

УДК: 330.42, 517-2

Пространственно-временные модели распространения информационно-коммуникационных технологий

М. Г. Дубинина

Центральный экономико-математический институт Российской академии наук,
Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский пр., д. 47

E-mail: mgdub@yandex.ru

*Получено 06.09.2023, после доработки — 26.09.2023.
Принято к публикации 27.09.2023.*

В статье предложен пространственно-временной подход к моделированию диффузии информационно-коммуникационных технологий на основе уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова, в котором кинетика диффузии описывается моделью Басса, широко применяемой для моделирования распространения инноваций на рынке. Для этого уравнения изучены его положения равновесия и на основе сингулярной теории возмущений получено приближенное решение в виде бегущей волны, т. е. решение, которое распространяется с постоянной скоростью, сохраняя при этом свою форму в пространстве. Скорость волны показывает, на какую величину за единичный интервал времени изменяется пространственная характеристика, определяющая данный уровень распространения технологии. Эта скорость существенно выше скорости, с которой происходит распространение за счет диффузии. С помощью построения такого автоволнового решения появляется возможность оценить время, необходимое субъекту исследования для достижения текущего показателя лидера.

Полученное приближенное решение далее было применено для оценки факторов, влияющих на скорость распространения информационно-коммуникационных технологий по федеральным округам Российской Федерации. В качестве пространственных переменных для диффузии мобильной связи среди населения рассматривались различные социально-экономические показатели. Полосы роста, в которых возникают инновации, обычно характеризуются наивысшими значениями пространственных переменных. Для России таким полюсом роста является Москва, поэтому в качестве факторных признаков рассматривались показатели федеральных округов, отнесенные к показателям Москвы. Наилучшее приближение к исходным данным было получено для отношения доли затрат на НИОКР в ВРП к показателю Москвы, среднего за период 2000–2009 гг. Было получено, что для УФО на начальном этапе распространения мобильной связи отставание от столицы составило менее одного года, для ЦФО, СЗФО — 1,4 года, для ПФО, СФО, ЮФО и ДВФО — менее двух лет, для СКФО — немногим более двух лет. Кроме того, получены оценки времени запаздывания распространения цифровых технологий (интранета, экстранета и др.), применяемых организациями федеральных округов РФ, относительно показателей Москвы.

Ключевые слова: диффузия инноваций, бегущая волна, пространственно-временная модель, мобильная связь, информационно-коммуникационные технологии

UDC: 330.42, 517-2

Spatio-temporal models of ICT diffusion

M. G. Dubinina

Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences,
47 Nakhimovsky pr., Moscow, 117418, Russia

E-mail: mgdub@yandex.ru

*Received 06.09.2023, after completion – 26.09.2023.
Accepted for publication 27.09.2023.*

The article proposes a space-time approach to modeling the diffusion of information and communication technologies based on the Fisher–Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equation, in which the diffusion kinetics is described by the Bass model, which is widely used to model the diffusion of innovations in the market. For this equation, its equilibrium positions are studied, and based on the singular perturbation theory, was obtained an approximate solution in the form of a traveling wave, i. e. a solution that propagates at a constant speed while maintaining its shape in space. The wave speed shows how much the “spatial” characteristic, which determines the given level of technology dissemination, changes in a single time interval. This speed is significantly higher than the speed at which propagation occurs due to diffusion. By constructing such an autowave solution, it becomes possible to estimate the time required for the subject of research to achieve the current indicator of the leader.

The obtained approximate solution was further applied to assess the factors affecting the rate of dissemination of information and communication technologies in the federal districts of the Russian Federation. Various socio-economic indicators were considered as “spatial” variables for the diffusion of mobile communications among the population. Growth poles in which innovation occurs are usually characterized by the highest values of “spatial” variables. For Russia, Moscow is such a growth pole; therefore, indicators of federal districts related to Moscow’s indicators were considered as factor indicators. The best approximation to the initial data was obtained for the ratio of the share of R&D costs in GRP to the indicator of Moscow, average for the period 2000–2009. It was found that for the Ural Federal District at the initial stage of the spread of mobile communications, the lag behind the capital was less than one year, for the Central Federal District, the Northwestern Federal District – 1.4 years, for the Volga Federal District, the Siberian Federal District, the Southern Federal District and the Far Eastern Federal District – less than two years, in the North Caucasian Federal District – a little more 2 years. In addition, estimates of the delay time for the spread of digital technologies (intranet, extranet, etc.) used by organizations of the federal districts of the Russian Federation from Moscow indicators were obtained.

Keywords: diffusion of innovations, traveling wave, spatio-temporal model, mobile communications, information and communication technologies

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 6, pp. 1695–1712 (Russian).

Введение

В области социальных наук понятие диффузии часто ассоциируется с понятием инноваций. Многие диффузионные модели относятся к классу моделей распространения эпидемий и могут использоваться для объяснения того, как инновации распространяются во времени, с какой скоростью и что может их остановить.

Однако существует и направление, рассматривающее пространственное распространение инноваций из области высокой плотности принятия новшества в область низкой плотности в результате взаимодействия между принявшими и не принявшими инновацию субъектами.

Выделяют три пространственные модели распространения: волна инноваций, иерархический эффект и эффект соседства (см., например, [Brown, 1981; Morrill, Gaile, Thrall, 1988]). Иерархический эффект наблюдается, когда инновация распространяется сначала на крупные города и находящиеся рядом с ними города среднего размера, а затем на небольшие города и сельские районы. Волновой эффект возникает, когда потенциал для инноваций перетекает из областей с высоким потенциалом в области с низким потенциалом. В более поздних исследованиях большое внимание было уделено основным критическим факторам, благоприятствующим диффузионным и инновационным процессам, таким как интенсивность знаний, капиталоемкость, доступность рынка, организационные и логистические структуры [Nijkamp, Reggiani, 1993].

Пространственно-временные модели, называемые также моделями типа «реакция – диффузия», применяются для описания многих явлений в химии, биологии, экологии и других областях, в которых некоторое возмущение выводит систему из состояния равновесия, вызывает процесс развития, сопровождающийся появлением бегущей волны различной природы (концентрации химического вещества, электрического сигнала, потока энергии и т. д.). Эти бегущие волны могут влиять на изменения системы намного быстрее, чем прямые диффузионные процессы, и сопровождают процесс диффузии. Например, в теории горения процесс сопровождается массо- и теплообменом с окружающей средой, в биологии скорость физико-химических процессов в живых организмах, как правило, является наиболее медленной стадией процесса, в то время как биохимические реакции протекают быстрее [Murray, 2002].

Обзор литературы

Первые модели диффузии инноваций были динамическими. Процесс распространения технологий обычно моделируется двумя функциями, описывающими кумулятивное и некумулятивное распространение продукта. Кумулятивная функция $Y(t)$ представляет собой общее количество принявших технологию к моменту времени t . Ее производная в период t , обозначаемая как $y(t)$, представляет собой количество новых пользователей технологии в период t . Предполагается, что если кумулятивное число принявших инновацию нанести на график в зависимости от времени, то получится S-образная кривая (см., например, статьи Гриллекса [Griliches, 1957], Д. Сахала [Sahal, 1981], А. Е. Варшавского [Варшавский, 1984]). Из всех видов S-образных кривых наиболее часто используются модели Басса [Bass, 1969], логистическая (или кривая Перла – Рида) и модель Гомпертца [Дубинина, 2015]. Модель Басса имеет вид

$$\frac{dY}{dt} = \left(p + \frac{q}{M} Y \right) (M - Y), \quad (1)$$

где $\frac{dY}{dt}$ — число новых покупателей продукта в момент t , $Y(t)$ — общее количество приобретших продукт к моменту времени t (накопленная сумма), M — максимально возможное число потенциальных покупателей продукта, p — коэффициент инновации, q — коэффициент имитации. В основе модели лежит предположение, что распространение продукта на рынке объясняется эффектом рекламы и эффектом межличностной коммуникации.

