**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2023 Т. 15 № 5 С. 1381–1393**
DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-5-1381-1393

Ки&М

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 519.866

Математическая модель консенсуса в группе лояльных экспертов, построенная на основании регулярных марковских цепей

О. В. Максимова[1,2,a], И. З. Аронов[3]

[1]ФГБУ «ИГКЭ»,
Россия, 107058, г. Москва, ул. Глебовская, д. 20б
[2]Университет науки и технологий МИСИС,
Россия, 119049, г. Москва, Ленинский пр-кт, д. 4
[3]МГИМО (У),
Россия, 119454, г. Москва, проспект Вернадского, д. 76

E-mail: [a] o-maximova@yandex.ru

Получено 29.12.2022, после доработки — 01.05.2023.
Принято к публикации 10.07.2023.

Теоретическое исследование консенсуса дает возможность проанализировать различные ситуации, с которыми приходится сталкиваться в реальной жизни социальным группам, принимающим групповые решения, абстрагируясь от конкретных особенностей групп. Актуальным для практики представляется исследование динамики социальной группы, состоящей из лояльных экспертов, которые в процессе поиска консенсуса уступают друг другу. В этом случае возможны психологические ловушки типа ложного консенсуса или группового мышления, которые иногда могут приводить к управленческим решениям с тяжелыми последствиями.

В статье построена математическая модель консенсуса для группы лояльных экспертов на основе моделирования с использованием регулярных марковских цепей. Анализ модели показал, что с ростом лояльности (уменьшением авторитарности) членов группы время достижения консенсуса экспоненциально растет (увеличивается число согласований), что, видимо, связано с отсутствием у экспертов желания брать ответственность за принимаемое решение. Рост численности группы (при остальных прочих равных условиях) приводит к

– уменьшению числа согласований до консенсуса в условиях стремления к абсолютной лояльности членов, т. е. каждый дополнительный лояльный член все меньше добавляет группе «силы»;
– логарифмическому росту числа согласований в условиях роста средней авторитарности членов.

Показано, что в очень малой группе (два лояльных эксперта) время наступления консенсуса может вырасти более чем в 10 раз по сравнению с группой из пяти и более членов, что вызывает затягивание самого процесса достижения консенсуса. Выявлено, что в случае наличия группы из двух абсолютно лояльных членов консенсус недостижим.

Сделан обоснованный вывод о том, что консенсус в группе лояльных экспертов является особым (специальным) случаем консенсуса, поскольку зависимость времени достижения консенсуса от авторитарности экспертов и их числа в группе описывается иными формами связи, чем в случае обычной группы экспертов.

Ключевые слова: консенсус, ложный консенсус, групповое мышление, социальные группы, марковские цепи, время достижения консенсуса

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2023 VOL. 15 NO. 5 P. 1381–1393
DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-5-1381-1393

Ки&М

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 519.866

Mathematical consensus model of loyal experts based on regular Markov chains

O. V. Maksimova[1,2,a], I. Z. Aronov[3]

[1]Yu. A. Izrael Institute of Global climate and ecology,
20b Glebovskaya st., Moscow, 107058, Russia
[2]University of science and technology MISIS,
4 Leninsky pr., Moscow, 119049, Russia
[3]MGIMO University,
76 Vernadsky pr., Moscow, 119454, Russia

E-mail: [a] o-maximova@yandex.ru

Received 29.12.2022, after completion — 01.05.2023.
Accepted for publication 10.07.2023.

The theoretical study of consensus makes it possible to analyze the various situations that social groups that make decisions in this way have to face in real life, abstracting from the specific characteristics of the groups. It is relevant for practice to study the dynamics of a social group consisting of loyal experts who, in the process of seeking consensus, yield to each other. In this case, psychological "traps" such as false consensus or groupthink are possible, which can sometimes lead to managerial decisions with dire consequences.

The article builds a mathematical consensus model for a group of loyal experts based on modeling using regular Markov chains. Analysis of the model showed that with an increase in the loyalty (decrease in authoritarianism) of group members, the time to reach consensus increases exponentially (the number of agreements increases), which is apparently due to the lack of desire among experts to take part of the responsibility for the decision being made. An increase in the size of such a group leads (ceteris paribus):

– to reduce the number of approvals to consensus in the conditions of striving for absolute loyalty of members, i. e. each additional loyal member adds less and less "strength" to the group;
– to a logarithmic increase in the number of approvals in the context of an increase in the average authoritarianism of members.

It is shown that in a small group (two people), the time for reaching consensus can increase by more than 10 times compared to a group of 5 or more members), in the group there is a transfer of responsibility for making decisions. It is proved that in the case of a group of two absolutely loyal members, consensus is unattainable.

A reasonable conclusion is made that consensus in a group of loyal experts is a special (special) case of consensus, since the dependence of the time until consensus is reached on the authoritarianism of experts and their number in the group is described by different curves than in the case of a regular group of experts.

Keywords: consensus, false consensus, group think, social groups, Markov chains, time to reach consensus

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 5, pp. 1381–1393 (Russian).

1. Введение и цель исследования

Принятие решений на основе консенсуса является альтернативой обычно практикуемым групповым процессам принятия решений, основанным на голосовании. Критики таких процессов считают, что они порождают состязательные дебаты (споры) и формируют излишнюю конкуренцию в группе экспертов (например, в социальной группе). Такая динамика может повредить отношениям членов группы и подорвать ее способность совместно реализовать общее решение. Более того, решение, основанное на результатах голосования, навязывает правила иерархических отношений, настраивает стороны друг против друга: оно создает победителей и проигравших в дискуссиях.

Теоретическое исследование консенсуса дает возможность проанализировать различные ситуации, с которыми приходится сталкиваться в реальной жизни, абстрагируясь от конкретных особенностей тех или иных социальных групп, в которых решения принимаются консенсусом.

В работе [DeGroot, 1974] была продемонстрирована принципиальная возможность описания процесса достижения консенсуса на основе цепей Маркова [Гантмахер, 2004]. Эта модель нашла применение в разных приложениях, например при управлении в социальных сетях [Губанов, Новиков, Чхартишвили, 2009], управлении автоматами [Чеботарев, Агаев, 2013; Максимова, Григорьев, 2017], в переговорном процессе [Мазалов, Токарева, 2012].

