

УДК: 519:63, 532:5, 533:6

## Неявный алгоритм решения уравнений движения несжимаемой жидкости

А. А. Аксёнов<sup>1,a</sup>, С. В. Жлуктов<sup>1</sup>, В. И. Похилко<sup>2</sup>, К. Э. Сорокин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт высоких температур РАН,  
Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13

<sup>2</sup>ООО «ТЕСИС»,  
Россия, 127083, г. Москва, ул. Юннатов, д. 18, оф. 705

E-mail: <sup>a</sup> andrey@tesis.com.ru

Получено 10.05.2023, после доработки — 18.07.2023.  
Принято к публикации 14.08.2023.

Для решения уравнений Навье–Стокса в случае несжимаемых течений разработано большое количество методов, наиболее популярными из которых являются методы с коррекцией скорости по алгоритму SIMPLE, аналогом которого является метод расщепления по физическим переменным. Данные методы, разработанные еще в прошлом веке, использовались для решения достаточно простых задач — расчета как стационарных течений, так и нестационарных, в которых границы расчетной области были неподвижны. В настоящее время задачи вычислительной гидродинамики существенно усложнились. Интерес представляют задачи с движением тел в расчетной области, движением контактных границ, кавитацией и задачи с динамической локальной адаптацией расчетной сетки. При этом расчетная сетка меняется, что приводит к нарушению условия дивергентности скорости на ней. Поскольку дивергентные скорости используются не только для уравнений Навье–Стокса, но и для всех остальных уравнений математической модели движения жидкости — моделей турбулентности, массопереноса и сохранения энергии, нарушение этого условия ведет к численным ошибкам и, зачастую, к расхождению вычислительного алгоритма.

В статье представлен неявный метод расщепления по физическим переменным, который использует дивергентные скорости с данного шага по времени для решения несжимаемых уравнений Навье–Стокса. Метод разработан для расчета течений при наличии подвижных и контактных границ, моделируемых в постановке Эйлера. Метод позволяет проводить расчеты с шагом интегрирования, на порядки превышающем явный шаг по времени (число Куранта – Фридрихса – Леви  $CFL \gg 1$ ). В данной статье представлен вариант метода для несжимаемых течений. Вариант метода, позволяющий рассчитывать движение жидкости и газа при любых числах Маха, будет опубликован в ближайшее время. Метод для полностью сжимаемых течений реализован в программном комплексе FlowVision.

В статье приводятся результаты численного решения классической задачи обтекания кругового цилиндра при малых числах Рейнольдса ( $50 < Re < 140$ ), при которых ламинарное обтекание цилиндра становится нестационарным и образуется дорожка Кармана. Показано хорошее совпадение расчетов с экспериментальными данными, опубликованными в классических работах Ван-Дайка и Танеды.

Ключевые слова: гидродинамика, газовая динамика, уравнения Навье–Стокса, метод расщепления по физическим переменным

UDC: 519:63, 532:5, 533:6

## Implicit algorithm for solving equations of motion of incompressible fluid

A. A. Aksenov<sup>1,a</sup>, S. V. Zhluktov<sup>1</sup>, V. I. Pokhilko<sup>2</sup>, K. E. Sorokin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Joint Institute for High Temperatures RAS,  
13 Izhorskaya st., Moscow, 125412, Russia

<sup>2</sup>“TESIS” LLC,  
off. 705, 18 Unnatov st., Moscow, 127083, Russia

E-mail: <sup>a</sup> andrey@tesis.com.ru

*Received 10.05.2023, after completion – 18.07.2023.*

*Accepted for publication 14.08.2023.*

A large number of methods have been developed to solve the Navier–Stokes equations in the case of incompressible flows, the most popular of which are methods with velocity correction by the SIMPLE algorithm and its analogue – the method of splitting by physical variables. These methods, developed more than 40 years ago, were used to solve rather simple problems – simulating both stationary flows and non-stationary flows, in which the boundaries of the calculation domain were stationary. At present, the problems of computational fluid dynamics have become significantly more complicated. CFD problems are involving the motion of bodies in the computational domain, the motion of contact boundaries, cavitation and tasks with dynamic local adaptation of the computational mesh. In this case the computational mesh changes resulting in violation of the velocity divergence condition on it. Since divergent velocities are used not only for Navier–Stokes equations, but also for all other equations of the mathematical model of fluid motion – turbulence, mass transfer and energy conservation models, violation of this condition leads to numerical errors and, often, to undivergence of the computational algorithm.