Позднее появились модели пространственной диффузии, которые были основаны исключительно на влиянии расстояния на диффузионный процесс. Это направление исследований основывалось на том, что, как правило, распространение инноваций идет из инновационного центра в отдаленные регионы. В модели [Mahajan, Peterson, 1979], описывающей распространение тракторов в 25 штатах США, в качестве пространственной переменной было выбрано местоположение штата и предполагалось, что чем дальше находится территория от инновационного центра, тем меньше в нем доля принявших инновацию, т. е. постулировалось существование эффекта соседства в исследовании.

Модель диффузии инноваций, которая учитывала только пространственное распространение, была предложена шведским ученым Т. Хегерстрандом [Hagerstrand, 1967]. В ней предполагалась зависимость скорости распространения нового продукта от эффекта соседа между потенциальными пользователями и уже купившими этот продукт. Автор предположил, что социальный контакт локализован и что диффузия инновации определяется размерами информационного поля ее потенциальных потребителей. В модели предполагалось, что распространение инновации из точек своего происхождения аналогично распространению волны, которая проходит 4 стадии: возникновение, быстрое распространение, замедление и насыщение.

Дальнейшее развитие модели Хегерстранда связано с включением в нее фактора времени. В работе [Morrill, Gaile, Thrall, 1988] в модель была введена дополнительная временная координата и получена волновая модель диффузии нововведений, которая учитывала различие распространения в зависимости от близости территорий к центральным областям страны. По теории авторов, в центре распространения инноваций количество ее последователей будет плавно нарастать со слабовыраженным пиком на четвертый год после начала распространения инновации.

Как отмечается в работе [Nijkamp, Reggiani, 1996], технико-экономическая эволюция и пространственная динамика часто являются взаимосвязанными явлениями, причем под пространственным измерением авторы понимают не только географическое местоположение, но также среду, создающую благоприятные возможности или, наоборот, барьеры для распространения нововведения.

Волновое распространение инноваций, основанное на модели, называемой в физических исследованиях моделью «реакция – диффузия», рассмотрено в работе [Kandler, Steele, 2009]. В ней предложено пространственно-диффузионное расширение эпидемического подхода, позволяющее определить, как неоднородность во внешних экономических факторах может влиять на оптимальные сроки принятия инновации.

Постановка задачи

В основе многих исследований в области моделирования процессов «реакция – диффузия» лежит уравнение вида

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = F(Y) + D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Предполагается, что $F(Y)$ – непрерывная и дифференцируемая функция. В работах Фишера [Fisher, 1937] и Колмогорова, Петровского, Пискунова [Колмогоров, 1937] независимо друг от друга было предложено это уравнение для функции $F(Y)$, определенной на интервале $(0; 1)$, $F(0) = F(1) = 0$, $F(Y) > 0$ при $0 < Y < 1$. Оно предназначалось для описания распространения в некоторой области пространства волны плотности численности популяции доминантного гена от некоторого ненулевого начального значения. Для этого уравнения, называемого уравнением Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова (ФКПП), было показано, что существует

такая переменная $z = x \pm ct$, для которой $Y(x, t) = W(x \pm ct) = W(z)$, и уравнение (2) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка вида

$$\pm c \frac{dW}{dz} = \frac{d^2W}{dz^2} + F(z). \quad (3)$$

Такое уравнение при выполнении определенных условий имеет решение в виде бегущей волны. Бегущей волной называется решение уравнения в частных производных, которое распространяется с постоянной скоростью, сохраняя при этом свою форму в пространстве [Shcherakina, Sobolev, Zhang, 2019]. С физической точки зрения бегущие волны обычно описывают переход от одного состояния равновесия к другому, зависящий от свойств самой среды. К основным вопросам теории бегущих волн относятся проблема существования волн, их устойчивость по отношению к малым возмущениям и глобальная стабильность, определение их скорости [Вольперт, 1990].

В работах В. М. Полтеровича и Г. М. Хенкина [Полтерович, Хенкин, 1988; Полтерович, 2017] при описании эволюции эффективности фирм в процессе создания и заимствования технологий был получен дифференциально-разностный аналог уравнения Фишера – Колмогорова:

$$\frac{dF_n}{dt} = -\alpha(F_n - F_{n-1}) - \beta(1 - F_n)(F_n - F_{n-1}),$$

где F_n — доля фирм с уровнем эффективности не больше n , α и β — доля фирм, переходящих на уровень n в интервале $[t - 1, t]$ в результате инноваций и заимствования технологий. Решением дифференциально-разностного уравнения (3) является волновая функция

$$F_n(t, A) = \frac{1}{1 + A\alpha(\alpha + \beta)^{-n}e^{-\beta t}}, \quad (4)$$

где A — параметр, зависящий от начальных условий [Полтерович, Хенкин, 1988].

Авторами указывается на то, что распределение фирм по эффективности движется в направлении роста эффективности с почти постоянной скоростью, что позволяет сделать вывод о существовании бегущей волны. Такой подход позволил объединить логистическую временную зависимость распространения технологий между фирмами и устойчивую пространственную форму распределения производства по уровням эффективности.

Модель диффузии, учитывающая эффект влияния межличностного общения и экономического неравенства на темпы распространения инноваций во времени и пространстве, предложена в работе [Kandler, Steele, 2009]. Авторы показали, что зависимость от экономического неравенства может быть учтена с помощью пространственно-временных диффузионных моделей. При этом параметр диффузии D может быть интерпретирован как среднее значение информационного поля, возникающего в результате социального взаимодействия населения разных регионов.

Модели «реакция – диффузия» стали применяться также для описания социальных процессов, где культурные атрибуты как бы конкурируют за свою группу людей (см., например, работы [Kandler, 2009; Walters, 2014] и др.).

Свойства бегущей волны

Основной вопрос, касающийся изучения диффузии с пространственной точки зрения, заключается в том, может ли дополнительная информация о пространственных аспектах диффузии помочь в прогнозировании и анализе.

В многочисленных исследованиях было показано, что существование и свойства бегущих волн уравнения (2) во многом определяются свойствами функции $F(Y)$. Наиболее изученным и используемым видом функции является логистическая форма [Fife, 1979]:

$$F(Y) = k \cdot Y \cdot (1 - Y).$$

Так, начально-краевая задача для одномерного квазилинейного уравнения Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова (ФКПП) имеет вид

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + aY - bY^2,$$

где t — время, x — пространственная переменная, D — коэффициент диффузии, $a = a(x, t)$ — коэффициент прироста бактерий, $b = b(x, t)$ — коэффициент конкурентных потерь, Y — искомая кинетическая переменная, начальные условия Дирихле задаются в виде $Y(-l, t) = Y(l, t) = 0$, $t \in (0, T]$, $x \in (-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ [Ильина, 2023].

Решение уравнения (2) вида $Y(x, t) = W(x \pm ct) = W(z)$ устанавливает связь между временной и пространственной координатами и называется автоволновым решением. Оно обладает тем свойством, что при изменении t форма кривой, изображающей зависимость $W(z)$, не меняется, а сама эта кривая перемещается со скоростью c . При этом скорость распространения волны в пространстве существенно больше, чем скорость, с которой происходит распространение за счет диффузии [Фурсова, Тёрлова, Ризниченко, 2014].

В работе [Ablowitz, Zeppetella, 1979] для некоторых специальных случаев найдено точное решение уравнения ФКПП. Авторами получено, что минимальная скорость волны зависит от значений параметров, используемых в модели. Если диффузия умеренно нелинейна, то метод собственных значений правильно предсказывает минимальную скорость волны, но при сильной нелинейности этот метод дает неверный ответ.

