КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2023 Т. 15 № 5 С. 1153–1167
DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-5-1153-1167

Ки&М

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 519.62

Численное решение систем нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами одношаговым методом Галёркина

С. В. Русских[a], Ф. Н. Шклярчук[b]

Институт прикладной механики РАН,
Россия, 125040, г. Москва, Ленинградский пр., д. 7

E-mail: [a] sergey.russkih@rambler.ru, [b] shklyarchuk@list.ru

Получено 17.04.2023, после доработки — 04.06.2023.
Принято к публикации 13.07.2023.

Рассматривается нелинейная колебательная система, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, в которой в явном виде выделяются члены, линейно зависящие от координат, скоростей и ускорений; нелинейные члены записываются в виде неявных функций от этих переменных. Для численного решения начальной задачи, описываемой такой системой дифференциальных уравнений, используется одношаговый метод Галёркина. На шаге интегрирования неизвестные функции представляются в виде суммы линейных функций, удовлетворяющих начальным условиям, и нескольких заданных корректирующих функций в виде полиномов второй и выше степеней с неизвестными коэффициентами. Дифференциальные уравнения на шаге удовлетворяются приближенно по методу Галёркина на системе корректирующих функций. Получаются алгебраические уравнения с нелинейными членами, которые на каждом шаге решаются методом итераций. Из решения в конце каждого шага определяются начальные условия на следующем шаге.

Корректирующие функции берутся одинаковыми для всех шагов. В общем случае для расчетов на больших интервалах времени используются 4 или 5 корректирующих функций: в первом наборе — базовые степенные функции от 2-й до 4-й или 5-й степеней; во втором наборе — образованные из базовых функций ортогональные степенные полиномы; в третьем наборе — образованные из базовых функций специальные линейно независимые многочлены с конечными условиями, упрощающими «стыковку» решений на следующих шагах.

На двух примерах расчета нелинейных колебаний систем с одной и с двумя степенями свободы выполнены численные исследования точности численного решения начальных задач на различных интервалах времени по методу Галёркина с использованием указанных наборов степенных корректирующих функций. Выполнены сравнения результатов, полученных по методу Галёркина и по методам Адамса и Рунге–Кутты четвертого порядка. Показано, что методом Галёркина можно получить достоверные результаты на значительно больших интервалах времени, чем по методам Адамса и Рунге–Кутты.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, нелинейные системы, начальная задача, численные решения, одношаговый метод Галёркина

Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН).

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2023 VOL. 15 NO. 5 P. 1153–1167
DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-5-1153-1167

UDC: 519.62

Numerical solution of systems of nonlinear second-order differential equations with variable coefficients by the one-step Galerkin method

S. V. Russkikh[a], F. N. Shklyarchuk[b]

Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
7 Leningradsky ave., Moscow, 125040, Russia

E-mail: [a] sergey.russkih@rambler.ru, [b] shklyarchuk@list.ru

Received 17.04.2023, after completion — 04.06.2023.
Accepted for publication 13.07.2023.

A nonlinear oscillatory system described by ordinary differential equations with variable coefficients is considered, in which terms that are linearly dependent on coordinates, velocities and accelerations are explicitly distinguished; nonlinear terms are written as implicit functions of these variables. For the numerical solution of the initial problem described by such a system of differential equations, the one-step Galerkin method is used. At the integration step, unknown functions are represented as a sum of linear functions satisfying the initial conditions and several given correction functions in the form of polynomials of the second and higher degrees with unknown coefficients. The differential equations at the step are satisfied approximately by the Galerkin method on a system of corrective functions. Algebraic equations with nonlinear terms are obtained, which are solved by iteration at each step. From the solution at the end of each step, the initial conditions for the next step are determined.

The corrective functions are taken the same for all steps. In general, 4 or 5 correction functions are used for calculations over long time intervals: in the first set — basic power functions from the 2nd to the 4th or 5th degrees; in the second set — orthogonal power polynomials formed from basic functions; in the third set — special linear-independent polynomials with finite conditions that simplify the "docking" of solutions in the following steps.

Using two examples of calculating nonlinear oscillations of systems with one and two degrees of freedom, numerical studies of the accuracy of the numerical solution of initial problems at various time intervals using the Galerkin method using the specified sets of power-law correction functions are performed. The results obtained by the Galerkin method and the Adams and Runge – Kutta methods of the fourth order are compared. It is shown that the Galerkin method can obtain reliable results at significantly longer time intervals than the Adams and Runge – Kutta methods.

Keywords: ordinary differential equations, nonlinear systems, initial problem, numerical solutions, one-step Galerkin method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 5, pp. 1153–1167 (Russian).

The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IAM RAS).

1. Введение

Численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) посвящена обширная литература: учебные пособия [Демидович, Марон, Шувалова, 1967; Бахвалов, Жидков, Кобельков, 2015] и др.; монографии [Коллатц, 1953; Хайрер, Нёрсетт, Ваннер, 1990; Хайрер, Ваннер, 1999] и др.; многочисленные научные статьи. В фундаментальных трудах [Хайрер, Нёрсетт, Ваннер, 1990; Хайрер, Ваннер, 1999] на основе исследований авторов и других исследователей (приведены ссылки на сотни публикаций) представлены теоретические обоснования вычислительных схем различных модификаций и комбинаций явных и неявных одношаговых методов типа Рунге – Кутты и многошаговых методов типа Адамса и некоторых других методов для нежестких и жестких задач, включая дифференциально-алгебраические задачи. Большое внимание уделено выбору шага, оценкам локальных и глобальных (накопленных) погрешностей, а также оценкам устойчивости и сходимости численных решений. Приведено много примеров решения тестовых задач с использованием различных компьютерных программ со сравнениями и анализом результатов. В этих работах в основном рассматриваются системы первого и второго порядков, разрешенные относительно старших производных. В одном примере [Хайрер, Ваннер, 1999] для многозвенной механической системы с матрицей инерции, зависящей от времени и перемещений системы, ускорения рассматриваются как независимые параметры и уравнения движения системы записываются в виде нелинейных алгебраических уравнений, к которой добавляются дифференциальные соотношения для скоростей и перемещений. Наряду с многочисленными работами, отмеченными в [Хайрер, Ваннер, 1999], жестким и дифференциально-алгебраическим задачам также посвящены работы [Скворцов, 2007; Латыпов, Никуличев, 2007; Булатов, Тыглиян, Филиппов, 2011; Скворцов, 2015; Белов, Калиткин, 2016] и др.