В работах [Aronov, Maksimova, Grigoryev, 2018; Zazhigalkin et al., 2019] была построена теоретическая модель консенсуса, основанная на регулярных цепях Маркова. Анализ этой модели был посвящен вопросам исследования времени достижения консенсуса и определению факторов, влияющих на это время. Показано, что время до достижения консенсуса и качество принимаемого решения в условиях фиксированного числа экспертов (членов группы) и структуры группы связаны с двумя основными характеристиками: начальными мнениями экспертов и их авторитарностью.

Вектор мнений экспертов. Вектор начальных мнений рассматривался авторами в ранних исследованиях с позиции качества консенсусного решения [Аронов, Максимова, 2017]. Консенсус считается качественным, если каждый из экспертов вносит одинаковый вклад в окончательное решение, т. е. никто не перетягивает «одеяло на себя». Было установлено, что для этого достаточно, чтобы авторитарности всех членов группы совпадали и при этом было обеспечено равное доверие каждого эксперта к остальным. То есть качественный консенсус реализуется равновесным включением начальных мнений, что обеспечивает сбалансированное участие каждого эксперта в консенсусном решении

Авторитарность экспертов. Под авторитарностью понимается социально-психологическая характеристика личности, отражающая ее стремление максимально подчинить своему влиянию партнеров по взаимодействию и общению. Применение методов статистического моделирования позволило установить, что авторитарность членов группы значимо влияет на время достижения консенсуса. Различия в авторитарности сказываются не только на времени согласований, но и на степени учета мнений экспертов в итоговом решении. В исследованиях авторов рассматривались группы экспертов, в которых авторитарность каждого члена группы больше доверия эксперта к остальным членам группы. Было установлено, что наличие доминирующего члена в группе значительно увеличивает время достижения консенсуса (на 50–80 %), а наличие нескольких доминирующих членов приводит к формированию коалиций в группе, что блокирует консенсус [Maksimova, Aronov, 2021]. Серия моделирований групповой динамики в условиях двух коалиций показала, что уступка (цессия), сделанная одной коалицией другой коалиции, позволяет сформировать консенсусное решение.

При этом математические исследования групповой динамики, проведенные ранее авторами, не касались случаев, когда группа состоит из одних лояльных экспертов, у которых доверие к своему мнению меньше доверия эксперта к остальным членам группы. Такая ситуация может показаться по меньшей мере странной: эксперт доверяет себе меньше, чем остальным членам группы. Однако анализ литературы показал, что такие случаи нередки [Аронов, Максимова, 2022b]. При этом группа лояльных экспертов может оказаться в психологической ловушке, которую называют ложным консенсусом. Как правило, ложный консенсус возникает тогда, когда члены группы оказываются лояльными, некомпетентными в рассматриваемом вопросе или безразличными, поэтому стараются уступать друг другу в ходе переговоров. В результате обсуждений в группе экспертов формируется консенсус, не устраивающий никого в группе. Эта ситуация впервые была рассмотрена американским психологом Дж. Харви [Harvey, 1974], которую он назвал парадоксом Абилина. Смысл парадокса заключается в том, что семья против своего желания поехала в городок Абилин (штат Техас) только для того, чтобы члены семьи (группы) не расстраивались: никто из членов семьи не проявил волю. В результате все остались недовольны решением, к которому они сами пришли.

Группа, состоящая из лояльных экспертов, также может формировать консенсусное решение, которое называют «групповое мышление», или groupthink [Janis, 1972]. Последствия такой уступчивости приводят, в свою очередь, к некорректным управленческим решениям. Достаточно вспомнить решения президента США Джона Кеннеди и его советников провести известное вторжение на Кубу в 1962 г., президента США Линдона Джонсона и его команды относительно эскалации войны во Вьетнаме в 1964 г., НАСА в 1986 г. о запуске космического челнока «Челленджер», который взорвался сразу после старта, крах корпорации Enron [Аронов, Максимова, 2022b]. Обзор кейсов, связных с групповым мышлением, приведен в работе [Hart, 1991].

Другими словами, группа, состоящая из лояльных экспертов, может иногда приходить к консенсусу, который на практике чреват тяжелыми последствиями, что делает настоящее исследование актуальным.

Цель настоящей работы — построить и исследовать теоретическую модель консенсуса в группе, состоящей из лояльных экспертов, используя аппарат регулярных марковских цепей, удовлетворительно описывающий процесс достижения консенсуса, и показать, что консенсус в такой группе является специальным (особым) вариантом консенсуса, а не служит частным случаем реализованной авторами теоретической модели консенсуса, основанной на регулярных марковских цепях.

Известны социологические исследования, опирающиеся на некоторые эмпирические данные в рамках конкретных групп экспертов, которые затем подвергаются соответствующей статистической обработке [Почебут, 2017; Краснов, 2020]. Однако именно поэтому выводы, содержащиеся в этих и других подобных работах, как правило, носят узко специализированный характер, препятствуя их экстраполяции на другие группы и другие условия. Кроме того, важно добавить, что имеется множество вопросов, связанных с обеспечением воспроизводимости таких исследований. Как следует из результатов фундаментальной работы [Open science, 2015], представленной сообществом доказательных психологов, из 100 оригинальных экспериментальных исследований в области социологии другим группам удалось воспроизвести не более 39 экспериментов.

Таким образом, разработка модели консенсуса, которая опирается на универсальный математический аппарат, ее адаптация к ситуации лояльных экспертов и исследование факторов, влияющих на время достижения консенсуса путем статистического моделирования, позволят получить некие общие закономерности в рамках процесса достижения консенсуса.