This article presents an implicit method of splitting by physical variables that uses divergent velocities from a given time step to solve the incompressible Navier–Stokes equations. The method is developed to simulate flows in the case of movable and contact boundaries treated in the Euler paradigm. The method allows to perform computations with the integration step exceeding the explicit time step by orders of magnitude (Courant–Friedrichs–Levy number  $CFL \gg 1$ ). This article presents a variant of the method for incompressible flows. A variant of the method that allows to calculate the motion of liquid and gas at any Mach numbers will be published shortly. The method for fully compressible flows is implemented in the software package FlowVision.

Numerical simulating classical fluid flow around circular cylinder at low Reynolds numbers ( $50 < Re < 140$ ), when laminar flow is unsteady and the Karman vortex street is formed, are presented in the article. Good agreement of calculations with the experimental data published in the classical works of Van Dyke and Taneda is demonstrated.

Keywords: hydrodynamics, gas dynamics, Navier–Stokes equations, velocity-pressure split algorithm, implicit numerical method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 4, pp. 1009–1023 (Russian).

## 1. Введение

Для решения трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса разработано большое количество различных методов, которые можно разделить на две большие группы: методы, использующие переменные «давление – скорость», и методы, использующие переменные «плотность – скорость». Методы, использующие переменные «давление – скорость», хорошо подходят для моделирования несжимаемых и слабосжимаемых течений жидкости и газа. Методы, использующие переменные «плотность – скорость», предназначены в основном для решения задач сверх- и гиперзвуковой аэродинамики. Моделирование с их помощью несжимаемых и слабосжимаемых течений требует существенного усложнения исходного алгоритма: введения предобуславливателей, двойного интегрирования по времени и т. п.

Методы, основанные на решении уравнения Пуассона для давления, изначально были разработаны для моделирования несжимаемых течений. Предполагается, что течение описывается уравнениями Навье–Стокса. Несжимаемыми считаются течения жидкости и течения газа при  $M < 0,3$ . Дискретизация уравнений Навье–Стокса для несжимаемых течений требует особого внимания, поскольку в них отсутствует производная плотности по времени. Харлоу и Велч [Harlow, Welch, 1965] предложили метод коррекции давления и применили его к моделированию движения свободной поверхности несжимаемой жидкости в рамках метода MAC. Данный метод может быть использован для моделирования стационарных и нестационарных течений. Применительно к стационарным задачам этот метод был модифицирован Сполдингом и Патанкаром [Patankar, Spalding, 1972; Patankar, 1980]. Для стационарных течений альтернативным является метод Чорина [Chorin, 1967], в котором в уравнение неразрывности добавляется нестационарный член с искусственной сжимаемостью. Этот метод использовали Пейре и Тэйлор [Peuret, Taylor, 1983], Чанг и Квак [Chang, Kwak, 1994], Чой и Меркле [Choi, Merkle, 1985].

Наиболее популярными и активно используемыми методами интегрирования несжимаемых уравнений Навье–Стокса являются SIMPLE и его производные (SIMPLEC, SIMPLER, PISO). Метод SIMPLE (Semi implicit method for pressure linked equation) подробно описан Патанкаром [Patankar, 1981]. Его описание также можно найти во многих источниках, в том числе в книге [Ferziger, Peric, 2002].

Оригинальный метод SIMPLE решает стационарные уравнения Навье–Стокса на неразнесенных сетках итерационным способом. Предполагается, что плотность постоянна. В работе [Гаврилов, 2010] обсуждаются различные стратегии выбора псевдовременного шага для стационарных задач. В литературе можно найти другие формулировки метода SIMPLE.

Метод стабилизирующей поправки Дугласа – Речфорда [Гаврилов, 2010] предполагает такой же алгоритм решения уравнений на одном шаге, как и метод SIMPLE. Его можно рассматривать как иной способ получения соотношений, используемых в методе SIMPLE (по-другому расщепляется уравнение импульсов).