Отметим некоторые оригинальные подходы к численному решению начальной задачи для ОДУ. В работе [Волков-Богородский и др., 2003] предлагается параметризировать уравнения и затем интегрировать их по параметру. Метод наименьших квадратов для минимизации невязки на шаге применен к решению линейных задач для ОДУ и для дифференциально-алгебраических задач с использованием разложения в ряд по заданным функциям с неизвестными коэффициентами в работах [Булатов и др., 2010; Чистяков, Чистякова, 2013]. В работах [Залеткин, 2010; Арушанян, Залеткин, 2019] и ряде других работ этих авторов для приближенного решения начальной задачи, описываемой ОДУ, используются разложения по полиномам Чебышёва, а в работах [Акульченко, Латыпов, Никульчев, 1998; Латыпов, Попик, 2011] — по полиномам Эрмита.

Метод Галёркина обычно используется при решении краевых задач в слабой формулировке для сведения их к алгебраическим уравнениям или к ОДУ на системе глобальных или локальных базисных функций [Демидович, Марон, Шувалова, 1967; Бахвалов, Жидков, Кобельков, 2015; Коллатц, 1953]; в последнем случае этот метод, так же как в вариационной формулировке задачи, называется методом конечных элементов или методом конечных объемов [Ершов, Шахверди, 1984; Ioriatti, Dumbser, 2018].

Большие нестационарные системы, в которых одновременно происходят медленные и быстрые движения, с одной стороны, требуют выполнения расчетов на больших интервалах времени, а с другой стороны — использования весьма малых шагов интегрирования по времени (меньше периода колебаний системы с максимальной собственной частотой). Например, в случае дискретных моделей неоднородных сплошных сред с отраженными ударными волнами, локальными разрушениями и пр. для получения достоверного решения необходимо выполнить численные эксперименты, используя различные методы (программы) и вычисления на разных шагах. Это также относится к нелинейным системам при расчете предельных циклов колебаний, а также хаотических колебаний со странными аттракторами.

Вопросы сходимости численных решений ОДУ и их локальной и глобальной погрешностей, а также выбора длины шага исследовались в работах [Хайрер, Нёрсетт, Ваннер, 1990; Хайрер, Ваннер, 1999], отмеченных там в соответствующих ссылках работах и в [Белов, Калиткин, 2016; Куликов, Хрусталева, 2010; Вайнер, Куликов, 2014]. При решении ОДУ большой размерности, записанных в общей матричной форме, которые, например, получаются после дискретизации по координатам в задачах динамики сплошных деформируемых сред и тел (конструкций) и нестационарной аэрогидродинамики [Ершов, Шахверди, 1984; Баженов, Чекмарев, 2000], для дискретизации по времени обычно используются сравнительно простые схемы: 1) центральные разности второго порядка с квадратичной аппроксимацией на двух шагах [Belytschko, 1976]; 2) нецентральные разности назад третьего порядка с кубической аппроксимацией на трех шагах [Houbolt, 1950]; 3) метод обобщенного ускорения с квадратичной аппроксимацией на одном шаге и с двумя выбираемыми из условия устойчивости параметрами [Newmark, 1959]; 4) модифицированный метод линейного ускорения (θ-метод), в котором считается, что ускорение изменяется линейно на расширенном шаге θh, где $\theta > 1{,}37$, для безусловной устойчивости метода [Bathe, Wilson, 1976]. Эти четыре метода приводят задачу к рекуррентным алгебраическим соотношениям в матричном виде, которые решаются с учетом начальных условий по шагам; они являются частными случаями общей разностной схемы [Krieg, Key, 1973].

В работах [Русских, Шклярчук, 2018а; Русских, Шклярчук, 2019] метод Бубнова–Галёркина использовался для решения терминальных задач управления нестационарными колебаниями нелинейных систем и систем с переменными параметрами. В работе [Русских, Шклярчук, 2022] метод Галёркина был применен для численного решения начальных задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, с аппроксимацией решения на каждом шаге заданными степенными функциями.

Основная цель работы — численное решение начальной задачи для нелинейных колебательных систем на больших интервалах времени (при большом числе циклов колебаний). Такая задача является практически значимой и к настоящему времени исследована недостаточно. Здесь на примерах выполнены сравнительные исследования точности и сходимости численных решений начальных задач одношаговым методом Галёркина при использовании различных наборов аппроксимирующих (корректирующих) функций на шаге интегрирования со сравнениями с решениями по методам Адамса и Рунге–Кутты. Сравнения результатов численного решения поставленной задачи с методами, адаптированными для интегрирования «жестких» систем — методы Radau5 и BDF, были приведены в работе [Русских, Шклярчук, 2022].

2. Алгоритм численного решения начальных задач одношаговым методом Галёркина

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений во временной области вида

$$L_i = \sum_{j=1}^{n} \left[a_{ij}\ddot{x}_j + b_{ij}\dot{x}_j + c_{ij}x_j \right] + N_i - X_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $x_j(t)$ — неизвестные функции; $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_{ij}(t)$ — переменные коэффициенты; $N_i(x_j, \dot{x}_j, \ddot{x}_j, t)$ — нелинейные функции; $X_i(t)$ – заданные воздействия; точкой обозначается производная по времени t.

Задача Коши для системы (1) решается при заданных начальных условиях при $t = 0$, которые записываются в виде $x_j(0) = x_{j,0}$, $\dot{x}_j(0) = v_{j,0}$. Для численного решения этой задачи время t будем разбивать на достаточно малые интервалы (шаги) $h_k = t_k - t_{k-1}$ и в качестве основных неизвестных будем рассматривать значения переменных $x_j(t_k) = x_{j,k}$ и их скоростей $\dot{x}_j(t_k) = v_j(t_k) = v_{j,k}$ в моменты времени t_k, $k = 1, 2, \ldots$

На каждом шаге $t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$, $k = 1, 2, \ldots$, вводим безразмерное время

$$\xi = \frac{1}{h_k}(t - t_{k-1}), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1; \tag{2}$$

при этом для упрощения обозначений индекс k при ξ на переменном шаге будем опускать.

Уравнения (1) для безразмерного времени (2) на k-м шаге записываются в виде

$$L_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{h_k^2} a_{ij}^{(k)} x_j'' + \frac{1}{h_k} b_{ij}^{(k)} x_j' + c_{ij}^{(k)} x_j \right] + N_i^{(k)}(x_j, x_j', x_j'', \xi) - X_i^{(k)}(\xi) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где неизвестные x_j и переменные коэффициенты $a_{ij}^{(k)}$, $b_{ij}^{(k)}$, $c_{ij}^{(k)}$ являются функциями ξ, а штрихом обозначаются производные по ξ.