2. Основы теоретической модели классического консенсуса

Пусть n — число экспертов, участвующих в обсуждении; их начальные мнения будут описываться вектором $S(0) = (S_{01}, S_{02}, \ldots, S_{0n})$, где компонента вектора S_{0i} — мнение i-го эксперта. Относительно компонент этого вектора эксперты обмениваются мнениями, в результате чего каждый из них может как изменить свое мнение, так и оставить прежним. Если обозначить вероятность доверия i-го члена к мнению j-го эксперта через $0 < p_{ij} < 1$ ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$), то получим матрицу доверия $\mathbf{P} = (p_{ij})$, для которой $\forall i \in \overline{1, n}$ выполняется $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. При этом i-й эксперт доверяет и себе с определенной вероятностью $0 < p_{ii} < 1$. Эти вероятности интерпретируются как уровни авторитарности членов группы: чем выше значение p_{ii}, тем выше его авторитарность. Вопросы авторитарности личности исследованы достаточно подробно, что позволяет ввести соответствующую шкалу [Денисова, 2012]. Это важно для практических рекомендаций.

На первом шаге согласований новый вектор мнений, обозначаемый как $S(1)$, будет рассчитываться по формуле $S^T(1) = \mathbf{P} \cdot S^T(0) = (S_{11}, S_{12}, \ldots, S_{1n})^T$. После k-го согласования получим следующий вектор мнений:

$$S^T(k) = (S_{k1}, S_{k2}, \ldots, S_{kn})^T = \mathbf{P} \cdot S^T(k-1) = \mathbf{P}^k \cdot S^T(0).$$

Процесс завершается на m-м шаге, когда все строки матрицы $\mathbf{P}^m$ становятся одинаковыми. Таким образом, матрица доверия $\mathbf{P}$ после m итераций достигает финальной матрицы $\mathbf{F}$, в которой все соответствующие построчные элементы равны. Таким образом, при последующих согласованиях матрица $\mathbf{P}$ не будет меняться, следовательно, не будет изменяться и вектор мнений переговорщиков: $S^T(m) = \mathbf{P}^m \cdot S^T(0) = (S_{m1}, S_{m2}, \ldots, S_{mn})^T$, т. е. наступает консенсус.

Из теории сходимости начальной матрицы $\mathbf{P}$ к финальной матрице $\mathbf{F}$ необходимым и достаточным условием достижения консенсуса при любом векторе $\mathbf{S}(0)$ является регулярность[1] матрицы $\mathbf{P}$. То есть необходимо и достаточно, чтобы суммы по строкам матрицы $\mathbf{P}$ были равны 1 и при этом для каких-либо вероятностей p_{ij} выполнялось строгое неравенство $0 < p_{ij} < 1$.

Таким образом, если матрица доверия $\mathbf{P}$ регулярна, то, каковы бы ни были начальные мнения экспертов, консенсус достижим, хотя может и за значительное число согласований.

3. Теоретическая модель консенсуса в группе лояльных экспертов и описание моделирования

Ключом к теоретическому исследованию феномена наступления консенсуса в группе лояльных экспертов, как отмечено во введении, служит анализ изменения начального мнения экспертов в группе, в которой эксперт доверяет своему мнению меньше, чем мнению *каждого* из остальных. Рассматриваемая ранее авторами модель описывала группы численностью n с авторитарностями (вероятностями), для которых выполнялось следующее условие:

$$\forall i = \overline{1, n}\ \exists j = \overline{1, n} \quad [p_{ii} > p_{ij}], \quad j \neq i,$$

т. е. имеется хотя бы один эксперт, у которого уровень доверия к своему мнению превышает уровень доверия к мнению остальных членов группы.

Построим модель консенсуса в группе n лояльных экспертов и проанализируем влияние численности группы и авторитарности ее членов на время переговорного процесса.

Итак, моделируется группа лояльных экспертов, в которой применительно к авторитарностям выполнено условие:

$$\forall i = \overline{1, n}\ \forall j \neq i \quad [p_{ij} \geqslant p_{ii}]. \tag{1}$$

[1] Матрицы, суммы элементов всех строк которых равны единице, называются *стохастическими*. Если при некотором n все элементы матрицы $\mathbf{P}^n$ не равны нулю, то такая переходная матрица называется *регулярной*.

Легко видеть, что для этого должно выполняться условие

$$\forall i = \overline{1,\, n} \quad \left[p_{ii} < \frac{1}{n}\right].$$

Рассмотрим теорему 4.1.3 из книги [Kemeny, Snell, 1960].

Пусть $\mathbf{P}$ — переходная матрица размерности $r \times r$, не содержащая нулевых элементов, и ε — наименьший элемент $\mathbf{P}$. Пусть x — произвольный r-мерный вектор-столбец, имеющий максимальную компоненту M_0 и минимальную компоненту m_0, и пусть M_1 и m_1 — соответственно максимальная и минимальная компоненты вектора $\mathbf{P}x$. Тогда $M_1 \leqslant M_0$, $m_1 \geqslant m_0$ и $M_1 - m_1 \leqslant (1 - 2\varepsilon)(M_0 - m_0)$.

Пусть $(S_{01}, S_{02}, \ldots, S_{0n})^T$ — вектор начальных мнений (n-мерный вектор-столбец), а матрица согласований $\mathbf{P}$ — переходная матрица размерности $n \times n$. Тогда для рассматриваемой задачи $\mathbf{P}x$ есть вектор мнений после одного согласования $(S_{11}, S_{12}, \ldots, S_{1n})^T$, а $(S_{k1}, S_{k2}, \ldots, S_{kn})^T$ — вектор мнений после проведения k согласований, и $M_k = \max\{S_{ki}\}$, $m_k = \min\{S_{ki}\}$. Тогда, применяя последовательную оценку теоремы для $k = 0, \ldots, m$, получаем неравенство

$$\max\{S_{mi}\} - \min\{S_{mi}\} \leqslant (1 - 2\varepsilon)^m \cdot (\max\{S_{0i}\} - \min\{S_{0i}\}),$$

где $i = \overline{1,\, n}$, ε — наименьший элемент начальной матрицы доверия, $\varepsilon \in \left(0,\, \frac{1}{n}\right)$ для рассматриваемой модели. Введем обозначение

$$\max\{S_{mi}\} - \min\{S_{mi}\} = d_m, \quad \max\{S_{0i}\} - \min\{S_{0i}\} = d_0,$$

и зафиксируем d_0. Для обеспечения заданной точности d_m сближения мнений после m согласований получаем верхнюю оценку

$$m \leqslant \frac{\lg d_m - \lg d_0}{\lg(1 - 2\varepsilon)}. \tag{2}$$

Выражение справа в (2) представляет убывающую функцию от ε, позволяя получать верхнюю оценку для m (в начальной матрице доверия в группе конформистов наименьшим элементом будет служить наименьшая авторитарность ее членов). Приведем пример оценок согласно неравенству (2):

- пусть $p_{ii} = \varepsilon = 0{,}04$, тогда верхняя оценка $m < 28 \cdot \lg \frac{d_0}{d_m}$;
- пусть $p_{ii} = \varepsilon = 0{,}001$, тогда верхняя оценка $m < 1151 \cdot \lg \frac{d_0}{d_m}$.