Приближенное решение волнового уравнения специального вида

Распространение инноваций является результатом творческой, адаптивной стратегии экономических субъектов. Однако условия для создания, принятия и адаптации инноваций неравномерно распределены в пространстве: социокультурные, географические, экономические, политические факторы оказывают влияние на распространение новых технологий, создавая благоприятные условия для их распространения или, наоборот, барьеры, препятствующие процессу диффузии (например, высокие расходы на внедрение инновации).

Пространственно-временные модели диффузии в данной работе применяются для изучения распространения информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), которые характеризуются индивидуальными траекториями в течение своего жизненного цикла. Диффузия ИКТ тоже может рассматриваться как волновой процесс, который направлен от стран с высоким уровнем доходов населения в сторону стран с низким уровнем дохода (рис. 1).

Согласно [Васильев, Романовский, Яхно, 1987] автоволновые процессы могут возникать в сообществе живых особей, когда наблюдается, помимо обычной, взаимная диффузия. Такие системы могут быть неоднородными. Другой подход основан на рассмотрении потока частиц, движение которых происходит от точек с большей величиной плотности к областям с меньшим значением этого показателя [Братусь, Новожилов, Платонов, 2010].

По мнению ряда исследователей, инновации могут распространяться в пространстве посредством расширения ареала их проникновения, причем процесс проникновения на новые территории сопровождается сохранением нововведений на предыдущих территориях (диффузия расширения). Кроме того, при распространении инноваций наблюдается иерархический эффект

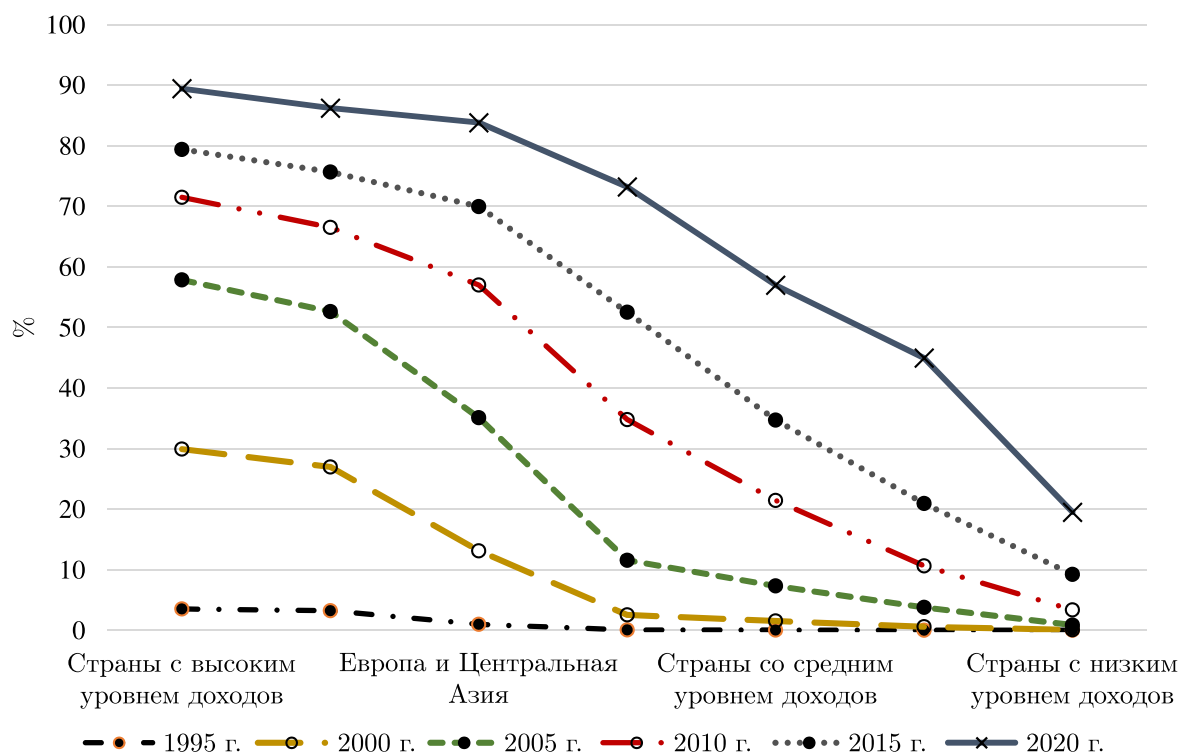


Рис. 1. Динамика распространения интернета по группам стран, количество пользователей на 100 человек населения [The World Bank, 2023]

(из крупных центров в центры среднего размера, затем в малые города и сельскую местность) и эффект соседства. Поток инноваций непрерывен в пространстве и времени и пропорционален градиенту коэффициента их принятия на данной территории [Shinohara, 2012]. Такие предположения приводят к общему виду уравнения (2).

Особенностью пространственно-временной модели, представленной в данной работе, является то, что в уравнении (2) кинетика диффузии, задаваемая функцией $F(Y)$, описывается моделью Басса (1), адекватно оценивающей процесс инновации. В этом случае пространственно-временная модель имеет вид

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \left(p + q \frac{Y}{M} \right) (M - Y) + D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \tag{5}$$

где D — параметр волны, предполагаемый постоянным, p, q — коэффициенты инновации и имитации соответственно, M — потенциал рынка исследуемой технологии. В качестве пространственной переменной x (характеризующей распределение плотности показателя) рассматриваются различные макроэкономические индикаторы, отражающие степень различия между исследуемыми объектами.

При изучении свойств такого уравнения предполагается, что пространственное измерение волны должно быть безразмерным [Indekeu, Smets, 2017].

Заменой переменных

$$x^* = \frac{x}{\sqrt{MD}}, \quad Y^* = \frac{Y}{M} \tag{6}$$

уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial Y^*}{\partial t} = (p + qY^*)(1 - Y^*) + \frac{\partial^2 Y^*}{\partial x^{*2}}. \tag{7}$$

В дальнейшем будем писать уравнение без $*$. По аналогии с уравнением (2) предполагается, что для (7) существует решение в виде бегущей волны: $z = x \pm ct$. Это приводит к уравнению вида

$$W'' \pm cW' + (p + qW)(1 - W) = 0, \quad (8)$$

где $W(z) = \frac{1}{M} \cdot Y(x, t)$ и $z = x \pm ct$, c — скорость волны.

Замена переменных $V = W'$ сводит (8) к системе уравнений

$$\begin{cases} W' = V, \\ V' = -cV - (p + qW)(1 - W). \end{cases} \quad (9)$$

Положениями равновесия системы (9) являются точки $(-\frac{p}{q}, 0)$ и $(1, 0)$. Цель исследования состоит в определении условий, при которых система (9) имеет решение, удовлетворяющее условиям $W = -\frac{p}{q}$ при $z \rightarrow -\infty$ и $W = 1$ при $z \rightarrow +\infty$.

Положения равновесия нелинейной системы (9) определяются с помощью ее линеаризации (см., например, [Эрроусмит, Плейс, 1986; Понтрягин, 1974]). В этом случае якобиан системы (9) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ p - q + 2qW & -c - \lambda \end{pmatrix}.$$

В положении равновесия $(1, 0)$ собственными значениями системы являются

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-c \pm \sqrt{c^2 + 4(q + p)} \right).$$

Отсюда следует, что $(1, 0)$ является седловой точкой, через которую проходят две траектории. Их уравнения в окрестности этой точки можно записать в виде $V_1 = \lambda_1(W - 1)$ и $V_2 = \lambda_2(W - 1)$. Другое положение равновесия в точке $(-\frac{p}{q}, 0)$ при $c \geq 2\sqrt{q + p}$ является неустойчивым узлом [Murtagh, 2002].