Неизвестные функции $x_j(\xi)$ на k-м шаге $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ представляются аппроксимирующими рядами

$$x_j(\xi) = x_{j,k-1} + v_{j,k-1} h_k \xi + \sum_{r=1}^{s} z_{j,r}^{(k)} \varphi_r(\xi), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где $\varphi_r(\xi)$ — заданные корректирующие функции, удовлетворяющие условиям $\varphi_r(0) = 0$, $\varphi_r'(0) = 0$, берутся одинаковыми на всех шагах $k = 1, 2, \ldots$ и для всех переменных $x_j(\xi)$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $z_{j,r}^{(k)}$ — неизвестные коэффициенты.

Уравнения (3) на k-м шаге удовлетворяются приближенно по методу Галёркина на системе функций $\varphi_p(\xi)$:

$$\int_0^1 L_i(x_j, x_j', x_j'', \xi) \varphi_p(\xi)\, d\xi = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad p = 1, 2, \ldots, s. \tag{5}$$

Уравнения (5) с учетом (3), (4) записываются в виде системы $n \times s$ алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов $z_{j,r}^{(k)}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{s} g_{ij,pr}^{(k)} z_{j,r}^{(k)} + l_{i,p}^{(k)} + m_{i,p}^{(k)} - q_{i,p}^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad p = 1, 2, \ldots, s, \tag{6}$$

где

$$g_{ij,pr}^{(k)} = \frac{1}{h_k^2} \int_0^1 a_{ij}^{(k)} \varphi_p \varphi_r''\, d\xi + \frac{1}{h_k} \int_0^1 b_{ij}^{(k)} \varphi_p \varphi_r'\, d\xi + \int_0^1 c_{ij}^{(k)} \varphi_p \varphi_r\, d\xi,$$
$$l_{i,p}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \left[b_{ij}^{(k)} v_{j,k-1} + c_{ij}^{(k)} (x_{j,k-1} + v_{j,k-1} h_k \xi) \right] \varphi_p\, d\xi, \tag{7}$$
$$m_{i,p}^{(k)} = \int_0^1 N_i^{(k)} \varphi_p\, d\xi, \quad q_{i,p}^{(k)} = \int_0^1 X_i^{(k)} \varphi_p\, d\xi.$$

Нелинейные алгебраические уравнения (6) с интегралами $m_{i,p}^{(k)}$, содержащими нелинейные функции $N_i^{(k)}(x_j, x_j', x_j'', \xi)$, решаются методом последовательных приближений. В первом приближении функции $N_i^{(k)}$ можно заменить их значениями $\left(N_i^{(k)}\right)_{k-1}$ на предыдущем шаге $t = t_{k-1}$

($\xi = 0$) или, с целью улучшения сходимости, использовать линейные аппроксимации:

$$N_i^{(k)} \approx \left(N_i^{(k)}\right)_{k-1} + \left(\frac{\partial N_i^{(k)}}{\partial \xi}\right)_{k-1} \xi + \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial N_i^{(k)}}{\partial x_j}\right)_{k-1} x_j + \left(\frac{\partial N_i^{(k)}}{\partial x'_j}\right)_{k-1} x'_j + \left(\frac{\partial N_i^{(k)}}{\partial x''_j}\right)_{k-1} x''_j\right].$$

Для упрощения вычисления интегралов, содержащих переменные коэффициенты $a_{ij}^{(k)}(\xi)$, $b_{ij}^{(k)}(\xi)$, $c_{ij}^{(k)}(\xi)$, их на малом k-м шаге можно считать постоянными и равными осредненным значениям как

$$a_{ij}^{(k)}(\xi) \approx \frac{1}{2}(a_{ij,k-1} + a_{ij,k})$$

или аппроксимировать по линейному закону как

$$a_{ij}^{(k)}(\xi) \approx a_{ij,k-1}(1-\xi) + a_{ij,k}\xi.$$

После решения уравнений (6) на k-м шаге с заданной точностью вычисления интегралов $m_{i,p}^{(k)}$ и коэффициентов $z_{j,r}^{(k)}$ затем с использованием выражения (4) определяются переменные x_j и их производные для момента времени $t = t_k$ ($\xi = 1$):

$$x_{j,k} = x_{j,k-1} + v_{j,k-1}h_k + \sum_{r=1}^{s} z_{j,r}^{(k)}\varphi_r(1),$$

$$v_{j,k} = \dot{x}_{j,k} = \frac{1}{h_k}x'_{j,k} = v_{j,k-1} + \frac{1}{h_k}\sum_{r=1}^{s} z_{j,r}^{(k)}\varphi'_r(1),$$

$$\ddot{x}_{j,k} = \frac{1}{h_k^2}x''_{j,k} = \frac{1}{h_k^2}\sum_{r=1}^{s} z_{j,r}^{(k)}\varphi''_r(1).$$

Далее полученные значения $x_{j,k}$, $v_{j,k}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, используются в качестве начальных условий для решения уравнений (1) на $(k+1)$-м шаге по методу Галёркина; для этого в рядах (4), уравнениях (5) и в выражениях для коэффициентов (7) указатель шага k заменяется на $k + 1$.

3. Выбор корректирующих функций

В качестве корректирующих функций $\varphi_r(\xi)$, уточняющих линейный закон изменения переменных на малом временном шаге, в рядах (4) можно использовать следующие наборы линейно независимых степенных функций, удовлетворяющих условиям $\varphi_r(0) = 0$, $\varphi'_r(0) = 0$.

1. Базовые степенные функции:

$$\varphi_1 = \xi^2, \quad \varphi_2 = \xi^3, \quad \varphi_3 = \xi^4, \quad \varphi_4 = \xi^5, \quad \varphi_5 = \xi^6. \tag{8}$$

2. Ортогональные функции, образованные из базовых степенных функций (рис. 1, *а*):

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \xi^2,\\
&\varphi_2 = 6\xi^3 - 5\xi^2,\\
&\varphi_3 = 28\xi^4 - 42\xi^3 + 15\xi^2,\\
&\varphi_4 = 120\xi^5 - 252\xi^4 + 168\xi^3 - 35\xi^2,\\
&\varphi_5 = 495\xi^6 - 1320\xi^5 + 1260\xi^4 - 504\xi^3 + 70\xi^2;
\end{aligned} \tag{9}$$

они удовлетворяют условиям $\varphi_r(1) = 1$, а также

$$\int_0^1 \varphi_p \varphi_r \, d\xi = 0 \quad \text{при } p \neq r, \qquad \int_0^1 \varphi_r^2 \, d\xi = \frac{1}{2r+3}.$$

3. Степенные функции, удовлетворяющие определенным условиям при $\xi = 1$ (рис. 1, *б*):