Таким образом, оценка (2) характеризует рост числа согласований для обеспечения заданной точности при уменьшении авторитарности членов группы, но не дает возможности оценить его нижнюю границу, чтобы сделать выводы о влиянии авторитарности в модели консенсуса лояльных экспертов. Для решения этой задачи было проведено моделирование по следующей программе.

Шаг 1 для моделирования: выбор числа членов группы. Рассмотрим группы из $n = 5$, 10, 20, 50 членов.

Шаг 2 для моделирования: выбор и моделирование уровней авторитарности p_{ii} ($i = \overline{1,\, n}$). В серии моделирований, описанных в работах авторов по моделированию консенсуса, авторитарности членов групп удовлетворяли неравенству $p_{ii} \geqslant 0{,}2$. Это обеспечивало для групп разной численности ($n = 5$, 10, 20, 50) недопустимость присутствия экспертов, которые склонны доверять *каждому* члену группы больше, чем себе, тем самым исключая появление ложного консенсуса. Ввиду того, что для разных по численности групп обеспечивается разная верхняя граница для авторитарностей экспертов в рассматриваемой модели консенсуса (для $n = 5$ она равна 0,2; для $n = 10$ получаем 0,1; для $n = 20$ имеем 0,05; для $n = 50$ соответственно 0,02), моделирование будем производить с разным числом уровней:

1) для $n = 50$: $p_{ii} = 0 \div 0{,}01$; $0{,}01 \div 0{,}02$;

2) для $n = 20$: $p_{ii} = 0 \div 0{,}01$; $0{,}02 \div 0{,}03$; $0{,}04 \div 0{,}05$;

3) для $n = 10$: $p_{ii} = 0 \div 0{,}01$; $0{,}02 \div 0{,}03$; $0{,}04 \div 0{,}05$; $0{,}07 \div 0{,}08$, $0{,}09 \div 0{,}1$;

4) для $n = 5$: $p_{ii} = 0 \div 0{,}01$; $0{,}02 \div 0{,}03$, $0{,}04 \div 0{,}05$, $0{,}07 \div 0{,}08$, $0{,}09 \div 0{,}1$, $0{,}14 \div 0{,}15$, $0{,}19 \div 0{,}2$.

Шаг 3 моделирования: симуляция вероятностей доверия p_{ij} ($i \neq j, i,\ j = \overline{1, n}$). В модели для группы из n экспертов справедливо условие (1). Его выполнение достигалось моделированием в три этапа:

1) моделирование элементов вспомогательной матрицы Δ равномерным законом распределения на отрезке [0; 1], получение исходных элементов матрицы Δ_{ij} ($i,\ j = \overline{1, n}$);

2) формирование матрицы Δ^0 с помощью корректировки элементов матрицы Δ: элементы каждой строки $\Delta^0_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\sum\limits_{j=1,\, i\neq j}^{n}(\Delta_{ij})} \cdot (1 - np_{ii})$;

3) моделирование матрицы доверия $\mathbf{P}$: для элементов каждой строки $p_{ij} = p_{ii} + \Delta^0_{ij}$ ($i \neq j$). Очевидно, что тем самым выполнено условие моделирования (1).

Докажем, что получаемая в результате моделирования матрица $\mathbf{P}$ будет стохастической:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_{ii} + \sum_{j=1,\, i\neq j}^{n}\left(p_{ii} + \Delta^0_{ij}\right) = p_{ii} + \sum_{j=1,\, i\neq j}^{n}\left(p_{ii} + \frac{\Delta_{ij}}{\sum\limits_{j=1,\, i\neq j}^{n}(\Delta_{ij})} \cdot (1 - np_{ii})\right) =$$

$$= p_{ii} + (n-1)p_{ii} + \frac{\sum\limits_{j=1,\, i\neq j}^{n}(\Delta_{ij})(1 - np_{ii})}{\sum\limits_{j=1,\, i\neq j}^{n}(\Delta_{ij})} = np_{ii} + 1 - np_{ii} = 1.$$

Условие регулярности матрицы $\mathbf{P}$ для сходимости обеспечивается отличными от нуля $\left(\text{и меньшими } \frac{1}{n}\right)$ вероятностями p_{ii} при моделировании (см. второй шаг). Для получения устойчивых выводов в отношении среднего числа m согласований (времени достижения консенсуса) при изменении других параметров при каждом фиксированном уровне факторов проводилось 100 моделирований в среде Excel [Efron, Tibshirani, 1991]. Таким образом, имелось 17 серий по 100 моделирований в каждой. Дополнительно проводились контрольные 4 серии по 100 моделирований в условиях абсолютной лояльности (авторитарности всех экспертов равны нулю).

4. Анализ результатов моделирования и их интерпретация

Оценим время сходимости матрицы мнений $\mathbf{P}$ к финальной матрице $\mathbf{F} = \mathbf{P}^m$. Это время задается числом m итераций (обсуждений в рамках группы) до формирования консенсуса. Математически m определяется как степень матрицы $\mathbf{P}$, при которой в финальной матрице $\mathbf{F}$ элементы внутри каждого столбца j удовлетворяют условию $|p_{ij} - p_{kj}| < \delta$ для всех i, k ($j, i, k = \overline{1, n}$). Величина m рассчитывалась из условия $\delta = 0{,}001$ (это число знаков обеспечивает приемлемую вариабельность авторитарностей, исходя из выбранных уровней на втором шаге моделирования).

На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования. Для интерпретации результатов моделирования введем понятие средней авторитарности (p) группы как среднее арифметическое значение авторитарности членов группы.