С помощью стандартной сингулярной теории возмущений [Kevorkian, Cole, 1996] строится приближенное решение уравнения (8). В окрестности фронта вводится изменение переменной при $z = 0$, таким образом, что можно найти решение в виде разложения Тейлора при малом параметре $\varepsilon = \sqrt{c}$: $\tau = \frac{z}{c} = \sqrt{\varepsilon}z$. В этом случае уравнение (8) преобразуется в задачу с начальными условиями и ограничениями вида

$$\varepsilon \frac{d^2 g}{d\xi^2} + \frac{dg}{d\xi} + (p + qg)(1 - g) = 0, \quad g(-\infty) = 2, \quad g(\infty) = 0. \quad (10)$$

Решение задачи (10) ищется в виде

$$g = g_0 + \varepsilon g_1 + o(\varepsilon^2). \quad (11)$$

Подстановка (11) в уравнение (10) дает следующее соотношение:

$$\varepsilon \frac{d^2 g_0}{d\xi^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2 g_1}{d\xi^2} + \frac{dg_0}{d\xi} + \varepsilon \frac{dg_1}{d\xi} + p + qg_0 - pg_0 - qg_0^2 + \varepsilon(qg_1 - 2qg_0g_1 - pg_1) - \varepsilon^2 qg_1^2 = 0.$$

Группировка слагаемых без ε определяет уравнение для g_0 :

$$\frac{dg_0}{d\xi} + p + qg_0 - pg_0 - qg_0^2 = 0, \quad (12)$$

решение которого при начальном значении $g_0(0) = \lambda$ имеет вид

$$g_0(\tau) = \frac{(p + \lambda q)e^{(p+q)\tau} - (1 - \lambda)p}{(p + \lambda q)e^{(p+q)\tau} + (1 - \lambda)q}.$$

Слагаемые уравнения (12) с множителем ε дают уравнение

$$\frac{d^2 g_0}{d\xi^2} + \frac{d g_1}{d\xi} + g_1(q - 2qg_0 - p) = 0. \tag{13}$$

Решением уравнения (13) является функция

$$g_1 = \left[\operatorname{Ln} \frac{((p + \lambda q)e^{(p+q)\tau} + (1 - \lambda)q)^2}{(p + q)^2 e^{(p+q)\tau}} + \frac{\mu}{(1 - \lambda)(p + \lambda q)} \right] \frac{(p + \lambda q)(p + q)^2(1 - \lambda)e^{(p+q)\tau}}{((p + \lambda q)e^{(p+q)\tau} + (1 - \lambda)q)^2}.$$

Таким образом, приближенное решение волнового уравнения (10) описывается выражением

$$g(\tau) = \frac{(p + \lambda q)e^{(p+q)\tau} - (1 - \lambda)p}{(p + \lambda q)e^{(p+q)\tau} + (1 - \lambda)q} + \frac{1}{c^2} \left(\left[\operatorname{Ln} \frac{((p + \lambda q)e^{(p+q)\tau} + (1 - \lambda)q)^2}{(p + q)^2 e^{(p+q)\tau}} + \frac{\mu}{(1 - \lambda)(p + \lambda q)} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{(p + \lambda q)(p + q)^2(1 - \lambda)e^{(p+q)\tau}}{((p + \lambda q)e^{(p+q)\tau} + (1 - \lambda)q)^2} \right). \tag{14}$$

Полученное приближенное решение будет использовано в дальнейших расчетах для описания диффузии ИКТ по федеральным округам Российской Федерации.

Пространственно-временные модели диффузии мобильной связи в федеральных округах России

Анализ диффузии ИКТ по федеральным округам Российской Федерации показывает, что лидером по распространению интернета, мобильной связи, широкополосного фиксированного подключения к интернету является Москва (см. табл. 1). Столица лидирует также по показателям доли затрат на НИОКР в ВРП и ВРП на душу населения, поэтому ее научно-технический и экономический потенциал рассматривался в качестве образца для федеральных округов Российской Федерации.

Характер распространения технологии мобильной связи (рис. 2) делает обоснованным пространственно-временной подход к ее моделированию.

В качестве моделируемого показателя для оценки распространения мобильной связи по федеральным округам Российской Федерации использовались данные Росстата по проникновению подвижной радиотелефонной (сотовой) связи на 100 человек населения.

На этом этапе было построено приближенное решение уравнения (8) в виде (14). Волновая переменная $z = x^* - ct$, где c — определяемая постоянная скорость волны, была переведена в первоначальные значения x и t (14), таким образом,

$$z = x^* - ct = \frac{x}{\sqrt{MD}} - c(t - t_0) = \frac{x}{A} - c(t - t_0), \tag{15}$$

где $A = \sqrt{MD}$, откуда $D = \frac{A^2}{M}$.

Таблица 1. Показатели распространения информационно-коммуникационных технологий в регионах России по отношению к показателям Москвы, 2021 г., % (рассчитано по данным [Регионы России, 2022])

Округа Российской Федерации	Телефонная плотность ГТС	Мобильная связь	Количество пользователей интернета	Широкополосное фиксированное подключение к интернету	Мобильное подключение к интернету
Центральный	59,8	78,1	94,2	75,3	86,7
Северо-Западный	48,1	68,0	91,6	64,8	88,5
Приволжский	39,9	55,2	90,0	61,2	74,4
Сибирский	35,5	52,0	88,5	57,3	74,7
Уральский	37,6	57,7	92,5	69,5	78,2
Южный	28,9	53,9	93,4	52,9	70,6
Северо-Кавказский	15,3	34,7	93,4	28,1	52,9
Дальневосточный	38,4	48,0	91,9	49,5	75,1
Российская Федерация	42,5	60,6	92,0	61,7	77,5
Москва	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

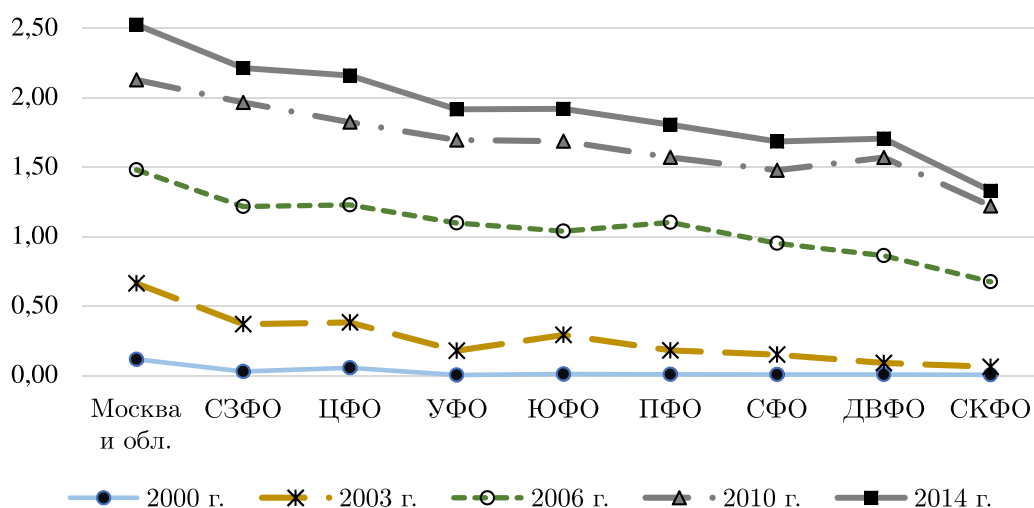


Рис. 2. Динамика распространения мобильной связи по федеральным округам и регионам Российской Федерации, количество пользователей в расчете на 1 жителя, 2000–2014 гг. (по данным [Регионы России, 2022])

Так как приближенное решение волнового уравнения (14) было получено для $Y^* = \frac{Y}{M}$, то расчет производился по формуле

$$\frac{Y(z)}{M} = \frac{(p + \lambda q)e^{(p+q)z} - (1 - \lambda)p}{(p + \lambda q)e^{(p+q)z} + (1 - \lambda)q} + \frac{1}{c^2} \left[\operatorname{Ln} \frac{((p + \lambda q)e^{(p+q)z} + (1 - \lambda)q)^2}{(p + q)^2 e^{(p+q)z}} + \frac{\mu}{(1 - \lambda)(p + \lambda q)} \right] \times \frac{(p + \lambda q)(p + q)^2(1 - \lambda)e^{(p+q)z}}{((p + \lambda q)e^{(p+q)z} + (1 - \lambda)q)^2}, \quad (16)$$

где z задавался формулой (15), а в качестве t_0 брался начальный период распространения технологии ($t_0 = 2000$), в качестве x рассматривались показатели, представленные в табл. 2 (SSE — сумма квадратов разностей между реальными и расчетными значениями). Расчеты параметров моделей проводились с помощью метода нелинейной регрессии пакета Statistica за период 2000–2021 гг.