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad \varphi_1(1) = 1, \quad \varphi_1'(1) = 0;\\
&\varphi_2 = \xi^3 - \xi^2, \quad \varphi_2(1) = 0, \quad \varphi_2'(1) = 1;\\
&\varphi_3 = \xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4, \quad \varphi_3(1) = \varphi_3'(1) = 0;\\
&\varphi_4 = \xi^2 - 4\xi^3 + 5\xi^4 - 2\xi^5, \quad \varphi_4(1) = \varphi_4'(1) = 0;\\
&\varphi_5 = \xi^2 - 8\xi^3 + 19\xi^4 - 18\xi^5 + 6\xi^6, \quad \varphi_5(1) = \varphi_5'(1) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

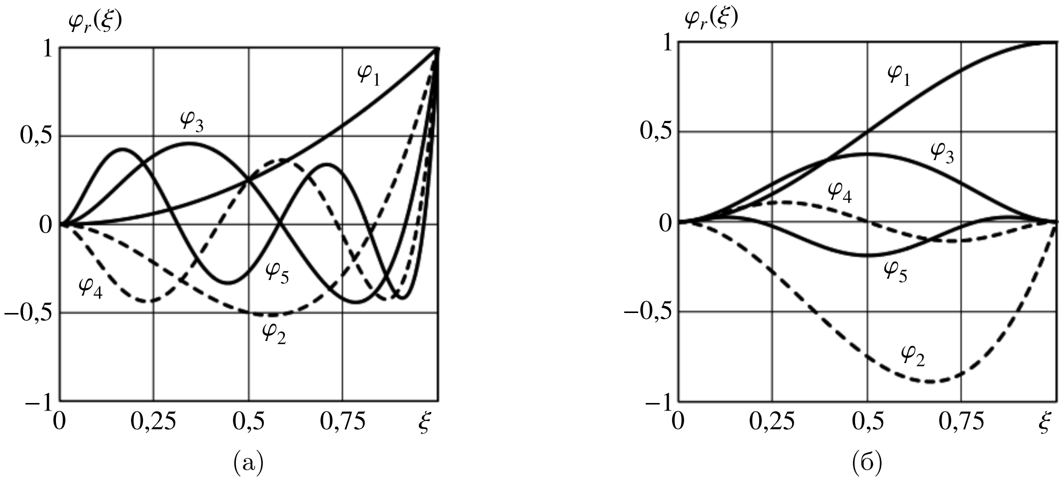

Рис. 1. Графики корректирующих функций: а) (9); б) (10)

Базовые функции (8) при большом их числе ($s \geqslant 8$) приводят к плохообусловленным матрицам коэффициентов $g_{ij,pr}^{(k)}$, поэтому эти функции можно использовать только при малых s. Ортогональные полиномы (9) имеют большие коэффициенты и являются «колебательными» функциями на интервале $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Поэтому при вычислении интегралов (7) с переменными коэффициентами при большом числе s они могут привести к численным погрешностям, например, за счет малых разностей больших чисел. Наиболее удобными для численного интегрирования являются функции (10); они упрощают «стыковку» решений на соседних шагах.

4. Примеры расчета

4.1. Дифференциальное уравнение второго порядка с кубической нелинейностью

Рассмотрим нелинейную консервативную систему с одной степенью свободы ($n = 1$), свободные колебания которой описываются дифференциальным уравнением с начальными условиями

$$\ddot{x} + 100x + 200x^3 = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Полная энергия этой системы равна $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + 50\left(x^2 + x^4\right) = 100$. Отсюда получаются фазовая характеристика и период колебаний:

$$\dot{x} = \pm 10\sqrt{2 - x^2 - x^4},$$

$$T = \frac{4}{10}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2 - x^4}} = \frac{4}{10}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{2 + \sin^2\psi}} = 0{,}40043095\ldots$$

Выполняется условие периодичности $x(t + mT) = x(t)$ при $m = 1, 2, 3, \ldots$

В ходе предварительных расчетов было установлено, что приемлемая точность решения на больших интервалах времени получается при количестве аппроксимирующих функций не менее четырех ($s \geqslant 4$).

Для сравнения приведем результаты численного решения данной задачи с постоянным шагом h на больших интервалах времени по стандартным программам в PTC MathCad, реализующим метод Адамса (А) четвертого порядка и метод Рунге–Кутты (Р.–К.) четвертого порядка, а также метод Галёркина в следующих расчетных случаях:

Γ_1 — набор функций (8) при $s = 4$,

Γ_2 — набор функций (8) при $s = 5$,

Γ_3 — набор функций (9) при $s = 4$,

Γ_4 — набор функций (9) при $s = 5$,

Γ_5 — набор функций (10) при $s = 3$,

Γ_6 — набор функций (10) при $s = 4$.

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений начиналось в первом приближении от решения линейных уравнений и затем уточнялось по методу итераций до достижения заданной точности.

В табл. 1 приведены результаты вычисления до 4-го знака после десятичной запятой значений E, x и $\dot{x}$ с шагом $h = 0{,}005$ для моментов времени до $t = 1000$, а в табл. 2 — с шагом $h = 0{,}001$ также до $t = 1000$. В табл. 3 для проверки сходимости численного решения приведены результаты вычислений до 16-го знака после запятой значений E, x и $\dot{x}$ с шагом $h = 0{,}0001$ для моментов времени до $t = 100$ при использовании методов Адамса, Рунге–Кутты и Γ_5, Γ_6. При использовании трех аппроксимирующих функций ($s = 3$) на мелком шаге сохраняется высокая точность, при этом решение системы алгебраических уравнений (6) упрощается, так как появляется возможность получения ее аналитического решения путем обращения матрицы 3-го порядка коэффициентов $g_{ij,pr}^{(k)}$.

В табл. 4 приведены расширенные вычисления до 8-го знака после десятичной запятой на длительных интервалах времени с шагом $h = 0{,}001$ по методам Адамса, Рунге–Кутты и Γ_6. Для оценки точности в табл. 4 вычислены абсолютные погрешности $|\Delta\dot{x}|$ по значению скорости, полученной из численного решения для скорости $\dot{x}$ и скорости $\dot{x}$, вычисленной из фазовой характеристики по найденному x. Во всех случаях для решения нелинейных уравнений с точностью до 10^{-6} требовалось не более четырех итераций. Результаты вычислений x и $\dot{x}$ по методу Адамса при $t = 1000$ сильно расходятся с результатами вычислений по методу Рунге–Кутты и по методу Галёркина; последние два метода при $h = 0{,}001$, $t < 8000$ дают близкие результаты. При увеличении интервала вычислений $t > 8000$ метод Рунге–Кутты при $h = 0{,}001$ также начинает давать ошибочные результаты. Накопление глобальной ошибки вычислений по методам Адамса и Рунге–Кутты происходит в основном за счет «сдвига» кривых, представляющих результаты, вдоль t, т. е. за счет медленного изменения расчетного периода T.

