^{eq}$ называется равновесной загрузкой сети. Равновесием в модели стабильной динамики называется такое стабильное состояние (f^{eq}, τ^{eq}) , для которого выполнено условие равновесие Нэша–Вардропа.

Равновесие в модели стабильной динамики является решением задачи выпуклой оптимизации

$$\sum_{(s,t)} d_{st} T_{st}(\tau) - \langle \bar{f}, \tau - \bar{\tau} \rangle \rightarrow \max_{\tau \geq \bar{\tau}}. \quad (1)$$

При этом $f^{eq} = \bar{f} + s^*$, где s^* есть множители Лагранжа для ограничения $\tau \geq \bar{\tau}$.

В модели стабильной динамики равновесное для одной и той же конфигурации может быть несколько распределений потоков по маршрутам, удовлетворяющих условиям равновесия. Существуют конфигурации, для которых загрузка сети и транспортные издержки в равновесии также не определяются однозначно.

Парадокс Браесса

Определение. Пусть $x^{eq}(\Gamma, \{d_{ij}\})$ является равновесным распределением потоков по маршрутам для заданной конфигурации сети $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \{d_{ij}\})$. Ребро e называется *неэффективным*, если для любой пары «источник – сток» $(s, t) \in S \times D$, такой, что $\exists p \in P_{st} : x_p^{eq}(\Gamma, \{d_{ij}\}) > 0$, выполнено $\min_{p \in P_{st}} C_p(x^{eq}(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \{d_{ij}\})) \geq \min_{p \in P_{st}} C_p(x^{eq}(\Gamma(V, E \setminus \{e\}, \bar{f}, \bar{\tau}), \{d_{ij}\}))$ и хотя бы для одной корреспонденции неравенство строгое.

Проще говоря, неэффективное ребро — это такое ребро, удаление которого приводит к снижению издержек в оптимуме хотя бы для одной корреспонденции при неухудшении ситуации для всех остальных.

Ребра, удаление которых приводит к выигрышу некоторых агентов и не приводит к проигрышу других, часто называют неэффективными при заданной матрице корреспонденций. В свою очередь, ребра, которые используются в равновесии и которые не являются неэффективными, называют эффективными при заданной матрице корреспонденций.

Есть несколько различных постановок задач, связанных с поиском неэффективных ребер. В контексте парадокса Браесса обычно рассматривается задача следующего вида.

Поиск оптимальной конфигурации сети. Задана конфигурация сети $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \{d_{ij}\})$. Требуется найти подграф $\Gamma' \subset \Gamma$ такой, что равновесие для новой конфигурации сети (корреспонденции не меняются) оптимально. Под оптимальностью понимается та или иная метрика качества (как правило, суммарные издержки агентов, при условии, что для всех агентов они не выше, чем в исходной, максимальной конфигурации).

К сожалению, оговорка «при заданной матрице корреспонденций» необходима, так как одно и то же ребро может быть эффективным и неэффективным при разных матрицах корреспонденций.

Лемма 1. Пусть e — неэффективное ребро в конфигурации сети $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \{d_{ij}\})$. Тогда существует конфигурация сети $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \{\widehat{d}_{ij}\})$ такая, что удаление ребра e приводит к увеличению издержек хотя бы для части водителей и неумножению для остальных.

Доказательство. Утверждение леммы тривиально. Пусть $e = (s_e, t_e)$ ($s_e, t_e \in V$). Достаточно рассмотреть матрицу корреспонденций $D = \{d_{ij}\}$ вида

$$d_{uv} = \begin{cases} \bar{f}_{(s_e, v)}, & \text{если } u = s_e, (s_e, v) \in E, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

□

Следствие 1. Является ребро $e \in \Gamma$ обычным или неэффективным — зависит от матрицы корреспонденций $\{d_{ij}\}$.

О некоторых свойствах равновесия Нэша – Вардропа в модели Нестерова – де Пальмы

В равновесии для любого используемого маршрута $p \in P$ выполнено $C_p(\tau^{eq}) = \min_{q \in P_{s_p t_p}} C_q(\tau^{eq})$, где s_p и t_p являются начальной и конечной вершиной маршрута p соответственно.

Это свойство можно распространить на неориентированные пути.

Пусть $P(\tau^{eq}, f^{eq}) = \left\{ p \in P \mid d_{s_p t_p} > 0, C_p(\tau^{eq}) = \min_{q \in P_{s_p t_p}} C_q(\tau^{eq}) \right\}$ — множество маршрутов,

которые могли бы использоваться в текущем равновесии.

Рассмотрим конфигурацию $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \{d_{st}\})$. Пусть равновесие (f^{eq}, τ^{eq}) существует. Рассмотрим подграф $\Gamma^{eq}(V_*, E_*, \bar{f}, \bar{\tau})$, где $E_* = \{e : e \in E, e \in p, p \in P(\tau^{eq}, f^{eq})\}$.

Тогда верна следующая теорема для конфигурации с единственной корреспонденцией.

Теорема 1. Пусть (f^{eq}, τ^{eq}) является равновесием для конфигурации $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), d_{st})$, тогда для произвольного пути $p \in K_{st}$ для графа $\Gamma^{eq}(V_*, E_*, \bar{f}, \bar{\tau})$ выполнено

$$C_p(\tau^{eq}) = \sum_{e \in E} \gamma_{\Gamma^{eq}, p}(e) \cdot \tau_e = \min_{q \in P_{st}} C_q(\tau^{eq})$$

и для любых двух последовательных вершин i и $i+1$ пути p выполнено

$$C^{(i+1)}(\tau^{eq}) = C^{(i)}(\tau^{eq}) + \gamma_{\Gamma^{eq}, p}((i, i+1)) \cdot \tau_{(i, i+1)}^{eq}$$