Таблица 2. Оценки параметров диффузии мобильной связи по федеральным округам Российской Федерации при различных пространственных переменных

Параметры		<i>c</i>	<i>A</i>	<i>M</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>R</i> ²	SSE
Логарифм ВРП на душу населения ФО	значение	-0,265	1,78	2,04	0,180	0,911	0,90	6,31
	t-stat	-8,0	9,9	44,0	4,5	5,3		
ВРП на душу населения ФО / ВРП на душу населения Москвы	значение	-0,49	0,45	2,0	0,45	0,30	0,90	10,2
	t-stat	-31,4	4,9	51,4	24,8	4,3		
Доля затрат на НИОКР в ВРП ФО	значение	-1,359	0,034	1,982	0,464	0,291	0,91	8,2
	t-stat	-2,6	2,3	52,6	28,3	4,6		
Затраты на ИКТ на 1 занятого в ФО	значение	-0,631	1,704	2,181	0,024	0,215	0,89	7,15
	t-stat	-5,2	4,2	24,9	5,7	13,3		
Доля затрат на ИКТ в ВРП ФО, %	значение	-0,512	2,201	1,967	0,498	0,241	0,86	9,01
	t-stat	-20,3	3,4	39,7	9,0	1,3		
Доля городских жителей в общей численности населения ФО, %	значение	-0,373	28,2	2,056	0,320	0,506	0,91	9,1
	t-stat	-21,0	10,2	51,0	15,3	6,7		
Доля инновационно активных организаций в общем числе организаций ФО, %	значение	-0,55	44,1	1,963	0,494	0,23	0,90	11,3
	t-stat	-26,3	0,17	50,0	21,4	2,9		
Доля затрат на НИОКР в ВРП ФО / доля затрат на НИОКР в ВРП Москвы, среднее за период	значение	-0,501	0,67	2,0	0,452	0,271	0,92	6,9
	t-stat	-43,6	7,1	48,6	28,9	4,5		
Доля затрат на НИОКР в ВРП ФО, среднее за период	значение	-0,503	1,47	2,0	0,454	0,269	0,91	8,0
	t-stat	-41,8	6,6	51,0	27,8	4,3		

Согласно результатам расчетов, наилучшее приближение в виде бегущей волны было получено для показателя отношения доли затрат на НИОКР в ВРП к показателю Москвы, среднее за период (см. рис. 3). Наиболее точно были оценены показатели федеральных округов — лидеров и отстающих. Для Уральского ФО модель давала некоторое запаздывание по сравнению с реальными данными, для Северо-Кавказского, наоборот, модельные значения получились выше реальных.

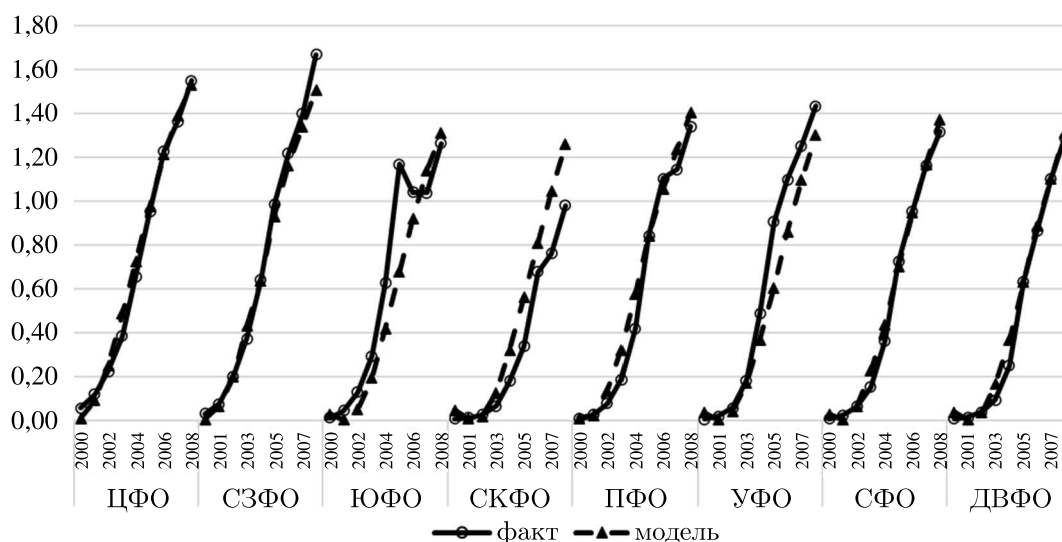


Рис. 3. Распространение мобильной связи по федеральным округам Российской Федерации с пространственной переменной, равной среднему за период отношению доли затрат на НИОКР в ВРП региона к соответствующему показателю Москвы, 2000–2008 гг.

Для ненормализованных пространственных переменных скорость волны c^* определяется произведением cA . По этому показателю максимальное абсолютное значение скорости пространственного распространения достигается для показателя доли инновационно активных организаций в общем числе организаций ФО, % (24,3), а минимальное — для доли затрат на НИОКР в ВРП ФО (0,05).

Скорость волны показывает, на какую величину за единичный интервал изменяется пространственная характеристика, определяющая данный уровень распространения технологии. Полосы роста (см., например, [Логинов, Гойхер, 2015]), в которых возникают инновации, обычно характеризуются наивысшими значениями пространственных переменных. Если в момент времени $t = 0$ в полюсе роста значение пространственной переменной равно x_0 , то в регионе со значением x_1 тот же самый уровень распространения технологии будет достигнут в момент времени

$$t = \frac{x_1 - x_0}{c}. \quad (17)$$

Необходимо отметить, что приближенное решение волнового уравнения (16) было получено для небольшого изменения параметра z , а скорость волны может быть постоянной на начальной стадии распространения технологии. Поэтому в дальнейшем расчеты проводились на более коротком промежутке времени (до 2009 г., см. приложение, табл. П1).

В результате моделирования с использованием формулы (17) получено, что по показателю отношения ВВП ФО к ВВП Москвы, среднего за период, распространение мобильной связи в УФО на начальном этапе отставало менее чем на 1 год, в ЦФО, СЗФО — на 1,4 года, в ПФО, СФО, ЮФО и ДВФО — менее чем на 2 года, в СКФО — немногим более чем на 2 года (см. приложение, табл. П2).

Однако за период 2009–2021 гг. различия в диффузии мобильной связи по федеральным округам России стали значительнее за счет ускоренного развития новых поколений технологий в центральных регионах, поэтому скорость волны, рассчитанная для отношения ВРП ФО к ВРП Москвы, среднего за период, для 2000–2008 гг. оказалась выше, чем для 2009–2021 гг. (0,302 и 0,008 соответственно), следовательно, увеличился временной разрыв между показателями распространения ИКТ в Москве и в федеральных округах Российской Федерации. Например, показатель для Москвы и Московской области в 2 пользователя мобильной связи на 1 жителя региона (2009 г.) был достигнут в СЗФО в 2011 г., в ЦФО — в 2012 г., в УФО — в 2016 г., в ПФО — в 2021 г. В остальных ФО этот показатель пока не достигнут.