Метод PISO (Pressure-implicit separation of operators) отличается от метода SIMPLE тем, что в нем (а) не отбрасывается конвективный член в выражении для поправки скорости, (б) вводится двойная коррекция скорости. Процедура PISO подробно описана в работе [Гаврилов, 2010].

Методы SIMPLER (SIMPLE Revised) и SIMPLEC (SIMPLE Corrected) рассматриваются как улучшенные версии метода SIMPLE, обеспечивающие более быструю сходимость алгоритмов решения стационарных задач. В работе [Yin, Chow, 2003] методы SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC и PISO сравниваются на двухмерной стационарной тестовой задаче «пожар в атриуме». Утверждается, что все 4 алгоритма дали идентичные распределения всех переменных, кроме давления: SIMPLE, SIMPLEC и PISO дали близкие распределения давления, SIMPLER дал распределение давления, заметно отличающееся от первых трех. Алгоритм PISO оказался более стабильным

и потребовал меньше процессорного времени для получения стационарного решения. В работе [Pereira, Sequeira, 2010] утверждается, что на неразнесенных сетках методы PISO и SIMPLER идентичны.

Методы расщепления по физическим переменным, которые развиваются в отечественной литературе [Белоцерковский, Гущин, Щенников, 1975; Белоцерковский, 1994], аналогичны проекционным методам и, в частности, методу SIMPLE. В работах последних лет [Ковеня, Бабинцев, 2015; Ковеня, 2021] рассматриваются варианты схемы расщепления по физическим и пространственным переменным с использованием схемы «предиктор – корректор» с дробными шагами по времени для решения задачи о течении сжимаемого газа с ударными волнами. Явный итерационный метод решения уравнений газовой динамики описывается в работе [Жуков, Новикова, Феодоритова, 2023], в котором расщепляются конвекция и диффузия.

Подход совмещенной (неразнесенной) сетки предполагает, что значения скорости и давления хранятся в одних и тех же узлах — в центрах контрольных объемов (ячеек). Поэтому он наиболее экономичен с точки зрения программной реализации. Однако у этого метода есть недостаток. Значения скорости получаются в результате решения разностного аналога уравнения импульсов с использованием аппроксимации градиента давления в центрах ячеек. Градиент давления в центре ячейки вычисляется по значениям давления в узлах, удаленных друг от друга на два шага сетки. В результате связь полей скорости и давления, заданных в центрах ячеек, оказывается нечувствительной к составляющей колебаний давления с полупериодом, равным шагу сетки. Подобное рассогласование полей приводит к «шахматным» осцилляциям решения. Для устранения колебаний часто используется подход, предложенный в работе Рхи и Шу [Rhies, Chow, 1983]. Объясним его на одномерной равномерной сетке. Для нахождения суммарного потока массы в ячейку необходимо знать значения скоростей на гранях контрольного объема. Поскольку скорость определена и рассчитывается в центрах ячеек, возникает задача интерполяции значений скорости из центров ячеек на их грани. Чтобы избежать возникновения «шахматных» осцилляций, величина скорости на грани должна быть получена с использованием градиента давления на грани, рассчитанного по значениям давления в соседних ячейках. Однако значения скорости на гранях вычисляются с помощью линейной интерполяции по значениям в центрах ячеек, которые в свою очередь получают с использованием градиентов давления в центрах ячеек. При такой интерполяции скорости на грань неизбежно возникновение осцилляций с полупериодом, равным шагу сетки. Таким образом, избежать осцилляций позволит интерполяция скорости на грань с заменой градиентов давления в центрах ячеек на градиент давления на грани, полученный по значениям давления в соседних ячейках. Другими словами, при вычислении потока массы через грань ячейки нужно заменить градиент давления, полученный на расширенном шаблоне, градиентом, вычисленным по значениям давления в центрах соседних ячеек.