Доказательство. Определим через $C_p^{(i)}(\tau)$ время пути из источника до вершины i ($i \in p$) при векторе весов τ . Заметим, что издержки для всех маршрутов, используемых в равновесии, совпадают:

$$C_p^{(i)}(\tau^{eq}) = C^{(i)}(\tau^{eq}).$$

В частности, для пары «источник–сток» (s, t) выполнено

$$C_p(\tau^{eq}) = C^{(t)}(\tau^{eq}).$$

Рассмотрим две произвольные вершины i и j в Γ^{eq} , которые соединены некоторым ребром (i, j) . $(i, j) \in E'$, следовательно, существует маршрут p такой, что p используется в равновесии и $(i, j) \in p$. Но тогда выполняется

$$C^{(j)}(\tau^{eq}) = C^{(i)}(\tau^{eq}) + \tau_{(i, j)}^{eq}.$$

Рассмотрим произвольный (неориентированный) путь k , $k \in K_{st}$. Занумеруем вершины в пути k , начиная с вершины s и кончая вершиной t . Пусть всего n вершин. Рассмотрим две произвольные вершины под номерами i и $i+1$. Они соединены некоторым ребром. Наша цель — показать, что

$$C^{(i+1)}(\tau^{eq}) = C^{(i)}(\tau^{eq}) + \gamma_{\Gamma^{eq}, k}((i, i+1)) \cdot \tau_{(i, i+1)}^{eq}.$$

Заметим, что могут иметь место два случая.

1. Глобальная ориентация ребра e , которое соединяет вершины i и $i+1$ в пути p , совпадает с локальной ориентацией, индуцированной путем p , то есть $e = (i, i+1)$.

Тогда $\gamma_{\Gamma^{eq}, p}((i, i+1)) = 1$ и выполнено

$$C^{(i+1)}(\tau^{eq}) = C^{(i)}(\tau^{eq}) + \tau_{(i, i+1)}^{eq} = C^{(i)}(\tau^{eq}) + \gamma_{\Gamma^{eq}, p}((i, i+1)) \cdot \tau_{(i, i+1)}^{eq}.$$

2. Глобальная ориентация ребра e , которое соединяет вершины i и $i+1$, не совпадает с локальной ориентацией, индуцированной путем p , то есть $e = (i+1, i)$.

Тогда $\gamma_{\Gamma^{eq}, k}((i, i+1)) = -1$ и выполнено

$$\begin{aligned} C^{(i)}(\tau^{eq}) &= C^{(i+1)}(\tau^{eq}) + \tau_{(i+1, i)}^{eq}, \\ C^{(i+1)}(\tau^{eq}) &= C^{(i)}(\tau^{eq}) - \tau_{(i+1, i)}^{eq}, \\ C^{(i+1)}(\tau^{eq}) &= C^{(i)}(\tau^{eq}) + \gamma_{\Gamma^{eq}, p}((i, i+1)) \cdot \tau_{(i+1, i)}^{eq}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что для любых двух последовательных вершин i и $i + 1$ в пути p выполнено

$$C^{(i+1)}(\tau^{eq}) = C^{(i)}(\tau^{eq}) + \gamma_{\Gamma^{eq}, p}((i, i + 1)) \cdot \tau_{(i+1, i)}^{eq}.$$

Пересчитывая $C^{(i)}(\tau^{eq})$ последовательно для всех вершин в пути и используя тот факт, что $C^{(s)}(\tau^{eq}) = 0$, мы имеем

$$C^{(t)}(\tau^{eq}) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{\Gamma^{eq}, p}((i, i + 1)) \cdot \tau_{(i, i+1)}^{eq}.$$

□

Важно заметить, что данная теорема верна и в контексте модели стабильной динамики, и в контексте модели Бекмана.

Для лучшего понимания механики появления неэффективных ребер более информативным будет следующий набор утверждений.

Лемма 2. Пусть $0 \leq \alpha < \beta$. Тогда для любой конфигурации $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \{d_{ij}\})$ выполнено

$$T_{st}(\tau^{eq})(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \alpha \cdot \{d_{ij}\}) \leq T_{st}(\tau^{eq})(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \beta \cdot \{d_{ij}\}) \quad \forall (s, t) \in S \times D.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не верно, т.е. существуют $0 \leq \alpha < \beta$ и конфигурация $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \{d_{ij}\})$ такие, что $T_{st}(\tau^{eq})(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \alpha \cdot \{d_{ij}\}) > T_{st}(\tau^{eq})(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \beta \cdot \{d_{ij}\})$ для некоторой пары $(s, t) \in S \times D$. Пусть $x^{eq}(\alpha)$ и $x^{eq}(\beta)$ — равновесные распределения потоков по маршрутам для конфигураций $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \alpha \cdot \{d_{ij}\})$ и $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \beta \cdot \{d_{ij}\})$ соответственно, для которых наблюдалось противоречие.

Рассмотрим распределение потоков по маршрутам $z = \frac{\alpha}{\beta} x^{eq}(\beta)$.

Распределение z является допустимым для конфигурации $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \alpha \cdot \{d_{ij}\})$. Действительно, $x^{eq}(\beta) \in X(\beta \cdot \{d_{ij}\}) = \left\{ x \in R_+^{|P|} : \sum_{p \in P_{st}} x_p = \beta \cdot d_{st} \right\}$, следовательно, $z = \frac{\alpha}{\beta} x^{eq}(\beta) \in X(\alpha \cdot \{d_{ij}\}) = \left\{ x \in R_+^{|P|} : \sum_{p \in P_{st}} x_p = \alpha \cdot d_{st} \right\}$.

При этом соответствующая загрузка сети $f(z)$ при распределении z будет $\frac{\alpha}{\beta} f^{eq}(\beta)$, а следовательно, $f_e(z) < \bar{f}_e \quad \forall e \in E$. Тогда для любой корреспонденции $(s, t) \in S \times D$ выполнено

$$\begin{aligned} T_{st}(\tau^{eq})(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \alpha \cdot \{d_{ij}\}) &> T_{st}(\tau^{eq})(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \beta \cdot \{d_{ij}\}) \quad (\text{по предположению}) = \\ &= \sum_{\{e \in P : p \in P_{st}, x_p^{eq} > 0\}} \tau_e^{eq}(\beta) \geq \sum_{\{e \in P : p \in P_{st}, x_p^{eq} > 0\}} \bar{\tau}_e = T_{st}(z). \end{aligned}$$

стоимость кратчайшего пути стоимость этого пути при потоке 0

Получаем, что $T_{st}(\tau^{eq})(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \alpha \cdot \{d_{ij}\}) > T_{st}(z)$, что противоречит условию равновесия для конфигурации $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \alpha \cdot \{d_{ij}\})$ для корреспонденции (s, t) . □

Следствие 2. Для любой конфигурации $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \alpha \cdot \{d_{ij}\})$ величина $T_{st}(\tau^{eq})(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \alpha \cdot \{d_{ij}\})$ монотонно возрастает по α .