Моделирование диффузии ИКТ для организаций федеральных округов

Предыдущие расчеты касались распространения мобильной связи для населения федеральных округов. В то же время большой интерес вызывают факторы, оказывающие влияние на распространение цифровых технологий на предприятиях реального сектора экономики. В современном мире компьютерные и информационные системы является важнейшим условием эффективной работы этих предприятий. Они позволяют кардинально изменить качество управления и ускорить процесс принятия решений на всех уровнях организации, повысить прибыльность, ускорить вывод продукции на рынок.

В данной работе были рассмотрены технологии экстранета, интранета, использование ERP, CRM-систем, облачных технологий, наличие web-сайтов в организациях. Интранет — это частная корпоративная сеть для обмена информацией, упрощения связи, средств совместной работы, операционных систем и других вычислительных услуг внутри организации, обычно исключая доступ посторонних. Экстранет — это также частная корпоративная сеть организации, доступная только избранным пользователям, но при этом она обеспечивает безопасное и контролируемое подключение к третьим сторонам (поставщикам, клиентам и партнерам). Интранет

и экстранет выполняют схожие функции, облегчают обмен информацией и поощряют сотрудничество, предоставляя защищенные каналы связи. Использование ERP- (Enterprise Resource Planning) и CRM-систем (Customer Relationship Management) позволяет автоматизировать процессы внутри организации. Эти системы собирают сведения о клиентах в одну базу, позволяют планировать ресурсы, ставить задачи перед сотрудниками, формировать стратегию развития бизнеса. В 2018 г. в России ERP-системы использовали 22 % организаций, тогда как в Бельгии — 54 %, в Нидерландах — 48 %, Литве — 47 %, Испании — 46 %, Австрии, Дании и Португалии — 40 % [Индикаторы цифровой экономики: 2020].

Наличие web-сайта в интернете позволяет организациям рекламировать свою продукцию, расширять географию поставок, находить новых партнеров и самим делать заказы. В 2018 г. 74–85 % организаций Финляндии, Словении, Нидерландов, Эстонии, Германии размещали на своих web-сайтах каталоги товаров, услуг, прейскуранты продукции. В России этот показатель составлял 29 % [Индикаторы цифровой экономики: 2020]. В 2021 г. он составил 42 %, а среди организаций, имевших свой web-сайт, 55,1 % размещали на нем каталог своих товаров, 48,6 % — сведения о вакансиях, 32,1 % использовали сайт для заказа товаров или их бронирования, 22,9 % — для оплаты заказанных товаров [Росстат, 2023]. Таким образом, цифровые технологии в организациях России развиваются, но масштабы их распространения ниже, чем в странах-лидерах.

В качестве периода исследования был выбран 2010–2019 гг. Пандемия коронавируса оказала существенное влияние на использование ИКТ в организациях, многие программы цифровизации были приостановлены, а затраты на ИКТ сокращены. Поэтому показатели диффузии цифровых технологий в 2020 г. оказались существенно ниже, чем в 2019 г.

Распространение перечисленных выше технологий было оценено в зависимости от следующих пространственных переменных: а) доля затрат на ИКТ в ВРП ФО, средняя за период 2010–2019 гг.; б) отношение доли занятых в ИКТ ФО в общей численности занятых к соответствующему показателю Москвы, среднее за период 2010–2019 гг. Результаты оценки параметров представлены в табл. 3.

Таблица 3. Оценка параметров моделей (16) при различных пространственных переменных для распространения ИКТ на предприятиях ФО Российской Федерации

Технологии	p	q	M	$ c^* $	R^2	SSE
доля затрат на ИКТ в ВРП ФО, средняя за период 2010–2019 гг.						
Инtranет	0,184	0,356	0,589	0,354	0,83	0,074
Экстранет	0,0003	0,227	0,210	0,672	0,83	0,045
Web-сайты, 2003–2019 гг.	0,243	0,338	0,582	0,553	0,92	0,170
Система электронного документооборота	0,107	0,396	0,902	0,446	0,53	0,078
ERP-системы	0,165	0,083	0,505	0,277	0,75	0,028
CRM-системы	0,184	0,142	0,450	0,376	0,87	0,013
отношение доли занятых в ИКТ ФО в общей численности занятых к соответствующему показателю Москвы, среднее за период						
Инtranет	0,174	0,366	0,580	0,077	0,88	0,051
Экстранет	0,178	0,960	0,228	0,177	0,85	0,037
Web-сайты	0,029	0,240	0,390	0,111	0,86	0,073
Система электронного документооборота	0,101	0,395	0,895	0,100	0,59	0,068
ERP-системы	0,168	0,119	0,452	0,072	0,81	0,022
CRM-системы	0,002	0,262	0,208	0,103	0,90	0,010

Полученные оценки свидетельствуют о том, что наиболее высокая абсолютная скорость распространения ИКТ среди предприятий федеральных округов, оцененная по показателю доли

затрат на ИКТ в ВРП ФО, наблюдается для экстранета, при этом его верхний предел распространения является самым низким из рассмотренных цифровых технологий. Медленнее всего распространяются ERP-системы. Если учитывать отставание остальных ФО от ЦФО по показателю, то для достижения этой технологии уровня в 17% (2019 г.) СЗФО потребуется 3,5 года, ПФО, СФО и УФО, ЮФО – около 4 лет, ДВФО – 4,6 лет, СКФО – около 6 лет (при сохранении средних значений доли затрат на ИКТ в ВРП по федеральным округам).

Если в качестве пространственной переменной рассматривать среднее отношение численности специалистов ИКТ в общей численности занятых к такому же показателю по Москве, то полученные оценки дают еще большее временное отставание распространения некоторых цифровых технологий от столичного уровня. Так, например, в 2019 г. в Москве доля организаций, использовавших CRM-системы, составляла 19,5%. Этот показатель мог быть достигнут в ЦФО через 2,5 года, в СЗФО – через 3,6 года, в ПФО и УФО – через 5 лет, в СФО – через 5,1 года, в ДВФО – через 5,7 лет, в ЮФО – через 5,9 года, в СКФО – через 6,8 года (см. табл. 4). Однако пандемия COVID-19 и введенные против России санкции, скорее всего, приведут к большему временному лагу между показателями Москвы и федеральных округов.

Таблица 4. Количество лет запаздывания предприятий федеральных округов от показателей распространения цифровых технологий в Москве

Федеральный округ	Инtranет	Экстранет	Web-сайты	Система электронного документооборота	ERP-системы	CRM-системы
ЦФО	3,3	1,4	2,3	2,5	3,5	2,5
СЗФО	4,8	2,1	3,3	3,7	5,1	3,6
ЮФО	8,0	3,5	5,5	6,1	8,5	5,9
СКФО	9,1	4,0	6,3	7,0	9,8	6,8
ПФО	6,7	2,9	4,7	5,2	7,2	5,0
УФО	6,6	2,9	4,6	5,1	7,1	5,0
СФО	6,8	3,0	4,8	5,3	7,3	5,1
ДВФО	7,6	3,3	5,3	5,9	8,1	5,7

Заключение

В данной работе представлен пространственно-временной подход к моделированию диффузии инноваций. Этот подход предполагает использование уравнения Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова с динамической составляющей в виде модели Басса. Для такой специальной формы уравнения ФКПП получено его приближенное решение с помощью сингулярной теории возмущений, которое затем было использовано для моделирования распространения мобильной связи среди населения федеральных округов России, а также цифровых технологий на предприятиях ФО. В качестве переменных, характеризующих пространственное распределение субъектов, рассматривались следующие показатели: ВРП на душу населения, доля затрат на НИОКР в ВРП, доля затрат на ИКТ предприятий ФО в ВРП, доля городских жителей, доля инновационно активных предприятий в общем количестве предприятий ФО и ряд других. Кроме того, были рассмотрены относительные показатели (по отношению к соответствующему показателю Москвы). Наилучшее приближение к исходным данным для распространения мобильной связи среди населения было получено для отношения доли затрат на НИОКР в ВРП ФО к соответствующему показателю Москвы, среднему за период 2000–2009 гг., а также для отношения ВРП на душу населения к соответствующему показателю Москвы.