Часть методов интегрирования нестационарных сжимаемых уравнений Навье – Стокса была распространена на несжимаемые течения. При малых (дозвуковых) значениях числа Маха алгоритмы интегрирования по времени, разработанные для сжимаемых течений, становятся неэффективными: когда значение скорости потока становится много меньше скорости звука, сходимость методов установления по времени становится очень медленной. Иными словами, при малых числах Маха собственные числа уравнений Навье – Стокса (точнее, уравнений Эйлера) становятся сильно отличающимися по величине, а система уравнений — жесткой. Было сделано много попыток решать несжимаемые задачи с помощью имеющихся сжимаемых программ. Основная идея модификации сжимаемых алгоритмов была взята из метода искусственной сжимаемости Чорина [Chorin, 1967]. Для стационарных задач, решаемых методом установления, точность производных по времени, присутствующих в уравнениях неразрывности, импульсов и энергии неважна. Поэтому нестационарные члены могут быть модифицированы без искажения конечного результата. Идея предобуславливания использует это свойство уравнений и состоит

в умножении слева вектора производных по времени на матрицу преобуславливания. Основное назначение этой матрицы — устранить жесткость спектра конвективного оператора. Акустическая скорость звука при этом заменяется псевдоскоростью звука, которая имеет тот же порядок величины, что и скорость потока. В литературе можно найти достаточно много различных матриц преобуславливания. Наиболее известными являются матрицы Туркеля [Turkel, 1987] и Чоя и Меркеля [Choi, Merkle, 1985]. Они применяются для интегрирования уравнений Навье–Стокса явными методами, в частности методами Рунге–Кутты. Процедура преобуславливания Чоя и Меркеля была позже использована Вейсом и Смиттом [Weiss, Smith, 1997] для решения уравнений Навье–Стокса точечно-неявным методом. В работе [Hakimi, 1997] анализируются различные процедуры преобуславливания и предлагается новая процедура, совмещающая преимущества разработок Туркеля и Чоя и Меркеля. Предлагается алгоритм решения нестационарных задач с двойным установлением по времени.

Следует отметить, что во всех методах, основанных на решении уравнения Пуассона для давления, первоначально интегрируется уравнение импульсов, в котором используется распределение давления с предыдущего шага по времени, затем полученная скорость корректируется градиентом приращения давления за данный шаг. Для градиента приращения давления решается дополнительное уравнение. Проблема такого подхода заключается в том, что дивергентные скорости, получаемые в конце текущего шага по времени (после коррекции скоростей градиентом приращения давления), не используются при интегрировании уравнений Навье–Стокса, хотя могут использоваться для интегрирования других уравнений, например уравнения энергии. Использование недивергентных и несогласованных скоростей переноса для уравнений Навье–Стокса и остальных конвективно-диффузионных уравнений приводит к слабой сходимости всего алгоритма расщепления и не позволяет решать сверхзвуковые задачи с большими шагами по времени.

В настоящей работе представлен новый неявный метод расщепления по физическим переменным, который использует дивергентные скорости с текущего шага по времени для решения уравнений Навье–Стокса. Метод совместим с технологиями движения границ области расчета, движения контактных границ, локальной динамической адаптации расчетной сетки — то есть тех расчетных методов, при которых происходит регенерация расчетной сетки с невозможностью восстановления скоростей на границах контрольного объема с корректным расчетом дивергенции скорости течения.

Данная статья задумана авторами как первая в ряде публикаций, где в наиболее простом случае несжимаемого течения описываются основные идеи разработанного метода расщепления. В дальнейших публикациях будет описано распространение метода на сжимаемые течения с большими перепадами плотности. Отметим, что эта модификация метода уже реализована в программном комплексе FlowVision, и в данном выпуске журнала читатель может найти работы, показывающие примеры решения задач несжимаемой и сжимаемой гидродинамики.

Далее в статье описывается «классический» метод расщепления по физическим переменным. Однако он дается сразу в неявной постановке (оригинальный метод — это явный метод). Далее последовательно излагается процесс модификации метода расщепления. Поскольку предполагается, что метод расщепления будет использовать совмещенную расчетную сетку, показывается, как избежать осцилляций на такой сетке. В заключительной части демонстрируется решение задачи моделирования дорожки Кармана за круговым цилиндром, результаты моделирования сравниваются с экспериментальными данными. Отметим, что данный специальный выпуск журнала посвящен численному решению различных промышленных задач, выполненных с использованием программного комплекса FlowVision, в котором предлагаемый метод расщепления является основным методом решения уравнений динамики жидкости и газа. «Работу» метода можно оценить из примеров решения различных сложных задач, представленных в данном номере журнала.