Следствие 3. Обозначим через $P(\alpha) = \left\{ p \in P \mid C_p(\tau^{eq}) = \min_{q \in P_{s,p}} C_q(\tau^{eq}) \right\}$ множество маршрутов, удовлетворяющих условию равновесия для конфигурации $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \alpha \cdot \{d_{ij}\})$. Тогда $\alpha < \beta \Rightarrow P(\alpha) \subseteq P(\beta)$.

Условия единственности равновесия в модели стабильной динамики

Вопрос об условиях существования и единственности транспортного равновесия в модели Бекмана исследовался во многих работах [Milchtaich, 2005]. Для модели стабильной динамики данная работа не проводилась.

Хорошо известно, что в модели Бекмана равновесное распределение потоков по маршрутам x^{eq} даже для простых конфигураций может быть не единственным. При этом известно, что порождаемая в равновесии загрузка сети $f^{eq} = \Theta x^{eq}$ в модели Бекмана единственна. То есть если x_1^{eq} и x_2^{eq} есть два равновесных распределения потоков для одной и той же конфигурации $(\Gamma(V, E, \tau), \{d_{ij}\})$, то $f_1^{eq} = \Theta x_1^{eq} = \Theta x_2^{eq} = f_2^{eq}$.

Для модели стабильной динамики данное утверждение не выполняется. То есть существует такая конфигурация $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \{d_{ij}\})$, для которой существует два различных равновесных распределения потоков x_1^{eq} и x_2^{eq} таких, что $f_1^{eq} = \Theta x_1^{eq} \neq \Theta x_2^{eq} = f_2^{eq}$.

В статье [de Palma, Nesterov, 2003] было показано, что задача поиска равновесия (по τ) в модели стабильной динамики является двойственной для задачи поиска потока минимальной стоимости.

Теорема 2. *Равновесный поток f^{eq} является решением задачи о потоке минимальной стоимости $\min_{f, \bar{f}_\alpha} \left\{ \langle f, \bar{\tau} \rangle \mid f \leq \bar{f}, \sum_{e=(u,v) \in E} f_e - \sum_{(v,u) \in E} f_e = d_v, v \in V, f \geq 0 \right\}$.*

Пусть задана конфигурация $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), d_{st})$ с единственной парой «источник–сток» (s, t) . Пусть для данной конфигурации равновесие (f^{eq}, τ^{eq}) существует. Тогда для каждой вершины i , которая используется в равновесии, определена величина $C^i(\tau^{eq})$.

Причиной неединственности равновесия может быть множество причин. Большую часть тривиальных случаев можно исключить, введя процедуры редуцирования сети.

- В графе запрещены петли.
- Объединение мультиребер. Пусть существует пара вершин (i, j) такая, что есть два ребра, ведущих из i в j , с характеристиками $(\bar{f}_1, \bar{\tau}_{(i,j)})$ и $(\bar{f}_2, \bar{\tau}_{(i,j)})$. Пара мультиребер заменяется на ребро с характеристикой $(\bar{f}_1 + \bar{f}_2, \bar{\tau}_{(i,j)})$.
- Удаление проходных вершин. Пусть существует вершина i , в которую входит единственное ребро (j, i) и из которой исходит единственное ребро (i, k) . Тогда можно заменить пару ребер (j, i) и (i, k) на ребро (j, k) с характеристикой $\min(\{\bar{f}_{(j,i)}, \bar{f}_{(i,k)}\}, \bar{\tau}_{(j,i)} + \bar{\tau}_{(i,k)})$ и удалением вершины i из множества вершин графа.

Редукция сети позволяет избавиться от проблем с неединственностью, вызванных симметрией задачи (шаг 2) или недоопределенностью (шаг 3). Далее мы везде будем считать сеть редуцированной (т. е. такой, что нельзя применить ни одну из процедур редукции).

Пусть $\Gamma(V, E_*, \bar{f} - f^{eq}, \bar{\tau})$ есть остаточная сеть для транспортного графа $\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau})$ при загрузке f^{eq} . Определим сведенную остаточную сеть как $\Gamma^{eq}(V, E^{eq}, \bar{f} - f^{eq}, \bar{\tau})$ (или сжато Γ^{eq}), где $E^{eq} = \{e \in E \mid e = (i, j), C^j(\tau^{eq}) - C^i(\tau^{eq}) = \bar{\tau}_e\}$.

Теорема 3. *Пусть задана конфигурация $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), d_{st})$ с единственной парой «источник–сток». Пусть равновесие (f^{eq}, τ^{eq}) существует. Тогда (f^{eq}, τ^{eq}) является единственным равновесием для конфигурации $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), d_{st})$, если и только если сведенная остаточная сеть Γ^{eq} является деревом.*

Доказательство. 1. Пусть источник s и сток t в сведенной остаточной сети не связаны никаким путем. Так как пропускная способность сети превышает транспортный спрос, если и только если существует дополняющий путь в остаточной сети, то отсутствие дополняющего пути означает или равенство загрузки пропускной способности пути, или превышение загрузки над пропускной способностью сети.

В случае если загрузка на сеть выше, чем пропускная способность, равновесия не существует.

Покажем, что если загрузка в точности равна пропускной способности, то равновесие, если оно существует, не единственно.

Предположим, что равновесие существует, обозначим его как (f^{eq}, τ^{eq}) .