Таблица 1. Результаты решения задачи при $h = 0{,}005$

$h = 0{,}005$		$t = 1$	$t = 10$	$t = 100$	$t = 1000$
А.	E	100,0005	100,0032	100,0285	100,2706
	x	−0,9998	0,9828	−0,0686	0,9819
	$\dot{x}$	−0,3230	3,1799	14,1274	3,3402
Р.–К.	E	99,9997	99,9975	99,9746	99,7474
	x	−0,9998	0,9826	−0,1441	−0,3454
	$\dot{x}$	−0,3235	3,1988	14,0652	13,6435
Γ_1	E	100,0000	100,0002	100,0016	100,0158
	x	−0,9998	0,9827	−0,1057	−0,5387
	$\dot{x}$	−0,3232	3,1886	14,1023	−12,7509
Γ_2	E	100,0000	100,0001	100,0014	100,0141
	x	−0,9998	0,9827	−0,1059	−0,5174
	$\dot{x}$	−0,3232	3,1886	14,1021	−12,8875
Γ_3	E	100,0000	100,0001	100,0004	100,0042
	x	−0,9998	0,9827	−0,1073	−0,3889
	$\dot{x}$	−0,3232	3,1889	14,1010	−13,5128
Γ_4	E	100,0000	100,0000	100,0003	100,0028
	x	−0,9998	0,9827	−0,1075	−0,3709
	$\dot{x}$	−0,3232	3,1890	14,1008	−13,5777
Γ_5	E	100,0039	100,0394	100,3944	104,0974
	x	−0,9998	0,9840	0,4307	0,7561
	$\dot{x}$	−0,3220	3,0785	13,3715	−10,8789
Γ_6	E	100,0000	100,0000	100,0003	100,0030
	x	−0,9998	0,9827	−0,1074	−0,3735
	$\dot{x}$	−0,3232	3,1888	14,1009	−13,5687

4.2. Система дифференциальных уравнений нелинейных колебаний твердого тела на тросе переменной длины

Рассмотрим плоские нелинейные колебания симметричного твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины (рис. 2).

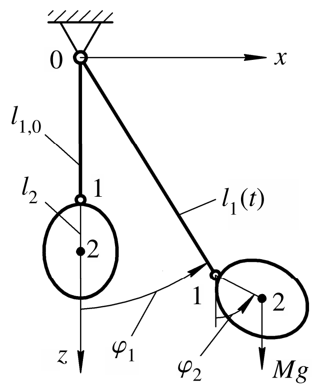

Рис. 2. Твердое тело, подвешенное на тросе переменной длины

Уравнения колебаний системы с большими углами поворота троса $\varphi_1(t)$ и тела $\varphi_2(t)$ при условии, что натяжение троса остается положительным, записывается в виде [Русских, Шкляр-

Таблица 2. Результаты решения задачи при $h = 0{,}001$

$h = 0{,}001$		$t = 1$	$t = 10$	$t = 100$	$t = 1000$
А.	E	100,0003	100,0028	100,0278	100,2747
	x	−0,9998	0,9828	−0,0699	0,9839
	$\dot{x}$	−0,3231	3,1809	14,1267	3,1646
Р.–К.	E	100,0000	100,0000	100,0000	99,9999
	x	−0,9998	0,9827	−0,1078	−0,3322
	$\dot{x}$	−0,3232	3,1889	14,1005	−13,7022
Γ_1	E	100,0000	100,0000	99,9999	99,9994
	x	−0,9998	0,9827	−0,1079	−0,3252
	$\dot{x}$	−0,3232	3,1890	14,1004	−13,7224
Γ_2	E	100,0000	100,0000	99,9999	99,9994
	x	−0,9998	0,9827	−0,1079	−0,3252
	$\dot{x}$	−0,3232	3,1890	14,1004	−13,7224
Γ_3	E	100,0000	100,0000	100,0000	99,9998
	x	−0,9998	0,9827	−0,1078	−0,3301
	$\dot{x}$	−0,3232	3,1889	14,1005	−13,7084
Γ_4	E	100,0000	100,0000	100,0000	99,9998
	x	0,9998	0,9827	−0,1078	−0,3301
	$\dot{x}$	−0,3232	3,1889	14,1005	−13,7084
Γ_5	E	100,0000	100,0003	100,0031	100,0316
	x	−0,9998	0,9827	−0,1034	−0,7232
	$\dot{x}$	−0,3231	3,1881	14,1041	−10,9726
Γ_6	E	100,0000	100,0000	100,0000	100,0000
	x	−0,9998	0,9827	−0,1078	−0,3333
	$\dot{x}$	−0,3232	3,1889	14,1005	−13,6989

Таблица 3. Результаты решения задачи при $h = 0{,}0001$

$h = 0{,}0001$		$t = 1$	$t = 10$	$t = 100$
А.	E	100,0003411505204	100,0033197856596	100,0304794139769
	x	−0,9998579177073429	0,9831528220979808	−0,06746866551904707
	$\dot{x}$	−0,2931169504103779	3,149312901372309	14,12811681208436
Р.–К.	E	99,99999999999925	99,99999999999628	99,99999999992153
	x	−0,9998567171007587	0,9830231007087196	−0,1078034343681529
	$\dot{x}$	−0,2931814621141377	3,160116752722768	14,10050835397234
Γ_5	E	100,0000000316005	100,0000003158558	100,0000031580761
	x	−0,9998258996063791	0,9827056588449606	−0,1077990762438172
	$\dot{x}$	−0,3231703634638872	3,188933907893055	14,10051198726129
Γ_6	E	99,99999999999984	100,0000000000001	99,99999999997525
	x	−0,9998258994910807	0,9827056479551641	−0,1078034341531926
	$\dot{x}$	−0,3231703726690319	3,188934792575387	14,10050835414431

чук, 2018b]

$$l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + 2\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + l_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + g\sin\varphi_1 = 0,$$

$$l_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1 + \frac{J}{l_2 M}\ddot{\varphi}_2 + 2\dot{l}_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1 - l_1\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 + \ddot{l}_1\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + g\sin\varphi_2 = 0.$$