## 2. Метод расщепления по физическим переменным

Явный метод расщепления по физическим переменным для численного решения уравнений Навье–Стокса описан в работах [Белоцерковский, Гуцин, Щенников, 1975; Белоцерковский, 1994]. Изначально он был разработан как метод расчета несжимаемых течений. Неявная версия этого метода, представленная в работе [Аксёнов и др., 1996], позволяет рассчитывать слабосжимаемые течения, то есть течения, в которых плотность не зависит от давления. Доработка данного метода на случай сжимаемого течения была сделана в работе [Aksenov, Dyadkin, Pokhilko, 1998].

Рассмотрим уравнения движения несжимаемой жидкости. Уравнение неразрывности:

$$\nabla(\mathbf{V}) = 0.$$

Уравнение импульсов (без силового члена):

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot \widehat{\boldsymbol{\tau}},$$

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}} = \mu_t \left( 2\widehat{\mathbf{S}} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{V})\widehat{\mathbf{I}} \right), \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

Здесь  $\widehat{\boldsymbol{\tau}}$  — тензор вязких напряжений.

Пусть задана расчетная область, в которой введена расчетная конечно-объемная сетка. Все рассчитываемые переменные —  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $\mathbf{V}$  (плотность, давление, температура и скорость) — заданы в центрах ячеек неразнесенной расчетной сетки. Плотность жидкости считаем постоянной. На границах ячеек определены «переносные» скорости, которые будем обозначать как  $V_f$ . Пусть известны значения переменных в центрах ячеек  $p_c^n$ ,  $T_c^n$ ,  $\mathbf{V}_c^n$  на предыдущем шаге по времени  $t = t^n$ . Здесь  $n$  — номер временного слоя. Нижний индекс  $c$  соответствует значению переменной в центре ячейки (рис. 1). Задача состоит в том, чтобы найти решение на шаге по времени  $n + 1$ :  $p_c^{n+1}$ ,  $T_c^{n+1}$ ,  $\mathbf{V}_c^{n+1}$ . Запишем уравнения Навье–Стокса в дискретной форме.

Уравнение импульсов:

$$\mathbf{V}_c^{n+1} - \mathbf{V}_c^n + \tau^n \mathbf{CD}(\mathbf{V}_f^{n+1}, \mathbf{V}_c^{n+1}) = -\tau^n \frac{\nabla p^{n+1}}{\rho}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{CD}$  — конвективно-диффузионный оператор, аппроксимирующий конвективный и диффузионный члены:

$$\mathbf{CD}(\mathbf{V}_f^{n+1}, \mathbf{V}_c^{n+1}) = \frac{1}{v_c} \sum_f S_f (V_f^{n+1}, \mathbf{V}_c^{n+1})_f + \frac{1}{v_c} \sum_f S_f (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{n+1} \cdot \mathbf{n})_f,$$

$\nabla$  — оператор, аппроксимирующий градиент давления;  $\tau = t^{n+1} - t^n$  — шаг по времени;  $v_c$  — объем ячейки;  $\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{n+1}$  — тензор вязких напряжений, выраженный через скорость  $\mathbf{V}_c^{n+1}$ ;  $S_f$  — площадь грани ячейки;  $\mathbf{n}$  — нормаль к грани. Нижний индекс  $f$  соответствует значению переменной на грани ячейки (см. рис. 1),  $f = \{N, S, E, W\}$  в двумерном случае, количество граней при локально адаптивной сетке и при генерации ее методом SGGR около криволинейной границы [Aksenov, Dyadkin, Pokhilko, 1998] может существенно увеличиться. Здесь и далее для обозначения конвективного потока скорости через грань будет использоваться выражение  $(V_f^{n+1}, \mathbf{V}_c^{n+1})_f$ . Оно предполагает некоторую расчетную схему, в которой используются значение скорости на грани  $V_f^{n+1}$  и значения скоростей в центрах ячеек  $\mathbf{V}_c^{n+1}$ .