Определим через H множество всех вершин $v \in V$ таких, что s и v являются связанными в сведенной остаточной сети. Рассмотрим разрез $(H, V^* \setminus H)$. Обозначим через $A = e||e = (v, u)$, $v \in H$, $u \in V^* \setminus H$, $e \in E$, $B = e||e = (v, u)$, $v \in V^* \setminus H$, $u \in H$, $e \in E$. Пусть (f^{eq}, τ^{eq}) является равновесием. Пусть q есть путь такой, что q не используется в равновесии (f^{eq}, τ^{eq}) , имеет наименьшую стоимость среди всех неиспользуемых путей. Обозначим через $\Delta = \min \left\{ \min_{e \in A \cup B} (\tau_e^{eq} - \bar{\tau}_e^{eq}), C_q^{(t)}(\tau^{eq}) - C^{(t)}(\tau^{eq}) \right\}$. Рассмотрим состояние (f^{eq}, τ^{seq}) , s.t. $\tau_e^{seq} = \tau_e^{eq}$ для $e \notin A \cup B$, $\tau_e^{seq} = \tau_e^{eq} + \delta$ для $e \in A$, $\tau_e^{seq} = \tau_e^{eq} - \delta$ для $e \in B$, где $0 < \delta < \Delta$.

Можно показать, что состояние (f^{eq}, τ^{seq}) является равновесием. Поточковые ограничения $f \leq \bar{f}$ удовлетворены, так как используется поток f из равновесного состояния (f^{eq}, τ^{eq}) , для которого ограничения выполнены по условию.

Ограничения на τ также удовлетворяются.

Для ребер, не принадлежащих $A \cup B$, были использованы τ из (f^{eq}, τ^{eq}) . Для (f^{eq}, τ^{eq}) условия на τ выполнены.

Для ребер, принадлежащих A , известно, что $f_e = \bar{f}_e$, следовательно, требуется, чтобы $\tau_e \geq \bar{\tau}_e$. Но, по построению, $\tau_e^{seq} = \tau_e^{eq} + \delta > \tau_e^{eq} \geq \bar{\tau}_e$.

Для ребер, принадлежащих B , известно, что $f_e = \bar{f}_e$, следовательно, требуется $\tau_e \geq \bar{\tau}_e$. Но, по построению, $\tau_e^{seq} = \tau_e^{eq} - \delta > \tau_e^{eq} - \Delta \geq \bar{\tau}_e$.

Наконец, для любого пути p из s в t при состоянии сети (f^{eq}, τ^{seq}) можно утверждать, что $C_p^{(t)}(\tau^{seq}) = C_p^{(t)}(\tau^{eq} + \delta)$. Следовательно, если (f^{eq}, τ^{eq}) удовлетворяет условию равновесия, то (f^{eq}, τ^{seq}) также удовлетворяют условию равновесия.

2. Предположим, что источник s и сток t имеют связывающий их маршрут в $R(\Gamma)(V', E', \bar{f}', \bar{\tau})$, однако остаточная сеть не является деревом. Тогда существует по крайней мере один ненаправленный цикл. Этот цикл сформирован двумя или более маршрутами, использующимися в равновесии. Предположим, что в равновесии существует цикл $L = (v_1, e_1, \dots, e_k, v_k, e_{k+1}, v_1)$. Мы можем установить два направления на этом цикле L . Выберем одно из них. Воспользуемся функцией γ .

Предположим, что (f^{eq}, τ^{eq}) есть равновесие. Определим $\Delta = \min_{e \in E'} (\bar{f}'_e, f_e, \bar{f}_e)$.

Рассмотрим состояние (f^{seq}, τ^{eq}) , где $f_e^{seq} = f_e^{eq}$ для $e \notin L$, $f_e^{seq} = f_e^{eq} + \gamma_{\Gamma, L}(e) \cdot \delta$ для $e \in L$, $0 < \delta < \Delta$. Мы можем показать, что (f^{eq}, τ^{eq}) является равновесием. По построению, все веса удовлетворяют условию равновесия Нэша–Вардроп. Теперь мы должны показать, что удовлетворяются ограничения на пропускные способности и балансовые ограничения в вершинах. Легко видеть, что для любой вершины $v \notin L$ балансовые ограничения выполнены (опять же по построению) и для любого ребра $e \notin L$ поток не превосходит пропускную способность.

Рассмотрим произвольное ребро $e \in L$.

По построению, $f_e^{seq} = f_e^{eq} + \gamma_{\Gamma, L}(e) \cdot \delta \leq f_e^{eq} + \min_{e \in E'} (\bar{f}'_e, f_e, \bar{f}_e) \leq f_e^{eq} + \bar{f}_e - f_e^{eq} = \bar{f}_e$, $f_e^{seq} = f_e^{eq} + \gamma_{\Gamma, L}(e) \cdot \delta \geq f_e^{eq} - \min_{e \in E'} (\bar{f}'_e, f_e, \bar{f}_e) \geq f_e^{eq} - f_e^{eq} = 0$.

Следовательно, для любого ребра поток не превышает пропускной способности. Рассмотрим произвольную вершину $v \in L$. Нам известно, что в состоянии (f^{eq}, τ^{eq}) балансовые ограничения выполнены. Для каждой вершины $v \in L$ существует два и только два ребра e_1 и e_2 , $e_1, e_2 \in L$, таких, что e_1 и e_2 включают вершину v . Балансовые ограничения для v в состоянии (f^{eq}, τ^{eq}) :

$$\sum_{e=(u,v) \in E} f_e^{eq} - \sum_{e=(v,u) \in E} f_e^{eq} = d.$$

Балансовые ограничения для v в состоянии (f^{seq}, τ^{eq}) :

$$\sum_{e=(u,v) \in E} f_e^{seq} - \sum_{e=(v,u) \in E} f_e^{seq} = d.$$

Возможны три случая: 1) и e_1 , и e_2 являются входящими в v ; 2) и e_1 , и e_2 являются исходящими ребрами для v ; 3) e_1 входит в v , а e_2 исходит из v .

В первом случае

$$\sum_{e=(u,v) \in E} f_e^{seq} - \sum_{e=(v,u) \in E} f_e^{seq} - d = \sum_{e=(u,v) \in E} f_e^{eq} - \sum_{e=(v,u) \in E} f_e^{eq} - d + \gamma_{\Gamma,L}(e_1) \cdot \delta + \gamma_{\Gamma,L}(e_2) \cdot \delta.$$

Если оба ребра e_1 и e_2 входят в v , тогда для одного ребра $\gamma_{\Gamma,L}(e) = 1$, а для другого ребра $\gamma_{\Gamma,L}(e) = -1$, какое бы направление на цикле мы ни выбрали ранее. Следовательно, $\gamma_{\Gamma,L}(e_1) \cdot \delta + \gamma_{\Gamma,L}(e_2) \cdot \delta = \delta - \delta = 0$.