Таблица 4. Расширенные вычисления при $h = 0{,}001$

$h = 0,001$		$t = 2000$	$t = 4000$	$t = 8000$	$t = 16000$	$t = 32000$
А.	E	100,55171970	101,06603879	101,17238360	101,16972882	101,16996386
	x	−0,34819413	0,30641467	−0,10510445	0,24696065	0,24022503
	$\dot{x}$	−13,69341561	13,85140968	−14,18548093	−13,99530380	−14,00842958
	$\lvert\Delta\dot{x}\rvert$	0,04035033	0,07717749	0,08288890	0,08383117	0,08376902
Р.–К.	E	99,99983728	99,99967441	99,99934904	99,99869808	99,99739600
	x	−0,70206194	0,08720633	−0,96716128	0,78019220	−0,28989773
	$\dot{x}$	11,24350596	−14,11499454	−4,35443605	10,10325972	13,81609346
	$\lvert\Delta\dot{x}\rvert$	0,00001447	0,00002307	0,00014949	0,00012886	0,00018847
Γ_6	E	100,00000185	100,00000371	100,00000738	100,00001476	100,00002953
	x	−0,69839504	0,06891004	−0,98590495	0,94516930	0,79803798
	$\dot{x}$	11,28866173	−14,12525728	−2,88428373	5,55508772	9,78539432
	$\lvert\Delta\dot{x}\rvert$	0,00000016	0,00000026	0,00000256	0,00000266	0,00000302

Использовались следующие параметры системы: $l_1(t) = l_{10}\left(1 + \sin\frac{\pi t}{5}\right)$ м, $l_{10} = 4$ м; $l_2 = 1$ м; $M = 1000$ кг; $J = 1333$ кг $\cdot$ м^2. Приняты начальные условия: $\varphi_1(0) = 0{,}4$ рад, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\dot{\varphi}_2(0) = 0$.

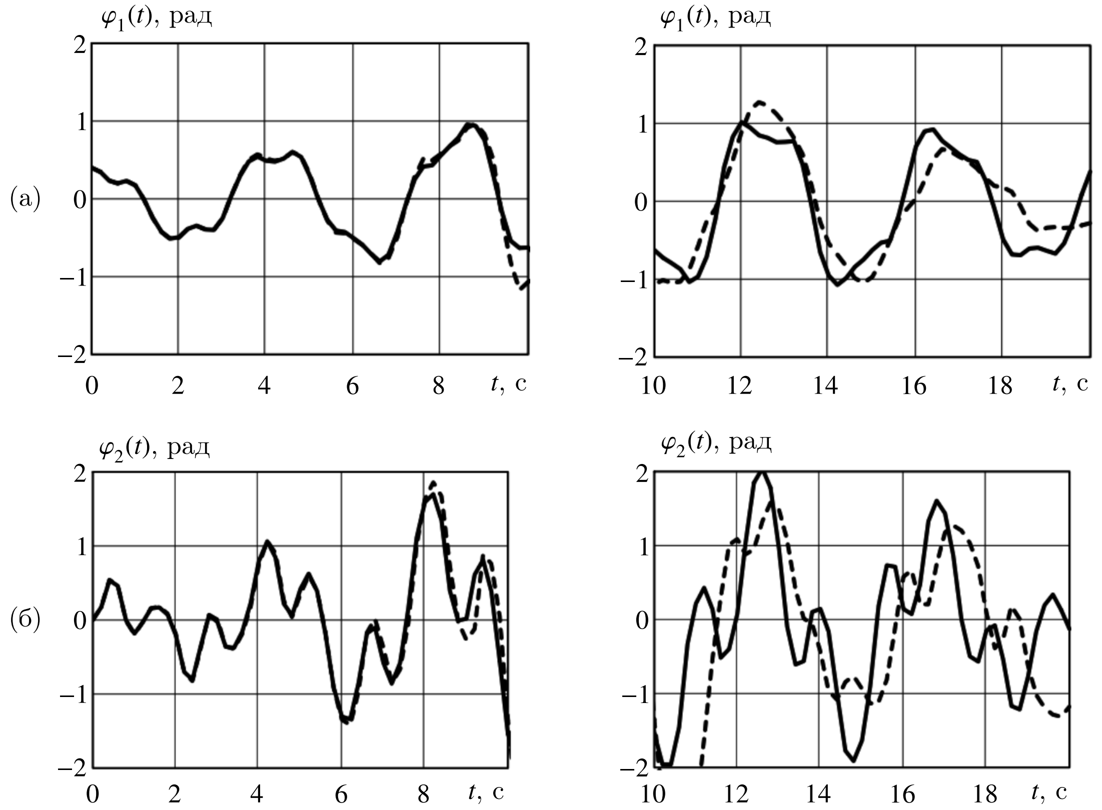

Рис. 3. Результаты численного решения

На рис. 3 приведены результаты численного решения этой задачи для углов $\varphi_1(t)$ (рис. 3, *а*) и $\varphi_2(t)$ (рис. 3, *б*) на интервале времени $t = 0$–20 с. Сплошными линиями показаны результаты, полученные по методу Адамса (А) с адаптивным шагом, которые для сравнения приняты за точные. Пунктирной линией показаны результаты, полученные по методу Галёркина (Γ_6) с постоянным шагом $h = 0{,}2$, который затем последовательно уменьшался. Начиная с шага $h = 0{,}05$, результаты решения по методу Галёркина совпадают в пределах масштаба графиков рис. 3 на всем интервале интегрирования с результатами, полученными по методу Адамса.

5. Выводы

1. Предложен новый подход для численного решения начальной задачи, описываемой нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. На шаге интегрирования каждая искомая функция представляется в виде суммы линейного решения, удовлетворяющего начальным условиям, и конечного ряда корректирующих степенных функций или образованных из них полиномов с неизвестными коэффициентами. Методом Галёркина получаются алгебраические уравнения для определения неизвестных коэффициентов на данном шаге с использованием в случае нелинейной системы процедуры итераций.

2. Рассмотрены примеры расчета с оценками сходимости и точности численных решений при различных числах аппроксимирующих функций и при различных постоянных шагах интегрирования.

3. На примерах расчета показано, что по методу Галёркина можно получить более точные и достоверные результаты численного решения начальных задач для нелинейных колебательных систем с переменными параметрами на больших интервалах времени, чем по методам Адамса и Рунге – Кутты 4-го порядка.

Список литературы (References)

Акульченко С. М., Латыпов А. Ф., Никульчев Ю. В. Метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием интерполяционных полиномов Эрмита // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1998. — Т. 38, № 10. — С. 1665–1670.

Akul'chenko S. M., Latypov A. F., Nikul'chev Yu. V. Metod chislennogo integrirovanija sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s ispol'zovaniem interpoljacionnyh polinomov Jermita [Method of numerical integration of systems of ordinary differential equations using Hermite interpolation polynomials] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1998. — Vol. 38, No. 10. — P. 1665–1670 (in Russian).

Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. Об одном аналитическом методе приближенного решения канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. — 2019. — № 3. — С. 65–69.