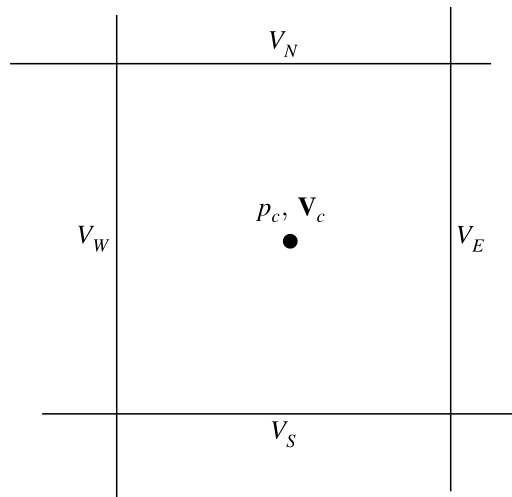


Рис. 1. Основные обозначения рассчитываемых переменных для расчетной ячейки. Здесь  $V_f$  — нормальная к грани ячейки составляющая вектора массовой скорости, где  $f = \{N, S, E, W\}$ . Индекс  $c$  соответствует центру ячейки

Разностная форма уравнения неразрывности  $\nabla \mathbf{V} = 0$ :

$$\sum_f S_f V_f^{n+1} = 0. \tag{2}$$

Методы расщепления в SIMPLE-подобных алгоритмах основаны на последовательном решении уравнения импульсов и уравнения для давления. Для этого вводится процедура коррекции скорости. Ниже приведен базовый алгоритм такого рода схемы расщепления. Запишем его в неявной постановке, как это сделано в [Aksenov, Dyadkin, Pokhilko, 1998]. Первоначально решается уравнение переноса импульса:

$$\tilde{\mathbf{V}}_c - \mathbf{V}_c^n + \tau^n \mathbf{CD}(\mathbf{V}_f^n, \tilde{\mathbf{V}}_c) = -\frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^n. \tag{3}$$

В результате его решения получаем промежуточное поле скоростей  $\tilde{\mathbf{V}}_c$ , которое, вообще говоря, не удовлетворяет уравнению неразрывности (2). Для того чтобы сделать поле скоростей дивергентным, вводится его коррекция:

$$\mathbf{V}_c^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}_c = -\frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^{n+1} + \frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^n. \tag{4}$$

Аппроксимируя уравнение (4) на гранях ячеек, получим выражение для скорости на гранях ячеек:

$$V_f^{n+1} = \mathbf{n}_f (\tilde{\mathbf{V}}_c)_f - \frac{\tau^n}{\rho} (\nabla_f p^{n+1} - \nabla_f p^n). \tag{5}$$

Здесь  $(\tilde{\mathbf{V}}_c)_f$  — оператор аппроксимации скорости  $\tilde{\mathbf{V}}_c$  в центр грани ячейки,  $\mathbf{n}_f$  — нормаль к грани ячейки,  $\nabla_f$  — оператор аппроксимации градиента давления на грани ячейки через его значения в центрах ячеек. Для аппроксимации  $(\tilde{\mathbf{V}}_c)_f$  и  $\nabla_f$  обычно используется центрально-симметричная схема. Подставляя  $V_f^{n+1}$  в (2), получаем уравнение для давления  $p^{n+1}$

$$\sum_f S_f (\nabla_f p^{n+1}) = \frac{\rho}{\tau^n} \sum_f S_f \left( \mathbf{n}_f (\tilde{\mathbf{V}}_c)_f + \frac{\tau^n}{\rho} (\nabla_f p^n) \right). \tag{6}$$

Таким образом, для того, чтобы решить уравнение (6), известно все, за исключением граничного условия для давления на стенке. При физической постановке задачи такого граничного условия на стенке с непротеканием (нормальная скорость к стенке равна нулю) не существует, поскольку давление входит в уравнение импульсов производной первого порядка. Искусственное уравнение (6) имеет второй порядок по давлению. Необходимо определить для него граничное условие на стенке. Заметим, что в уравнении (5) на стенке

$$V_f^{n+1} = \mathbf{n}_f (\tilde{\mathbf{V}}_c)_f = 0, \quad (7)$$

поэтому

$$\nabla_f p^{n+1} = \nabla_f p^n. \quad (8)$$

Таким образом, в качестве граничного условия для давления подходит любое условие, удовлетворяющее уравнению (8). Хорошим выбором является условие

$$\nabla_f p^n = \nabla_f p^{n+1} = 0. \quad (9)$$

Отметим, что (9) — это граничное условие только для уравнения (5). Для определения давления на стенке в уравнении импульсов (1), вообще говоря, его использовать нельзя.