Для моделирования распространения цифровых технологий на предприятиях ФО РФ в качестве пространственных переменных рассматривались доля затрат на ИКТ в ВРП ФО и отношение доли занятых в ИКТ ФО в общей численности занятых к соответствующему показателю Москвы, средние за период 2010–2019 гг. За указанный промежуток времени были оценены параметры волнового уравнения (16) и рассчитано время запаздывания распространения цифровых технологий в федеральных округах РФ относительно показателей Москвы.

Таким образом, пространственно-временные модели распространения инноваций могут применяться для прогнозирования диффузии ИКТ в нескольких субъектах исследования на начальных этапах развития технологий. С их помощью можно оценить потенциальный разрыв между субъектами-лидерами и отстающими и принять меры для сокращения этого разрыва. При этом необходимо учитывать, что пространственные характеристики не остаются постоянными на длительном временном периоде, а распространение технологий может существенно меняться в зависимости от экономической и политической ситуации в мире.

Список литературы (References)

- Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П.* Динамические системы и модели биологии. — М.: Физматлит, 2010. — 400 с.
Bratus' A. S., Novozhilov A. S., Platonov A. P. Dinamicheskie sistemy i modeli biologii [Dynamic systems and models of biology]. — Moscow: Fizmatlit, 2010. — 400 p. (in Russian).
- Варшавский А. Е.* Научно-технический прогресс в моделях экономического развития. — М.: Финансы и статистика, 1984.
Varshavskij A. E. Nauchno-tekhnicheskij progress v modelyah ekonomicheskogo razvitiya [Scientific and technological progress in economic development models]. — Moscow: Finansy i statistika, 1984 (in Russian).
- Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы / под ред. Д. С. Чернавского. — М.: Наука, 1987. — 240 с.
Vasil'ev V. A., Romanovskij Yu. M., Yahno V. G. Avtovolnovye processy [Autowave processes] / pod red. D. S. Chernavskogo. — Moscow: Nauka, 1987. — 240 p. (in Russian).
- Вольперт А. И.* Бегущие волны, описываемые монотонными параболическими системами / А. И. Вольперт, В. А. Вольперт // АН СССР, Отд-ние Ин-та хим. физики. — Препр. — Пос. Черноголовка (Моск. обл.), 1990.
Vol'pert A. I. Begushchie volny, opisyvaemye monotonnymi parabolicheskimi sistemami [Traveling wave solutions of parabolic systems] / A. I. Vol'pert, V. A. Vol'pert // AN SSSR, Otd-nie In-ta him. fiziki. — Prepr. — Pos. Chernogolovka (Mosk. obl.), 1990 (in Russian).
- Дубинина М. Г.* Исследование современных подходов к моделированию процессов распространения технологий в наукоемких отраслях // Труды ИСА РАН. — 2015. — Т. 65, № 3. — С. 43–54.
Dubinina M. G. Issledovanie sovremennyh podhodov k modelirovaniyu processov rasprostraneniya tekhnologij v naukoemkih otraslyah [Research of modern approaches to modeling processes of technology diffusion in knowledge-intensive industries] // Trudy ISA RAN. — 2015. — Vol. 65, No. 3. — P. 43–54 (in Russian).
- Ильина К. П.* Эффективный численный метод решения задачи Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова // МНИЖ. — 2023. — № 3 (129). — <https://cyberleninka.ru/article/n/effektivnyy-chislennyy-metod-resheniya-zadachi-fishera-kolmogorova-petrovskogo-piskunova> (дата обращения: 02.07.2023).
I'lina K. P. Effektivnyj chislennyj metod resheniya zadachi Fishera–Kolmogorova–Petrovskogo–Piskunova [An efficient numerical method for solving the Fisher–Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov problem] // MNIZH. — 2023. — No. 3 (129). — <https://cyberleninka.ru/article/n/effektivnyy-chislennyy-metod-resheniya-zadachi-fishera-kolmogorova-petrovskogo-piskunova> (accessed: 02.07.2023) (in Russian).
- Индикаторы цифровой экономики: 2020: статистический сборник / Г. И. Абдрахманова, К. О. Вишневецкий, Л. М. Гохберг и др. // Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М.: НИУ ВШЭ, 2020. — 360 с.*
Indikatory cifrovoj ekonomiki: 2020: statisticheskij sbornik [Indicators of the digital economy: 2020] / G. I. Abdrahmanova, K. O. Vishnevskij, L. M. Gohberg i dr.; Nac. issled. un-t "Vysshaya shkola ekonomiki". — Moscow: NIU VSHE, 2020. — 360 p. (in Russian).
- Колмогоров А. Н.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов // Бюл. МГУ. Сер. А. Математика и механика. — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–16.
Kolmogorov A. N. Issledovanie uravneniya diffuzii, soedinennoj s vozrastaniem veshchestva, i ego primenenie k odnoj

- biologicheskoy probleme [A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem] / A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskij, N. S. Piskunov // *Byul. MGU. Ser. A. Matematika i mekhanika.* — 1937. — Vol. 1, No. 6. — P. 1–16 (in Russian).
- Логинов А. Н., Гойхер О. Л. Концепция пространственного поляризованного развития: точка роста, полюс роста, транспортно-коммуникационные и информационно-коммуникационные коридоры // РППЭ. — 2015. — № 11 (61). — <https://cyberleninka.ru/article/n/kontseptsiya-prostranstvennogo-polyarizovannogo-razvitiya-tochka-rosta-polyus-rosta-transportno-kommunikatsionnye-i-informatsionno> (дата обращения: 08.04.2023).
- Loginov A. N., Gojher O. L. Konceptiya prostranstvennogo polyarizovannogo razvitiya: tochka rosta, polyus rosta, transportno-kommunikacionnye i informacionno-kommunikacionnye koridory [The concept of spatial polarized development: growth point, growth pole, transport and communication and information and communication corridors] // *RPPE.* — 2015. — No. 11 (61). — <https://cyberleninka.ru/article/n/kontseptsiya-prostranstvennogo-polyarizovannogo-razvitiya-tochka-rosta-polyus-rosta-transportno-kommunikatsionnye-i-informatsionno> (accessed: 08.04.2023, in Russian).
- Полтерович В. М. Теория эндогенного экономического роста и уравнения математической физики // Журнал Новой экономической ассоциации. — 2017. — № 2 (34). — С. 193–202.
- Polterovich V. M. Teoriya endogennoego ekonomicheskogo rosta i uravneniya matematicheskoy fiziki [The theory of endogenous economic growth and equations of mathematical physics] // *Zhurnal Novej ekonomicheskoy associacii.* — 2017. — No. 2 (34). — P. 193–202 (in Russian).
- Полтерович В. М., Хенкин Г. М. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и математические методы. — 1988. — № 6.
- Polterovich V. M., Henkin G. M. Evolyucionnaya model' vzaimodejstviya processov sozdaniya i zaimstvovaniya tekhnologij [An evolutionary model of interaction between the processes of creating and borrowing technologies] // *Ekonomika i matematicheskie metody.* — 1988. — No. 6 (in Russian).
- Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 331 с.
- Pontryagin L. S. Obyknovennye differencial'nye uravneniya [Ordinary differential equations]. — Moscow: Nauka, 1974. — 331 p. (in Russian).
- Регионы России. Социально-экономические показатели. 2022: стат. сб. / Росстат. — М., 2022. — 1122 с.
- Regiony Rossii. Social'no-ekonomicheskie pokazateli. 2022: stat. sb. [Regions of Russia. Socio-economic indicators. 2022] / Rosstat. — Moscow, 2022. — 1122 p. (in Russian).
- Росстат. Мониторинг развития информационного общества в Российской Федерации. — <https://rosstat.gov.ru/statistics/infocommunity> (дата обращения: 20.09.2023).
- Rosstat. Monitoring razvitiya informacionnogo obshchestva v Rossijskoj Federacii. [Monitoring the development of the information society in the Russian Federation]. — <https://rosstat.gov.ru/statistics/infocommunity> (accessed: 20.09.2023, in Russian).
- Тенденции развития интернета в России и зарубежных странах: аналитический доклад / Г. И. Абдрахманова, О. Е. Баскакова, К. О. Вишнеvский, Л. М. Гохберг и др. // Координационный центр национального домена.
- Tendencii razvitiya interneta v Rossii i zarubezhnyh stranah: analiticheskij doklad [Internet development trends in Russia and foreign countries: analytical report] / G. I. Abdrahmanova, O. E. Baskakova, K. O. Vishnevskij, L. M. Gohberg i dr. // *Koordinacionnyj centr nacional'nogo domena* (in Russian).
- Фурсова П. В., Тёрлова Л. Д., Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биологии. — Издательство «РХД», 2014.
- Fursova P. V., Tyorlova L. D., Riznichenko G. Yu. Matematicheskie modeli v biologii [Mathematical models in biology]. — Izdatel'stvo "RHD", 2014 (in Russian).
- Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 243 с.
- Arrowsmith D. K., Place C. M. Ordinary differential equations: a qualitative approach with applications. — Chapman and Hall, 1982. (Russ. ed.: *Errousmi D., Plejs K. Obyknovennye differencial'nye uravneniya. Kachestvennaya teoriya s prilozheniyami* / per. s angl. — Moscow: Mir, 1986. — 243 p.)
- Ablowitz M. J., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed // *Bull. Math. Biology.* — 1979. — Vol. 41. — 1979. — P. 835–840.
- Bass F. A. New product growth for model consumer durables // *Management Science.* — 1969. — Vol. 15, No. 5. — P. 215–227.
- Brown L. Innovation diffusion: A new perspective. — London, UK: Methuen, 1981.
- Fife P. C. Mathematical aspects of reacting and diffusing systems. — Berlin: Springer Verlag, 1979. — 285 p.