Следовательно, балансовые ограничения выполнены.

Во втором случае

$$\sum_{e=(u,v) \in E} f_e^{seq} - \sum_{e=(v,u) \in E} f_e^{seq} - d = \sum_{e=(u,v) \in E} f_e^{eq} - \sum_{e=(v,u) \in E} f_e^{eq} - d - \gamma_{\Gamma,L}(e_1) \cdot \delta - \gamma_{\Gamma,L}(e_2) \cdot \delta.$$

Оба ребра e_1 и e_2 исходят из вершины v , тогда $\gamma_{\Gamma,L}(e)$ для e_1 и e_2 имеют различные знаки. Следовательно, $\gamma_{\Gamma,L}(e_1) \cdot \delta + \gamma_{\Gamma,L}(e_2) \cdot \delta = \delta - \delta = 0$.

Следовательно, балансовые ограничения выполнены.

В последнем случае

$$\sum_{e=(u,v) \in E} f_e^{seq} - \sum_{e=(v,u) \in E} f_e^{seq} - d = \sum_{e=(u,v) \in E} f_e^{eq} - \sum_{e=(v,u) \in E} f_e^{eq} - d + \gamma_{\Gamma,L}(e_1) \cdot \delta - \gamma_{\Gamma,L}(e_2) \cdot \delta.$$

Если ребро e_1 входит в v , а ребро e_2 исходит из v , тогда знаки $\gamma_{\Gamma,L}(e)$ для e_1 и e_2 совпадают. Следовательно, $\gamma_{\Gamma,L}(e_1) \cdot \delta - \gamma_{\Gamma,L}(e_2) \cdot \delta = \delta - \delta = 0$.

Следовательно, балансовые ограничения выполнены.

Следовательно, для всех вершин $v \in L$ балансовые ограничения выполнены.

3. Прежде всего заметим, что поток f^{eq} может быть получен в качестве решения задачи о потоке минимальной стоимости.

Известно, что задача о потоке минимальной стоимости имеет единственное решение в случае, если существует (и при том единственный) дополнительный путь в остаточной сети.

В нашем случае источник s и сток t являются вершинами в остаточной сети Ω , которая является деревом; следовательно, существует единственный путь в остаточной сети, который соединяет s и t . Следовательно, существует f^{eq} , который не превышает пропускной способности ребер и является решением задачи о потоке минимальной стоимости. При этом данное решение единственно.

Предположим, что источник s и сток t соединены, а остаточная сеть является деревом. Обозначим это дерево через Ω . Покажем, что равновесие существует и оно единственно.

Используя теорему 1, мы можем построить такой τ^{eq} , что условие равновесия будет выполнено, так же как и ограничение $\tau^{eq} \geq \bar{\tau}$. В первую очередь положим $\tau_e^{eq} = \bar{\tau}_e$ для всех $e \in \Omega$.

Из связности Ω для любой вершины $v \in V'$ существует путь $p(s, v)$, $p(s, v) \in \Omega$, такой, что $p(s, v)$ соединяет s и v . Этот путь индуцирует направление в поддереве дерева Ω . Так как Ω является деревом, такой путь является единственным. Рассмотрим все пути, соединяющие s с другими вершинами в V' . Все эти пути индуцируют согласованные между собой направления. Следовательно, мы можем индуцировать общее направление для Ω . Рассмотрим функцию $\gamma_{\Gamma, \Omega}(e)$ в том же виде, как мы использовали ее ранее Ω .

Определим $C_s = 0$, $C_v = \sum_{e \in p(s, v)} \gamma_{\Gamma, \Omega}(e) \cdot \bar{\tau}_e$. Для любой вершины v существует уникальный маршрут $p(s, v)$, так что C_v определяется однозначно. Для всех вершин $e \in E\Omega$, $e = (v, u)$ положим $\tau_e^{eq} = C_u - C_v$. Покажем, что построенный вектор τ^{eq} является допустимым и удовлетворяет условию равновесия.

Сначала покажем, что выполнены условия равновесия. Это значит, что для всех маршрутов, используемых в равновесии, индуцированные данным вектором издержки на маршрутах равны между собой и не превышают издержек на неиспользуемых путях.

По построению, для любого маршрута $p \in P$ из s в t выполнено $C_p(\tau^{eq}) = C_t$. Также известно, что при выборе дополняющего пути ассоциированные с ним издержки равны C_t . Но мы выбрали f^{eq} как решение задачи о потоке минимальной стоимости, следовательно, не существует маршрутов, имеющих стоимость ниже C_t и не используемых в равновесии.

Для всех $e \in \Omega$ известно, что $f_e^{eq} < \bar{f}_e$, следовательно, требуется показать, что $\tau_e^{eq} = \bar{\tau}_e$, что выполнено по построению.

Для всех $e \notin \Omega$ известно, что $f_e^{eq} = \bar{f}_e$, следовательно, требуется показать, что $\tau_e^{eq} \geq \bar{\tau}_e$.

Рассмотрим произвольное ребро $e = (v, u)$ с исходным направлением из v в u . Это ребро используется в маршруте, который реализует решение задачи о потоке минимальной стоимости, то есть существует маршрут $p \in P$ такой, что $C_t^p(\bar{\tau}) \leq C_t$. Без потери общности можно считать, что $e \in \Omega$ для всех ребер $e \neq (v, u)$. Но $C_t = C_t^p(\tau^{eq})$. Следовательно, $C_t^p(\bar{\tau}) \leq C_t^p(\tau^{eq})$, откуда $\tau_e^{eq} \geq \bar{\tau}_e$.

Тогда (f^{eq}, τ^{eq}) является равновесием. f^{eq} определяется однозначно, так как существует (и при этом единственный) дополняющий путь из s в t . Вектор τ^{eq} определяется однозначно по построению. \square

Теперь мы можем доказать еще одну ключевую теорему.