Arushanyan O. B., Zaletkin S. F. On some analytic method for approximate solution of systems of second order ordinary differential equations // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2019. — Vol. 74, No. 3. — P. 127–130. (Original Russian paper: *Arushanyan O. B., Zaletkin S. F.* Ob odnom analiticheskom metode priblizhennogo reshenija kanonicheskih sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka // Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mehanika. — 2019. — No. 3. — P. 65–69.)

Баженов В. Г., Чекмарев Д. Т. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом. — Нижний Новгород: Издательство ННГУ, 2000.

Bazhenov V. G., Chekmarev D. T. Reshenie zadach nestacionarnoj dinamiki plastin i obolochek variacionno-raznostnym metodom [Solving problems of nonstationary dynamics of plates and shells by the variational-difference method] // Nizhniy Novgorod: NNGU Publ., 2000 (in Russian).

Бахвалов И. В., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2015.

Bakhvalov I. V., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. Chislennye metody [Numerical methods]. — Moscow: Laboratory of Basic Knowledge Publ., 2015 (in Russian).

Белов А. А., Калиткин Н. Н. Выбор шага по кривизне для жестких задач Коши // Математическое моделирование. — 2016. — Т. 28, № 11. — С. 97–112.

Belov A. A., Kalitkin N. N. Curvature-based grid step selection for stiff Cauchy problems // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2017. — Vol. 9, No. 3. — P. 305–317. (Original Russian paper: *Belov A. A., Kalitkin N. N.* Vybor shaga po krivizne dlya zhestkih zadach Koshi // Matematicheskoe modelirovanie. — 2016. — Vol. 28, No. 11. — P. 97–112.)

Булатов М. В., Горбунов В. К., Мартыненко Ю. В., Нгуен Дин Конг. Вариационные методы к численному решению дифференциально-алгебраических уравнений // Вычислительная техника. — 2010. — Т. 15, № 5. — С. 3–13.

Bulatov M. V., Gorbunov V. K., Martynenko Ju. V., Nguen Din Kong. Variacionnye metody k chislennomu resheniju differencial'no-algebraicheskih uravnenij [Variational methods for the numerical solution of differential algebraic equations] // Computer technology. — 2010. — Vol. 15, No. 5. — P. 3–13 (in Russian).

Булатов М. В., Тыглиян А. В., Филиппов С. С. Об одном классе одношаговых одностадийных методов для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 7. — С. 1251–1265.

Bulatov M. V., Tygliyan A. V., Filippov S. S. A class of one-step one-stage methods for stiff systems of ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2011. — Vol. 51, No. 7. — P. 1167–1180. (Original Russian paper: *Bulatov M. V., Tygliyan A. V., Filippov S. S.* Ob odnom klasse odnoshagovyh odnostadijnyh metodov dlja zhestkih sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. — 2011. — Vol. 51, No. 7. — P. 1251–1265.)

Вайнер Р., Куликов Г. Ю. Эффективное управление точностью численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и оптимальные интерполяционные равнозначные блочные методы с переменным шагом // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 4. — С. 591–607.

Weiner R., Kulikov G. Yu. Efficient error control in numerical integration of ordinary differential equations and optimal interpolating variable-stepsize peer methods // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2011. — Vol. 54, No. 4. — P. 604–619. (Original Russian paper: *Weiner R., Kulikov G. Yu.* Effektivnoe upravlenie tochnost'yu chislennogo integrirovaniya obyknovennyh differencial'nyh uravnenij i optimal'nye interpolyacionnye ravnoznachnye blochnye metody s peremennym shagom // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. — 2011. — Vol. 54, No. 4. — P. 591–607.)

Волков-Богородский Д. Б., Данилин А. Н., Кузнецов Е. Б., Шалашилин В. Н. О неявных методах интегрирования начальных задач для параметризированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, № 11. — С. 1684–1696.

Volkov-Bogorodskij D. B., Danilin A. N., Kuznecov E. B., Shalashilin V. N. Implicit methods for integration of initial value problems for parameterized systems of second-order ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2003. — Vol. 43, No. 11. — P. 1620–1631. (Original Russian paper: *Volkov-Bogorodskij D. B., Danilin A. N., Kuznecov E. B., Shalashilin V. N.* O nejavnyh metodah integrirovanija nachal'nyh zadach dlja parametrizirovannyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. — 2003. — Vol. 43, No. 11. — P. 1684–1696.)

Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы. — М.: Наука, 1967.

Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z. Chislennye metody [Numerical methods]. — Moscow: Science Publ., 1967 (in Russian).

Ершов Н. Ф., Шахверди Г. Г. Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. — Л.: Судостроение, 1984.

Ershov N. F., Shahverdi G. G. Metod konechnyh jelementov v zadachah gidrodinamiki i gidrouprugosti [Finite element method in problems of hydrodynamics and hydroelasticity]. — Leningrad: Shipbuilding Publ., 1984 (in Russian).

Залеткин С. Ф. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием ортогональных разложений // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 1. — С. 69–85.

Zaletkin S. F. Chislennoe integrirovanie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s ispol'zovaniem ortogonal'nyh razlozhenij [Numerical integration of ordinary differential equations using orthogonal expansions] // Mathematical modeling. — 2010. — Vol. 22, No. 1. — P. 69–85 (in Russian).

Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Издательство иностранной литературы, 1953.

Kollatc L. Numerische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen. — Berlin: Springer-Verlag, 1951. (Russ. ed.: *Kollatc L.* Chislennye metody reshenija differencial'nyh uravnenij. — Moscow: Foreign literature Publ., 1953.)

Куликов Г. Ю., Хрусталева Е. Ю. Об автоматическом управлении длиной шага и порядком в одношаговых коллокационных методах со старшими производными // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50, № 6. — С. 1060–1077.

Kulikov G. Yu., Khrustaleva E. Yu. Automatic step size and order control in onestep collocation methods with higher derivatives // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 50, No. 6. — P. 1006–1023. (Original Russian paper: *Kulikov G. Yu., Hrustaleva E. Yu.* Ob avtomaticheskom upravlenii dlinoj shaga i poryadkom v odnoshagovyh kollokacionnyh metodah so starshimi proizvodnymi // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. — 2010. — Vol. 50, No. 6. — P. 1060–1077.)

Латыпов А. Ф., Никуличев Ю. В. Численные методы решения задач Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе многозвенных интерполяционных полиномов Эрмита // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т. 47, № 2. — С. 234–244.

Latypov A. F., Nikulichev Yu. V. Numerical methods based on multipoint Hermite interpolating polynomials for solving the Cauchy problem for stiff systems of ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2007. — Vol. 47, No. 2. — P. 227–237. (Original Russian paper: *Latypov A. F., Nikulichev Yu. V.* Chislennye metody reshenija zadach Koshi dlja zhestkih sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij na osnove mnogozvennyh interpoljacionnyh polinomov Jermita // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. — 2007. — Vol. 47, No. 2. — P. 234–244.)