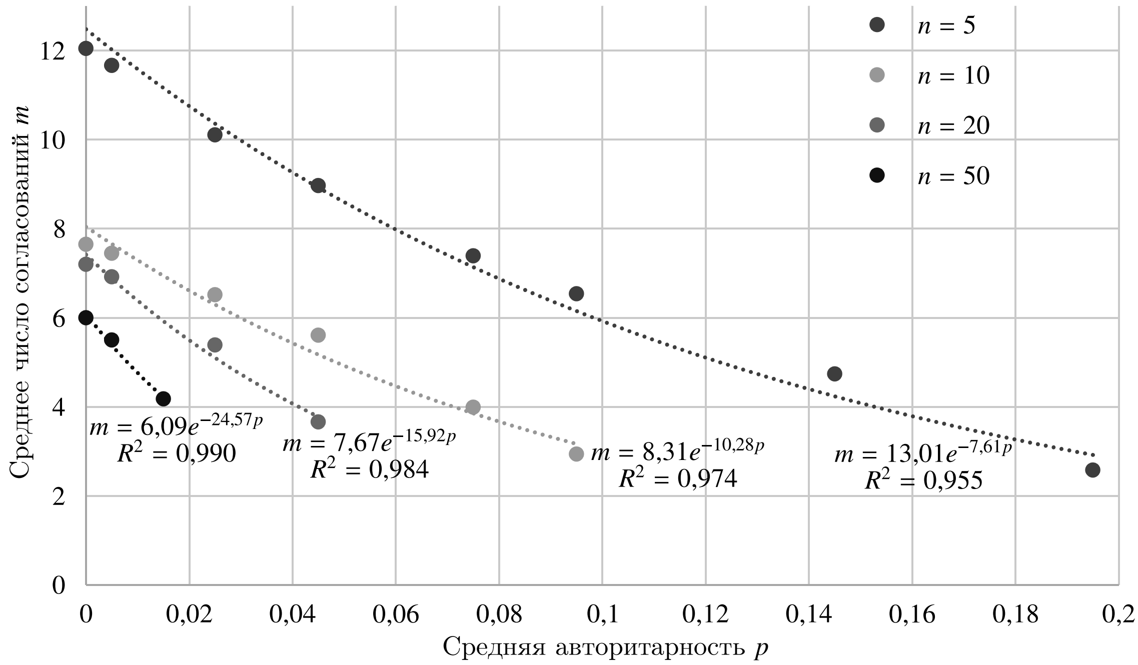

Рис. 1. Зависимость числа согласований (m) от средней авторитарности (p) в группе лояльных экспертов $n = 5, 10, 20, 50$

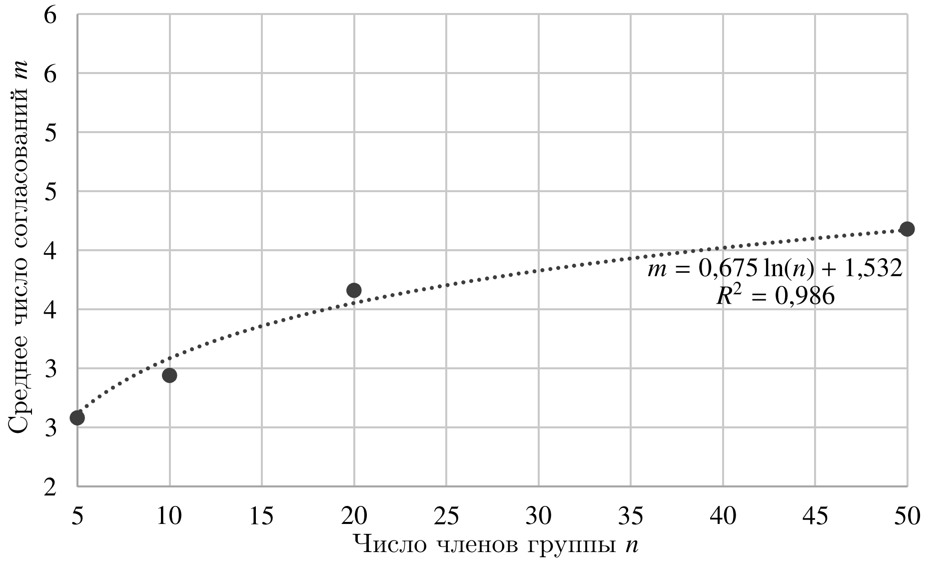

Рис. 2. Зависимость числа согласований (m) от численности лояльных экспертов $n = 5, 10, 20, 50$ при средней авторитарности $p = \frac{1}{n}$

1. Зависимости среднего числа согласований в группе от средней авторитарности группы при фиксированных n достаточно хорошо описываются экспоненциальными кривыми (на рис. 1 указаны формы зависимости и соответствующий им коэффициент детерминации[1] R^2).

2. С уменьшением авторитарности членов группы (т. е. с ростом их лояльности) число согласований растет (рис. 1). Консенсус, как способ решения проблемы, делает необходимым чле-

[1] *Коэффициент детерминации* (R^2) — это доля дисперсии зависимой переменной, обусловленная рассматриваемой зависимостью, т. е. объясняющими переменными.

нов группы «рисковать собственной шкурой» (по мысли Н. Талеба), формируя симметричную ответственность в группе [Талеб, 2022], что для лояльных экспертов не приемлемо! Поэтому уменьшение авторитарности членов группы свидетельствует о перекладывании принятия решения на других, каждый эксперт не желает принимать ответственность за решение, вследствие чего наблюдается рост числа согласований.

3. Рост численности группы лояльных экспертов влечет уменьшение времени до достижения консенсуса при приближении к абсолютной лояльности ($p \to 0$, см. рис. 1). Этот важный факт, впервые обнаруженный авторами в настоящей статье, позволяет рассматривать консенсус лояльных экспертов как специальный случай консенсуса, а не как его частный случай. Дело в том, что в группе «обычных» экспертов рост их числа влечет увеличение времени до достижения консенсуса, что ожидаемо [Аронов, Максимова, 2017].