Теорема 4. Пусть (f^{eq}, τ^{eq}) является единственным равновесием для конфигурации $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), d_{st})$, а k является дополняющим путем в остаточной сети. Тогда

$$C^{(t)}(\tau^{eq}) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{\Gamma^{eq}, k}((i, i+1)) \cdot \bar{\tau}_{(i, i+1)}.$$

Доказательство. Из теоремы 3 нам известно, что если равновесие единственно, то существует единственный дополняющий путь k из s в t в остаточной сети. Из теоремы 1 нам известно, что

$$C^{(t)}(\tau^{eq}) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{\Gamma^{eq}, k}((i, i+1)) \cdot \tau_{(i, i+1)}^{eq}.$$

Но для всех $e \in k$ $\tau_e^{eq} = \bar{\tau}_e$, так как $0 < f_e^{eq} < \bar{f}_e$.

Следовательно,

$$C^{(t)}(\tau^{eq}) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{\Gamma^{eq}, k}((i, i+1)) \cdot \bar{\tau}_{(i, i+1)}.$$

\square

Поиск неэффективных ребер

Из известной работы Роугардена известно [Roughgarden, 2006], что задача

$$\min_{E' \subseteq E} \langle f^{eq}, \tau^{eq} \rangle$$

является NP-трудной. Здесь (f^{eq}, τ^{eq}) — равновесие в конфигурации, в которой используется подграф исходного графа Γ с множеством ребер E' .

Более того, в общем случае не существует аппроксимационного алгоритма для данной задачи, который давал бы приближенное решение данной задачи, лучшее, чем тривиальное. Единственный относительно позитивный результат был получен в статье [Fotakis, Karotis, Spirakis, 2012] для случая строго возрастающих линейных весовых функций в модели Бекмана.

Рассмотрим проблему установки плат за проезд по ребрам с целью снижения загрузки переполненных ребер. Мы можем определить операцию установки платы ϵ на ребре $e \in E$ как отображение $\bar{\tau}_e \rightarrow \bar{\tau}_e + \epsilon$. Заметим, что процедура удаления ребра эквивалентна процедуре установки запретительно больших плат.

Рассмотрим чувствительность $\langle f^{eq}, \tau^{eq} \rangle$ к $\bar{\tau}_e$ в конфигурации с единственным источником и стоком, т. е. с единственной корреспонденцией.

Теорема 5. Пусть (f^{eq}, τ^{eq}) является единственным равновесием для конфигурации $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), d_{st})$, а k является дополняющим путем в остаточной сети. Тогда выполняется

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_e} \langle f^{eq}, \tau^{eq} \rangle = d_{st} \cdot \gamma_{\Gamma^{eq}, k}(e).$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 4.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_e} \langle f^{eq}, \tau^{eq} \rangle &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_e} (d_{st} \cdot T_{st}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_e} (d_{st} \cdot C^{(t)}(\tau^{eq})) = d_{st} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_e} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{\Gamma^{eq}, k}((i, i+1)) \cdot \bar{\tau}_{(i, i+1)} \right) = d_{st} \cdot \gamma_{\Gamma^{eq}, k}(e). \end{aligned}$$

Из нее следует, что только те дуги, которые относятся к дополняющему пути, имеют значение. Более того, если $\gamma_{\Gamma^{eq}, k}(e) = 1$, тогда установка небольшой платы на ребре e увеличит издержки для каждого агента в системе. С другой стороны, введение небольшой платы для ребра e , обладающего свойством $\gamma_{\Gamma^{eq}, k}(e) = -1$, приведет к снижению издержек в равновесии для каждого агента в системе.

Это приводит к алгоритму поиска неэффективных ребер для конфигураций с одной парой «источник – сток».

1. Вычислить равновесие (f^{eq}, τ^{eq}) (например, используя [Anikin, Dorn, Nesterov, 2019; Гасников и др., 2016]) для конфигурации $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), d)$.

2. Построить дополняющий путь k .

3. Найти все $e \in k$, такие, что $\gamma_{\Gamma^{eq}, k}(e) = -1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Удаление потенциально неэффективного ребра может приводить к обратному эффекту. Это связано с тем, что пропускная способность графа в связи с удалением ребра может снизиться.

К сожалению, такая ситуация может наблюдаться даже для случая конфигурации с одной парой «источник – сток». Удаление ребер с $\gamma_{\Gamma^{eq}, k}(e) = -1$ может снизить пропускную способность графа.

Расширение алгоритма для ситуации со многими парами «источник – сток» нетривиально, так как ребро может влиять неоднозначно для различных корреспонденций.

Для этого требуется как-то учесть неоднозначное влияние ребра. Мы предлагаем самый прямой из возможных подходов, а именно, оценивать

$$\widehat{\gamma}(e) = \sum_{(s,t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{D}} d_{st} \times \gamma_{\Gamma_{st}^{eq}, k_{st}}(e).$$

Также легко построить пример (хотя вряд ли такое можно наблюдать в жизни), когда влияние могут оказывать ребра с нулевым потоком.

Приведем пример такой конфигурации: $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, $d_{13} = 1$, $d_{23} = 1$, $\bar{f}_{23} = d_{23}$, $\bar{\tau}_{13} > \bar{\tau}_{12} + \bar{\tau}_{23}$, пропускные способности ребер (1, 2) и (1, 3) можем считать сколь угодно большими. В силу ограничений поток по ребру (1, 2) равен нулю, так как ребро (2, 3) полностью занято корреспонденцией d_{23} . Однако стоимость проезда по ребру (2, 3) из условий равновесия равна $\bar{\tau}_{13} - \bar{\tau}_{12}$, то есть определяется в том числе ребром (1, 2).

Чтобы учесть эту возможность, требуется рассматривать не только пути, используемые корреспонденцией, но и все другие пути, стоимость которых равна равновесной (меняется список ребер и вершин в Γ^{eq}).

Алгоритм поиска неэффективных ребер.

- Решается задача поиска потока минимальной стоимости:

$$\min_{f, f_a} \left\{ \langle f, \bar{\tau} \rangle \mid f \leq \bar{f}, \sum_{e=(u,v) \in E} f_e - \sum_{(v,u) \in E} f_e = d_v, v \in V, f \geq 0 \right\}$$

(любым подходящим графовым алгоритмом или солвером для ЛП).