Латыпов А. Ф., Попик О. В. Численный метод решения задачи Коши для жестких обыкновенных дифференциальных уравнений на основе многозвенных интерполяционных полиномов Эрмита // Вычислительная техника. — 2011. — Т. 16, № 2. — С. 78–85.

Latypov A. F., Popik O. V. Chislennyj metod reshenija zadachi Koshi dlja zhestkih obyknovennyh differencial'nyh uravnenij na osnove mnogozvennyh interpoljacionnyh polinomov Jermita [Numerical method for solving the Cauchy problem for rigid ordinary differential equations based on multilink Hermite interpolation polynomials] // Computer technology. — 2011. — Vol. 16, No. 2. — P. 78–85 (in Russian).

Русских С. В., Шклярчук Ф. Н. Передвижение тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, с гашением колебаний // Прикладная математика и механика. — 2019. — № 4. — С. 549–561.

Russkikh S. V., Shklyarchuk F. N. Movement of a heavy rigid body suspended on a cable of variable length with oscillation elimination // Mechanics of Solids. — 2019. — Vol. 54, No. 5. — P. 683–693. (Original Russian paper: *Russkih S. V., Shklyarchuk F. N.* Peredvizhenie tyazhelogo tverdogo tela, podveshennogo na trose peremennoj dliny, s gasheniem kolebanij // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 2019. — No. 4. — P. 549–561.)

Русских С. В., Шклярчук Ф. Н. Применение метода Бубнова – Галёркина для расчета нелинейных колебаний математического маятника переменной длины при конечном передвижении из одного состояния покоя в другое // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2018a. — № 10. — http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1809.html (дата обращения: 17.04.2023).

Russkikh S. V., Shklyarchuk F. N. Primenenie metoda Bubnova – Galerkina dlya rascheta nelinejnyh kolebanij matematicheskogo mayatnika peremennoj dliny pri konechnom peredvizhenii iz odnogo sostoyaniya pokoya v drugoe [Application of the Bubnov – Galerkin method for calculating nonlinear oscillations of a mathematical pendulum of variable length during final movement from one state of rest to another] // Engineering Journal: Science and Innovation. — 2018a. — Vol. 10 (in Russian). — http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1809.html (accessed: 17.04.2023).

Русских С. В., Шклярчук Ф. Н. Применение одношагового метода Галёркина для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями // Математическое моделирование и численные методы. — 2022. — № 3. — С. 18–32.

Russkikh S. V., Shklyarchuk F. N. Primenenie odnoshagovogo metoda Galerkina dlya resheniya sistemy obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s nachal'nymi usloviyami [Application of the one-step Galerkin method for solving a system of ordinary differential equations with initial conditions] // Mathematical modeling and numerical methods. — 2022. — No. 3. — P. 18–32 (in Russian).

Русских С. В., Шклярчук Ф. Н. Устранение колебаний твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, при управляемом горизонтальном перемещении подвеса // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2018b. — № 4. — С. 234–245.

Russkikh S. V., Shklyarchuk F. N. Ustranenie kolebanij tverdogo tela, podveshennogo na trose peremennoj dliny, pri upravlyaemom gorizontal'nom peremeshchenii podvesa [Elimination of a rigid body oscillations suspended on a variable-length cable with a controlled horizontal suspension movement] // PNRPU Mechanics Bulletin. — 2018b. — No. 4. — P. 234–245 (in Russian).

Скворцов Л. М. Неявный метод пятого порядка для численного решения дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 6. — С. 978–984.

Skvorcov L. M. A fifth order implicit method for the numerical solution of differential-algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 55, No. 6. — P. 962–968. (Original Russian paper: *Skvorcov L. M.* Nejavnyj metod pjatogo porjadka dlja chislennogo reshenija differencial'no-algebraicheskih uravnenij // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. — 2015. — Vol. 55, No. 6. — P. 978–984.)

Скворцов Л. М. Явный многошаговый метод численного решения жестких дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т. 47, № 6. — С. 259–267.

Skvorcov L. M. Explicit multistep method for the numerical solution of stiff differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2007. — Vol. 47, No. 6. — P. 915–923. (Original Russian paper: *Skvorcov L. M.* Javnyj mnogoshagovyj metod chislennogo reshenija zhestkih differencial'nyh uravnenij // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. — 2007. — Vol. 47, No. 6. — P. 259–267.)

Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999.

Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. — Berlin: Springer-Verlag, 1996. (Russ. ed.: *Hairer E., Wanner G.* Reshenie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. Zhestkie i differencial'no-algebraicheskie zadachi. — Moscow: Mir Publ., 1999.)

Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990.

Hairer E., Nersett S., Wanner G. Solving ordinary differential equations I. — Berlin: Springer-Verlag, 1987. (Russ. ed.: *Hairer E., Nersett S., Wanner G.* Reshenie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. Nezhestkie zadachi. — Moscow: Mir Publ., 1990.)

Чистяков В. Ф., Чистякова Е. В. Применение метода наименьших квадратов для решения линейных дифференциально-алгебраических уравнений // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2013. — Т. 16, № 1. — С. 81–95.

Chistjakov V. F., Chistjakova E. V. Application of the least squares method to solving linear differential-algebraic equations // Numerical Analysis and Applications. — 2013. — Vol. 6, Is. 1. — P. 77–90. (Original Russian paper: *Chistjakov V. F., Chistjakova E. V.* Primenenie metoda naimen'shih kvadratov dlja reshenija linejnyh differencial'no-algebraicheskih uravnenij // Siberian Journal of Computational Mathematics. — 2013. — Vol. 16, No. 1. — P. 81–95.)

Bathe K. J., Wilson E. L. Numerical methods in finite element analysis. — New York: Prentice-Hall, 1976.

Belytschko T. A. Survey of numerical methods and computer programs for dynamic structural analysis // Nuclear Engineering and Design. — 1976. — Vol. 37, No. 1. — P. 23–34.

Houbolt J. C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft // Journal of the Aeronautical Sciences. — 1950. — Vol. 17. — P. 540–550.

Ioriatti M., Dumbser M. Semi-implicit staggered discontinuous Galerkin schemes for axially symmetric viscous compressible flows in elastic tube // Computers & Fluids. — 2018. — Vol. 167. — P. 166–179.

Krieg R. D., Key S. W. Transient shell response by numerical time integration // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1973. — Vol. 7, No. 3. — P. 273–286.

Newmark N. M. A method of computation for structural dynamics // ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division. — 1959. — Vol. 85, No. 7. — P. 67–94.