4. При приближении к верхнему пороговому среднему значению авторитарностей $p = \frac{1}{n}$ среднее число согласований для всех групп медленно растет (рис. 2). Связь хорошо описывается медленно возрастающей логарифмической зависимостью, которая для группы из 50 экспертов дает значение $m < 5$ ($R^2 = 0{,}986$, см. рис. 2).

5. Максимально возможное число согласований находится в пределах $m \approx 13$ для групп из пяти членов при $p = 0$ (среди рассматриваемых групп, рис. 1).

Полученные выводы 1–2 соответствуют результатам исследования в социальной психологии: рассогласования в группе можно ожидать в большей мере с численностью из 3–4 человек, где может возникнуть конфликт при принятии решения, чем в группе из 5 переговорщиков и более. Увеличение количества людей в таких группах от трех до четырех имеет больший эффект, чем увеличение, к примеру, от 20 до 21 эксперта [Kerr, 1989]. Это предположение, сделанное в результате проведения экспериментальных опытов, выявляет необходимость проведения дополнительной серии моделирований для самой малой группы из двух лояльных экспертов и последующего сравнения результатов моделирования.

Для $n = 2$ верхняя граница авторитарности в анализируемой модели консенсуса составляет $p = 0{,}5$. С учетом описанных условий в основной серии моделирований получаем следующие уровни авторитарности p_{ii} ($i = \overline{1,\ 2}$): $p_{ii} = 0{,}02 \div 0{,}03$, $0{,}04 \div 0{,}05$, $0{,}07 \div 0{,}08$, $0{,}09 \div 0{,}1$, $0{,}14 \div 0{,}15$, $0{,}19 \div 0{,}2$, $0{,}29 \div 0{,}3$, $0{,}39 \div 0{,}4$, $0{,}49 \div 0{,}5$. Уровень $p_{ii} = 0 \div 0{,}01$ пропущен, так как при $p_{ii} = 0$ получаем разложимую матрицу[1]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В теории марковских цепей показано, что соответствующая переходная матрица не сходится к финальной матрице [Гантмахер, 2004]. В этой ситуации консенсус не достижим.

На рис. 3 представлены графически результаты моделирования (совместно с результатами основного).

Для группы из двух экспертов число согласований растет гиперболически при приближении авторитарности к нулю. При средней авторитарности $p = 0{,}025$ среднее число согласований достигает 153. Промоделированная ситуация с двумя экспертами демонстрирует существенные различия при переходе от $n = 2$ к $n = 5$ членам по отношению к переходу, к примеру, от $n = 10$ к $n = 20$ (рис. 3).

Рассмотрим пример формирования ложного консенсуса в рамках предложенной модели. Представим группу экспертов, состоящую из четырех человек, которые обсуждают требования к цементу общестроительному в проекте стандарта. Анализируется требование к доле клинкера[2]

[1] Матрица **A** называется *разложимой*, если перестановкой рядов она может быть приведена к виду $\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$, где **B** и **D** — квадратные матрицы.

[2] Клинкер — промежуточный продукт, используемый в производстве цемента.

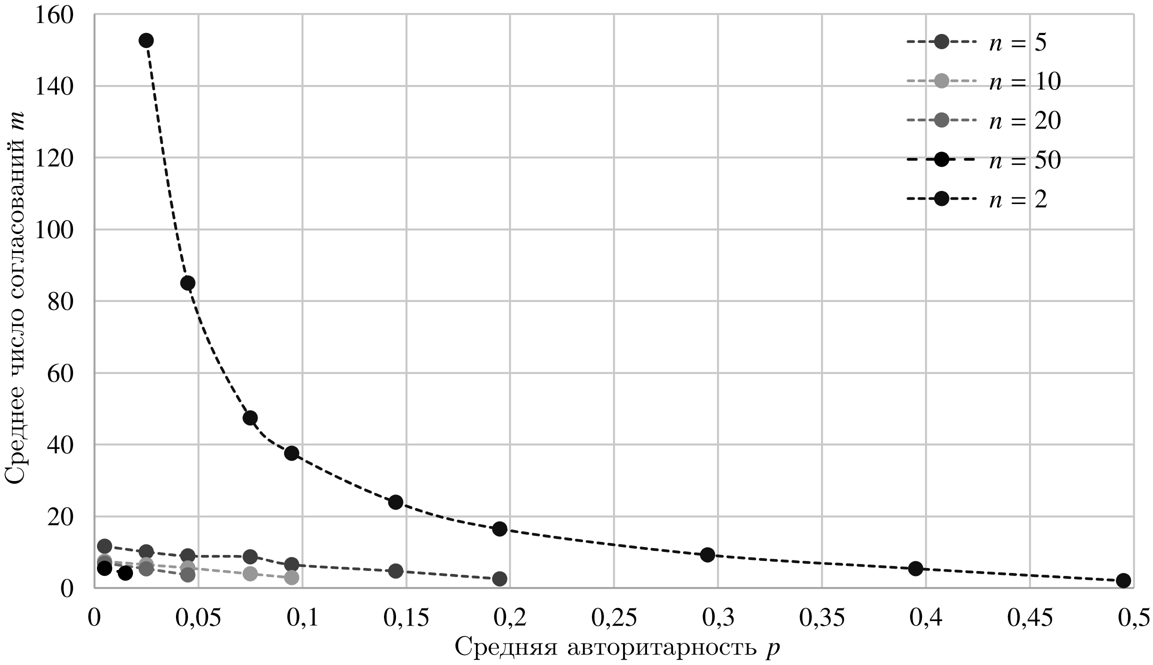

Рис. 3. Зависимость числа согласований (m) от средней авторитарности членов в группе (p) для числа членов в группе $n = 2, 5, 10, 20, 50$

(в процентах) в цементе ЦЕМ1. Вектор мнений относительно содержания клинкера в цементе следующий: 1-й эксперт — 95 %, 2-й эксперт — 96 %, 3-й эксперт — 20 %, 4-й эксперт — 30 %.

При этом эксперты 1 и 2 являются компетентными в рассматриваемом вопросе, но безразличными, эксперты 3 и 4 являются неопытными и лояльными. В результате может сформироваться следующая матрица доверия **P**:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Из матрицы доверия **P** следует, что все эксперты лояльны $\left(p_{ii} = 0{,}1 < \frac{1}{n}\right)$.