- Зная загрузку, восстановить значения T_{si} , используя незагруженные ребра в дополняющей сети.
- Выполнять, пока не будет вычислено τ для всех ребер.
 - Для каждого ребра (i, j) введем множество активных источников $\mathcal{S}_{ij} = \{s \in \mathcal{S} : T_{sj} \text{ и } T_{si} \text{ определены}\}$.
 - Пересчитать равновесные стоимости ребер $\tau_{ij} = \max \left\{ \bar{\tau}_{ij}, \max_{s \in \mathcal{S}_{ij}} \{T_{sj} - T_{si}\} \right\}$, для которых существует такое s , что T_{si} и T_{sj} известны.
 - Пересчитать T_{si} , зная τ .
- Для каждого стока $s \in \mathcal{S}$ найти остаточную сеть (включая активные ребра с нулевым потоком). Определить $\widehat{\gamma}(e)$.
- Объявить все ребра $e \in E : \widehat{\gamma}(e) < 0$ неэффективными.

Численные эксперименты

Рассматривалась транспортная сеть города Анахайма (Anaheim) ($n = 416$, $m = 914$, $|\mathcal{S}| = 34$) из популярной коллекции транспортных сетей [Stabler, Bar-Gera, Sall, 2018]. Исходная конфигурация создавалась для моделирования в контексте модели Бекмана и требовала изменения, так как исходные параметры сети не позволяли пропустить всю корреспонденцию. Для этого все исходные корреспонденции $\{d_{ij}^{\text{nominal data}}\}$ были изменены. Все расчеты делались для конфигурации с матрицей корреспонденций $\{d_{ij}\} = 0,51 \cdot \{d_{ij}^{\text{nominal data}}\}$ (других изменений не вводилось).

Результаты расчета представлены на рис. 1. В приведенном примере 22 из 914 ребер оказались неэффективными. Изменение минимальной стоимости проезда только по 6 ребрам позволило снизить суммарные издержки всех водителей на 0,2%.

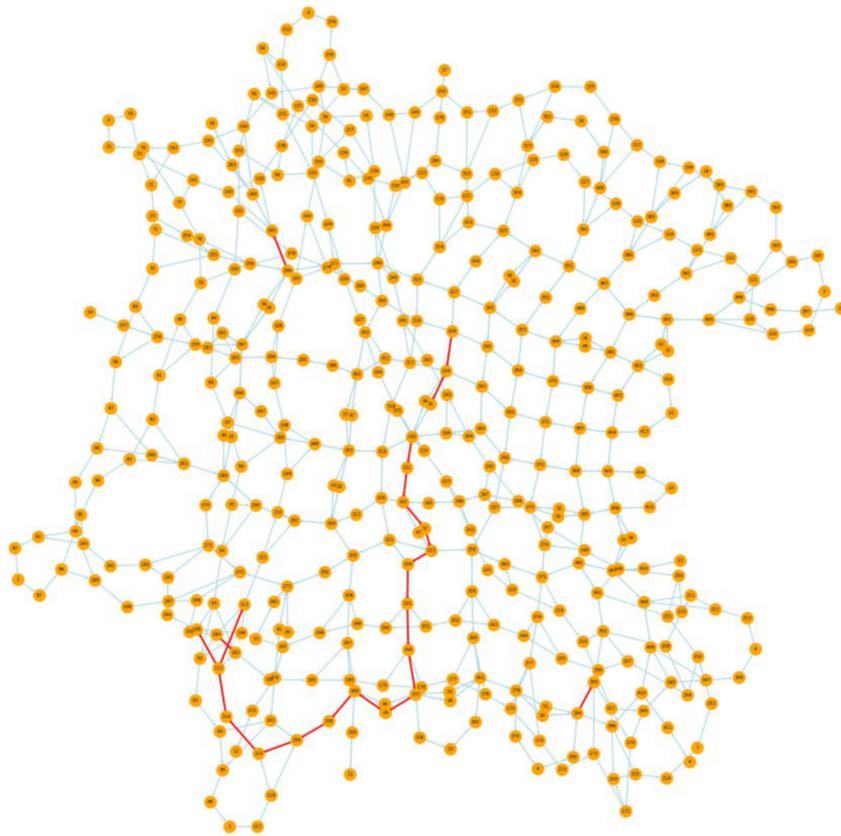


Рис. 1. Неэффективные ребра (отмечены красным) в городе Анахайме: незначительное увеличение стоимости любого из красных ребер приводит к снижению суммарных издержек водителей

Заключение

Как мы видим, парадокс Браесса имеет смысл рассматривать только в контексте всей конфигурации сети, а рассмотрение без учета матрицы корреспонденций не имеет смысла.

Модель стабильной динамики, в случае единственности равновесия, позволяет строить алгоритмы для эффективного поиска ребер с отрицательными экстерналиями. Один из возможных алгоритмов мы привели в статье и продемонстрировали его эффективность на примере транспортной сети города Анахайма.

Мы предполагаем, что вычислительная эффективность алгоритма может быть в дальнейшем улучшена.

Отдельный интерес может представлять программное управление сетью. Для ситуаций, когда используются не платы на дороги, а ситуативные меры управления (например, закрытие отдельных зон, платные парковки или другие средства), при наличии средств оперативной оценки матриц корреспонденций, можно заранее предрасчитать, при каких матрицах стоит включать и отключать ограничения.

Список литературы (References)

- Гасников А. В., Двуреченский П. Е., Дорн Ю. В., Максимов Ю. В. Численные методы поиска равновесного распределения потоков в модели Бэкмана и в модели стабильной динамики // Математическое моделирование. — 2016. — Т. 28, № 10. — С. 40–64.
- Gasnikov A., Dvurechensky P., Dorn Yu., Maximov Yu.* Chislennyye metody poiska ravnovesnogo raspredeleniya potokov v modeli Bekmana i v modeli stabil'noi dinamiki [Numerical methods for the problem of traffic flow equilibrium in the Beckmann and the stable dynamic models] // Mat. Model. — 2016. — Vol. 28, No. 10. — P. 40–64 (in Russian).