- Fisher R. A.* The wave of advance of advantageous genes // *Ann. Eugenics.* — 1937. — Vol. 7. — P. 353–369.
- Griliches Z.* Hybrid corn: An exploration in the economics of technological change // *Econometrica.* — 1957. — Vol. 25. — P. 501–522.
- Hagerstrand T.* Innovation diffusion as a spatial process / A. Pred, trans. — University of Chicago Press, 1967.
- Indekeu J. O., Smets R.* Traveling wavefront solutions to nonlinear reaction–diffusion–convection equations // *Journal of Physics A.* — 2017. — Vol. 50, No. 31. — id. 315501.
- Kandler A.* Demography and language competition // *Human Biol.* — 2009. — Vol. 81. — 181 p.
- Kandler A., Steele J.* Innovation diffusion in time and space: effects of social information and of income inequality // *The Open-Access Journal for the Basic Principles of Diffusion Theory, Experiment and Application.* — 2009. — Vol. 11, No. 3. — P. 1–17.
- Keveorkian J., Cole J. D.* Multiple scale and singular perturbation methods. — Springer, 1996. — 648 p.
- Mahajan V., Peterson R. A.* Integrating time and space in technological substitution models // *Technological Forecasting and Social Change.* — 1979. — Vol. 14. — P. 231–241.
- Morrill R., Gaile G. L., Thrall G. I.* Spatial diffusion. — SAGE scientific geography series 10. — Newbury Park, CA: SAGE Publications, Inc., 1988.
- Murray J. D.* Mathematical biology. I. An introduction. — Third Edition. — Springer, 2002. — 576 p.
- Nijkamp P., Reggiani A.* Space-time dynamics, spatial competition and the theory of chaos // Lakshmanan T. R., Nijkamp P. (eds.). *Structure and change in the space economy.* — Berlin, Heidelberg: Springer, 1993. — https://doi.org/10.1007/978-3-642-78094-3_3
- Nijkamp P., Reggiani A.* Space-time synergetics in innovation diffusion: A nested network simulation approach // *Geographical Analysis.* — 1996. — Vol. 28, No. 1.
- Sahal D.* Patterns of technological innovation. — Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., Inc., 1981. — 381 p.
- Shchepakina L., Sobolev V., Zhang I.* Critical travelling wave solution in one singularly perturbed parabolic equation // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2019. — Vol. 1368, Iss. 4. — P. 042060. — DOI: 10.1088/1742-6596/1368/4/042060
- Shinohara K.* Space-time innovation diffusion based on physical analogy // *Applied Mathematical Sciences.* — 2012. — Vol. 6, No. 51. — P. 2527–2558.
- The World Bank. Indicators. Individuals using the Internet (% of population). — [Electronic resource]. — <https://data.worldbank.org/indicator> (accessed: 07.09.2023).
- Walters C. E.* A reaction–diffusion model for competing languages // *Meccanica.* — 2014. — Vol. 49. — P. 2189–2206. — <https://doi.org/10.1007/s11012-014-9973-2>

Приложение

Таблица П1. Оценка параметров модели (14) распространения мобильной связи по ФО Российской Федерации за период 2000–2008 гг. с разными пространственными переменными

Пространственные переменные	Скорость волны	M	p	q	R^2	SSE	Количество наблюдений
Логарифм ВРП на душу населения ФО	0,869	2,242	0,288	0,554	0,925	1,376	70
ВРП на душу населения ФО / ВРП на душу населения Москвы	0,425	1,960	0,483	0,313	0,924	1,446	72

Таблица П1 (окончание)

Пространственные переменные	Скорость волны	M	p	q	R^2	SSE	Количество наблюдений
Доля затрат на НИОКР в ВРП ФО	1,204	2,017	0,477	0,307	0,945	1,050	72
Затраты на ИКТ на 1 занятого в ФО	3,223	1,634	0,489	0,491	0,904	1,229	56
Доля затрат на ИКТ в ВРП ФО, %	0,788	1,737	0,456	0,596	0,923	0,995	56
Доля городских жителей в общей численности населения ФО, %	17,3	2,397	0,363	0,366	0,950	0,945	72
Доля инновационно активных организаций в общем числе организаций ФО, %	799,5	1,730	0,540	0,327	0,908	1,756	72
Доля затрат на НИОКР в ВРП ФО / доля затрат на НИОКР в ВРП Москвы, среднее за период	0,484	2,006	0,469	0,288	0,950	0,945	72
Доля затрат на НИОКР в ВРП ФО, среднее за период	1,087	2,003	0,472	0,293	0,948	0,993	72

Таблица П2. Запаздывание распространения сотовой связи от показателей Москвы по федеральным округам России за период 2000–2009 гг. в зависимости от рассматриваемого пространственного показателя

Регион	Доля городских жителей, %	Лет	ВРП на душу населения относительно показателя Москвы	Лет
Москва	100		1	
Центральный ФО	80,8	1,11	0,447	1,30
Северо-Западный ФО	83,0	0,98	0,365	1,49
Южный ФО	62,3	2,17	0,206	1,87
Северо-Кавказский ФО	49,6	2,91	0,121	2,07
Приволжский ФО	70,7	1,69	0,264	1,73
Уральский ФО	80,0	1,15	0,619	0,90
Сибирский ФО	72,8	1,57	0,290	1,67
Дальневосточный ФО	71,3	1,66	0,340	1,55
Скорость волны	17,34		0,43	