Рассмотрим последовательно этапы обсуждений.

Первый этап: $\mathbf{S}(0) = (95,\ 96,\ 20,\ 30)$ — начальный вектор мнений.

Второй этап: после второго согласования матрица доверия примет вид

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}21 & 0{,}22 & 0{,}33 & 0{,}24 \\ 0{,}18 & 0{,}23 & 0{,}30 & 0{,}29 \\ 0{,}22 & 0{,}18 & 0{,}28 & 0{,}32 \\ 0{,}20 & 0{,}28 & 0{,}18 & 0{,}34 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что мнения 3-го и 4-го экспертов характеризуются бо́льшими вероятностями, что свидетельствует о перекладывании ответственности на этих экспертов (первый и второй эксперты безразличны).

Третий этап: продолжая возведение матриц в степень с учетом округления вероятностей, к примеру, до второго знака после запятой, придем после шестого согласования к следующей матрице:

$$\mathbf{P}^7 = \begin{pmatrix} 0{,}203 & 0{,}230 & 0{,}264 & 0{,}303 \\ 0{,}203 & 0{,}230 & 0{,}264 & 0{,}303 \\ 0{,}203 & 0{,}230 & 0{,}264 & 0{,}303 \\ 0{,}203 & 0{,}230 & 0{,}264 & 0{,}303 \end{pmatrix},$$

которую можно считать финальной матрицей $\mathbf{F}$ (все постолбцовые вероятности равны).

Четвертый этап: возвращаясь к вектору мнений экспертов $\mathbf{S}(0) = (95, 96, 20, 30)$, с учетом матрицы $\mathbf{F}$ получаем результирующее консенсусное решение:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(7) = 0{,}203 \cdot 95 + 0{,}230 \cdot 96 + 0{,}264 \cdot 20 + 0{,}303 \cdot 10 \approx 50\,\%.$$

Можно признать, что полученное решение есть ложный консенсус, так как для обеспечения прочности цемента содержание клинкера в нем должно быть более 95 %. Так формируется консенсус невежд (по терминологии математика А. И. Орлова) [Орлов, 2017].

5. Заключение

В работе построена теоретическая модель консенсуса для группы лояльных экспертов, основанная на регулярных цепях Маркова. Для анализа этой модели проведено моделирование для групп с численностью 2, 5, 10, 20 и 50 экспертов.

Выявлено, что с ростом лояльности (уменьшением авторитарности) членов в группе с фиксированным числом членов время достижения консенсуса экспоненциально растет для группы с численностью более двух. Это фиксирует рассогласованность группы в условиях отсутствия желания брать ответственность за принимаемое решение.

Рост численности группы приводит к следующим результатам:

а) при ослаблении лояльности экспертов $\left(\text{стремлении авторитарности к } p = \frac{1}{n}\right)$ происходит медленный логарифмический рост числа согласований;

б) при стремлении к абсолютной лояльности (авторитарность экспертов $p \to 0$) происходит уменьшение числа согласований.

Показано, что в малой группе (до 5 человек) число согласований быстро растет с уменьшением числа экспертов и ростом лояльности экспертов: в группе из двух человек число согласований может вырасти более чем в 10 раз по сравнению с группой из пяти членов.

Выявлено, что в случае наличия группы из двух абсолютно лояльных экспертов консенсус недостижим. Это позволяет сформулировать практическое правило формирования, к примеру, группы аудиторов: в условиях неопределенности нижняя граница числа аудиторов — триада (три человека).

Полученный теоретически важный результат может служить доказательной базой того, что динамика малых групп с числом экспертов менее 5 человек и низкой авторитарностью обладает значимой спецификой по сравнению с большими социальными группами «обычных» экспертов.

Список литературы (References)

Аронов И. З., Максимова О. В. Анализ времени достижения консенсуса в работе технических комитетов по стандартизации по результатам статистического моделирования // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2017. — № 3 (83). — С. 71–77.

Aronov I. Z., Maksimova O. V. Analiz vremeni dostizheniya konsensusa v rabote tekhnicheskikh komitetov po standartizatsii po rezul'tatam statisticheskogo modelirovaniya [Analysis of the time to reach consensus in the work of technical committees for standardization based on the results of statistical modeling] // Industrial laboratory. Diagnostic of materials. — 2017. — No. 3 (83). — P. 71–77 (in Russian).

Аронов И. З., Максимова О. В. Математическая модель консенсуса в социальной группе при наличии лидера и руководителя // Информационно-экономические аспекты стандартизации и технического регулирования. — 2022a. — № 2 (66). — С. 12–21.

Aronov I. Z., Maksimova O. V. Matematicheskaya model' konsensusa v sotsial'noy gruppe pri nalichii lidera i rukovoditelya [Mathematical model of consensus in a social group in the presence of a leader and a leader // Informatsionno-ekonomicheskiye aspekty standartizatsii i tekhnicheskogo regulirovaniya. — 2022a. — No. 2 (66). — P. 12–21 (in Russian).

Аронов И. З., Максимова О. В. Теоретическое моделирование достижения консенсуса в условиях коалиций на основе регулярных марковских цепей // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 5. — С. 1247–1256. — DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1247-1256

Aronov I. Z., Maksimova O. V. Teoreticheskoye modelirovaniye dostizheniya konsensusa v usloviyakh koalitsiy na osnove regulyarnykh markovskikh tsepey [Theoretical modeling of consensus building under coalition conditions based on regular Markov chains] // Computer Research and Modeling. — 2020. — Vol. 12, No. 5. — P. 1247–1256 (in Russian).

Аронов И. З., Максимова О. В. Теория консенсуса: учебное пособие. — М.: МГИМО (У), 2022b.

Aronov I. Z., Maksimova O. V. Teoriya konsensusa: uchebnoye posobiye [Consensus theory: a study guide.] — Moscow: MGIMO (U), 2022b (in Russian).

Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Gantmaher F. R. Teoriya matric [Matrix theory]. — Moscow: FIZMATLIT, 2004 (in Russian).

Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Модели репутации и информационного управления в социальных сетях // Математическая теория игр и ее приложения. — 2009. — № 2. — С. 209–234.

Gubanov D. A., Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Modeli reputatsii i informatsionnogo upravleniya v sotsial'nykh setyakh [Models of reputation and information management in social networks] // Matematicheskaya teoriya igr i yeye prilozheniya. — 2009. — No. 2. — P. 209–234 (in Russian).

Денисова Д. М. Шкала F как инструмент исследования авторитарного потенциала личности // Тр. СПИИРАН. — 2012. — Выпуск 21.

Denisova D. M. Shkala F kak instrument issledovaniya avtoritarnogo potentsiala lichnosti [Scale F as a tool for studying the authoritarian potential of a person] // Tr. SPIIRAN. — 2012. — No. 21 (in Russian).

Краснов А. В. Социальная психология: психология малых групп. — Пермь, 2020.

Krasnov A. V. Sotsial'naya psikhologiya: psikhologiya malykh grupp [Social psychology: psychology of small groups]. — Perm', 2020 (in Russian).

Лебон Г. Психология народов и масс. — СПб.: Макет, 1995.

Lebon G. Psikhologiya narodov i mass [Psychology of peoples and masses]. — Saint Petersburg: Maket, 1995 (in Russian).

Мазалов В. В., Токарева Ю. С. Репутация арбитров в моделях проведения переговоров // Труды Карельского научного центра РАН. — 2012. — № 5.

Mazalov V. V., Tokareva Yu. S. Reputatsiya arbitrov v modelyakh provedeniya peregovorov [Reputation of arbitrators in models of negotiations] // Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN. — 2012. — No. 5 (in Russian).

Майерс Д. Социальная психология. — СПб.: Питер, 2019.

Mayyers D. Sotsial'naya psikhologiya [Social psychology]. — Saint Petersburg: Piter, 2019 (in Russian).

Максимова О. В., Григорьев В. И. Четырехфакторный вычислительный эксперимент для задачи случайного блуждания на двумерной решетке // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 6. — С. 907–918. — DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-6-905-918

Maksimova O. V., Grigor'yev V. I. Chetyrekhfaktornyy vychislitel'nyy eksperiment dlya zadachi sluchaynogo bluzhdaniya na dvumernoy reshetke [Four-factor computational experiment for the problem of random walk on a two-dimensional lattice] // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 6. — P. 907–918 (in Russian).

Орлов А. И. Консенсус и истина (комментарий к опубликованной ранее статье И. З. Аронова и О. В. Максимовой) // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2017. — № 3 (83). — С. 78–79.

Orlov A. I. Konsensus i istina (kommentariy k opublikovannoy vyshe stat'ye I. Z. Aronova i O. V. Maksimovoy) [Consensus and truth (comments to the article by I. Z. Aronov and O. V. Maximova)] // Industrial laboratory. Diagnostics of materials. — 2017. — No. 3 (83). — P. 78–79 (in Russian).

Почебут Л. Г. Социальная психология. — СПб.: Питер, 2017.

Pochebut L. G. Sotsial'naya psikhologiya. — Saint Petersburg: Piter, 2017 (in Russian).

Талеб Н. Н. Рискуя собственной шкурой: скрытая асимметрия повседневной жизни. — М.: КоЛибри, Азбука-Аттикус, 2022.

Taleb N. N. Riskuya sobstvennoy shkuroy: skrytaya asimmetriya povsednevnoy zhizni [Risking your own skin: the hidden asymmetries of everyday life]. — Moscow: KoLibri, Azbuka-Attikus, 2022 (in Russian).

Чеботарев П. Ю., Агаев Р. П. Об асимптотике в моделях консенсуса // Управление большими системами: сборник трудов. — 2013. — Выпуск 43.

Chebotarev P. Yu., Agayev R. P. Ob asimptotike v‘modelyakhkonsensusa [On asymptotics in consensus models] // Upravleniye bol'shimi sistemami: sbornik trudov. — 2013. — No. 43 (in Russian).

Aronov I. Z., Maksimova O. V., Grigoryev V. I. Analysis of consensus-building time in social groups based on the results of statistical modeling. — Netherlands: River Publishers, 2018. — P. 1–31.

DeGroot M. H. Reaching a consensus // Journal of the American Statistical Association. — 1974. — Vol. 69, No. 345.

Efron B., Tibshirani R. Statistical data analysis in the computer age // Sci. New Ser. — 1991. — Vol. 253, No. 5018. — P. 390–395.

Gavrilets S. et al. Convergence to consensus in heterogeneous groups and the emergence of informal leadership // Sci. Rep. — 2016. — No. 6. — 29704. — DOI: 10.1038/srep29704

Hart P. Irving L. Janis' Victims of Groupthink // Political Psychology. — 1991. — Vol. 12, No. 2. — P. 247–278.

Harvey J. B. The Abilene paradox and other meditations on management // Organizational Dynamics. — 1974. — Vol. 3, No. 1.

Janis I. L. Victims of groupthink: a psychological study of foreign. Policy Decision and Fiascoes. — Boston: Houghton Mifflin, 1972.

Kemeny J. G., Snell J. L. Finite Markov chains. — Princeton: The University Series in Undergraduate Mathematics, 1960.

Kerr N. L. Illusions of efficacy: The effects of group size on perceived efficacy in social dilemmas // Journal of Experimental Social Psychology. — 1989. — Vol. 25. — P. 287–313.

Maksimova O. V., Aronov I. Z. Study of factors influence on the variability of time for consensus building in coalitions based on regular Markov chains // International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences. — 2021. — Vol. 6, No. 4. — P. 1076–1088. — https://doi.org/10.33889/IJMEMS.2021.6.4.063

Open science collaboration. Estimating the reproducibility of psychological science // Science. — Vol. 349, No. 6251. — 2015. — 55 p.

Zazhigalkin A. V., Aronov I. Z., Maksimova O. V., Papic L. Control of consensus convergence in technical committees of standardization on the basis of regular Markov chains model // International Journal of Systems Assurance Engineering and Management. — 2019. — No. 1. — P. 1–8. — DOI:https://doi.org/10.1007/s13198-019-00765-1