- Гасников А. В., Дорн Ю. В., Нестеров Ю. Е., Шпирко С. В.* О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 6. — С. 34–70.
Gasnikov A., Dorn Yu., Nesterov Yu., Shpirko S. O trekhstadiinoi versii modeli statsionarnoi dinamiki transportnykh potokov [On the three-stage version of stable dynamic model] // Mat. Model. — 2014. — Vol. 26, No. 4. — P. 34–70 (in Russian).
- Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. Б.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. А. В. Гасникова с приложениями М. Л. Бланка, К. В. Воронцова и Ю. В. Чеховича, Е. В. Гасниковой, А. А. Замятина и В. А. Малышева, А. В. Колесникова, Ю. Е. Нестерова и С. В. Шпирко, А. М. Райгородского, с предисловием руководителя департамента транспорта г. Москвы М. С. Ликсусова. — М.: МЦНМО, 2013. — 2-е изд. — 427 с.
Gasnikov A. V., Klenov S. L., Nurminskii E. A., Kholodov Ya. A., Shamrai N. B. Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov [Introduction to mathematical modeling of transport flows]. — Moscow: MCNMO, 2013. — 427 p. (in Russian).
- Дорн Ю. В.* Поиск неэффективных ребер в транспортных сетях // Труды Московского физико-технического института. — 2014. — Т. 6, № 1 (21). — С. 162–168.
Dorn Yu. Poisk neeffektivnykh reber v transportnykh setyakh [Numerical methods for the problem of traffic flow equilibrium in the Beckmann and the stable dynamic models] // Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology. — 2014. — Vol. 6, No. 1 (21). — P. 162–168 (in Russian).
- Acemoglu D., Makhdoumi A., Malekian A., Ozdaglar A.* Informational Braess' paradox: The effect of information on traffic congestion // Operations Research. — 2018. — Vol. 66, No. 4. — P. 893–917.
- Anikin A., Dorn Yu., Nesterov Yu.* Computational methods for the stable dynamic model // International Conference on Optimization and Applications. — Cham: Springer International Publishing, 2019. — P. 280–294.
- Anshelevich E., Dasgupta A., Tardos E., Wexler T.* Near-optimal network design with selfish agents // Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing. — 2003. — P. 511–520.
- Askoura Y., Lebacque J., Haj-Salem H.* Optimal sub-networks in traffic assignment problem and the Braess paradox // Computers and Industrial Engineering. — 2011. — Vol. 61, No. 2. — P. 382–390.
- Bagloee S., Ceder A., Sarvi M., Asadi M.* Is it time to go for no-car zone policies? Braess paradox detection // Transportation research part A: policy and practice. — 2019. — Vol. 121. — P. 251–264.
- Beckmann M., McGuire B., Winsten C.* Studies in the economics of transportation. — 1956. — 226 p.
- Bittihn S., Schadschneider A.* The effect of modern traffic information on Braess' paradox // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2021. — Vol. 571. — P. 125829.
- Braess D.* Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung // Unternehmensforschung. — 1968. — Vol. 12. — P. 258–268 (in German).
- Braess D., Nagurney A., Wakolbinger T.* On a paradox of traffic planning // Transportation science. — 2005. — Vol. 39, No. 4. — P. 446–450.
- Epstein A., Feildman M., Mansour Y.* Efficient graph topologies in network routing games // Games and Economic Behavior. — 2009. — Vol. 66, No. 1. — P. 115–125.
- Fotakis D., Kaporis A., Spirakis P.* Efficient methods for selfish network design // Theoretical Computer Science. — 2012. — Vol. 448. — P. 9–20.
- Frank M.* The Braess paradox // Mathematical Programming. — 1981. — Vol. 20, No. 1. — P. 283–302.
- Ma J., Li D., Cheng L., Lou X., Sun C., Tang W.* Link restriction: Methods of testing and avoiding Braess paradox in networks considering traffic demands // Journal of Transportation Engineering, Part A: Systems. — 2018. — Vol. 144, No. 2. — P. 04017076.
- Milchtaich I.* Network topology and the efficiency of equilibrium // Games and Economic Behavior. — 2006. — Vol. 57, No. 2. — P. 321–346.
- Milchtaich I.* Topological conditions for uniqueness of equilibrium in networks // Mathematics of Operations Research. — 2005. — Vol. 30, No. 1. — P. 225–244.

- Nash J.* Non-cooperative games // *Annals of mathematics*. — 1951. — P. 286–295.
- de Palma A., Nesterov Yu.* Stationary dynamic solutions in congested transportation networks: summary and perspectives // *Networks and spatial economics*. — 2003. — Vol. 3. — P. 371–395.
- Park K.* Detecting Braess paradox based on stable dynamics in general congested transportation networks // *Networks and Spatial Economics*. — 2011. — Vol. 11. — P. 207–232.
- Rapoport A., Kugler T., Dugar S., Gisches E.* Choice of routes in congested traffic networks: Experimental tests of the Braess paradox // *Games and Economic Behavior*. — 2009. — Vol. 65, No. 2. — P. 538–571.
- Roughgarden T.* On the severity of Braess’s paradox: Designing networks for selfish users is hard // *Journal of Computer and System Sciences*. — 2006. — Vol. 72, No. 5. — P. 922–953.
- Roughgarden T.* Selfish routing and the price of anarchy. — MIT press, 2005.
- Roughgarden T., Tardos E.* How bad is selfish routing? // *Journal of the ACM (JACM)*. — 2002. — Vol. 49, No. 2. — P. 236–259.
- Schäfer B. et al.* Understanding Braess’ paradox in power grids // *Nature Communications*. — 2022. — Vol. 13, No. 1. — P. 5396.
- Stabler B., Bar-Gera H., Sall E.* Transportation networks for research // 2018. — <https://github.com/bstabler/TransportationNetworks>
- Valiant G., Roughgarden T.* Braess’s paradox in large random graphs // *Proceedings of the 7th ACM conference on Electronic commerce*. — 2006. — P. 296–305.
- Vickrey W.* Pricing in urban and suburban transport // *The American Economic Review*. — 1963. — Vol. 53, No. 2. — P. 452–465.
- Wardrop J., Whitehead J.* Correspondence some theoretical aspects of road traffic research // *Proceedings of the institution of civil engineers*. — 1952. — Vol. 1, No. 5. — P. 767–768.
- Zverovich V., Avineri E.* Braess’ paradox in a generalised traffic network // *Journal of Advanced Transportation*. — 2015. — Vol. 49, No. 1. — P. 114–138.