Суммируем алгоритм решения уравнений Навье – Стокса для несжимаемых течений методом расщепления по физическим переменным.

Этап 1. Решение уравнения переноса импульса (неявное) относительно промежуточной скорости  $\tilde{\mathbf{V}}_c$ :

$$\tilde{\mathbf{V}}_c^{n+1} - \mathbf{V}_c^n + \tau^n \mathbf{CD}(\mathbf{V}_f^n, \tilde{\mathbf{V}}_c) = -\frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^n. \quad (10)$$

Этап 2. Решение уравнения для давления  $p^{n+1}$ :

$$\sum_f S_f (\nabla_f p^{n+1}) = \frac{\rho}{\tau^n} \sum_f S_f \left( \mathbf{n}_f (\tilde{\mathbf{V}}_c^{n+1})_f + \frac{\tau^n}{\rho} (\nabla_f p^n) \right). \quad (11)$$

Этап 3. Коррекция значений скорости на гранях и в центрах ячеек:

$$V_f^{n+1} = \mathbf{n}_f (\tilde{\mathbf{V}}_c^{n+1})_f - \frac{\tau^n}{\rho} (\nabla_f p^{n+1} - \nabla_f p^n), \quad (12)$$

$$\mathbf{V}_c^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}_c^{n+1} = -\frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^{n+1} + \frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^n. \quad (13)$$

Этап 4. Решение всех остальных конвективно-диффузионных уравнений математической модели (уравнения энергии, уравнений для турбулентных величин, уравнений массопереноса и так далее):

$$\frac{H^{n+1} - H^n}{\tau} + \mathbf{CD}(\mathbf{V}_f^{n+1}, H^{n+1}) = Q. \quad (14)$$

Здесь  $H$  — скалярная переменная (например, энтальпия),  $Q$  — правая часть уравнения.

В алгоритме (10)–(14) есть несколько проблем, которые должны быть решены специальными способами. Во-первых, в уравнении импульсов (10) в конвективном операторе используются скорости на гранях ячеек  $V_f^n$  с предыдущего шага по времени, что не соответствует уравнению неразрывности (2), которое должно быть выполнено на текущем шаге по времени.

Помимо этого, в «классической» схеме расщепления возникают алгоритмические трудности при решении задач, в которых происходит изменение расчетной сетки около подвижных границ, контактных границ и свободных поверхностей. Дело в том, что при перестройке эйлеровой расчетной сетки скорости  $V_f^n$  перестают существовать из-за образования новых ячеек или изменения старых.



### 3. Модификация метода расщепления по физическим переменным

Если взглянуть на процесс численного интегрирования уравнений движения жидкости не на одном шаге по времени, а на нескольких, то можно заметить, что процедура представляет собой чередование решений уравнений импульсов и давления. С точки зрения многих шагов по времени не имеет значения, какой этап из этих вычислений считать началом текущего шага по времени, а какой — концом. Предположим, что шаг по времени  $n$  начинается именно с расчета давления, а заканчивается расчетом переноса импульса.

Начнем шаг по времени  $n + 1$  с решения уравнения (11), далее вычислим коррекцию скоростей (12)–(13), а закончим цикл решением уравнения (10). Записанное на шаге по времени  $n + 2$ , оно выглядит так:

$$\tilde{\mathbf{V}}_c^{n+2} - \mathbf{V}_c^{n+1} + \tau^n \mathbf{CD}(\mathbf{V}_f^{n+1}, \tilde{\mathbf{V}}_c) = -\frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^{n+1}. \quad (15)$$

В (15) появилась новая недивергентная скорость  $\tilde{\mathbf{V}}_c^{n+2}$ , которая не определена. Складывая (13) и (15), получим

$$\tilde{\mathbf{V}}_c^{n+2} - \mathbf{V}_c^{n+1} + \tau^n \mathbf{CD}(\mathbf{V}_f^{n+1}, \tilde{\mathbf{V}}_c) = -2\frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^{n+1} + \frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^n. \quad (16)$$

Переобозначая переменные  $\tilde{\mathbf{V}}_c^{n+1} \rightarrow \mathbf{V}_c^n$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}_c^{n+2} \rightarrow \mathbf{V}_c^{n+1}$ , запишем новую схему расщепления в окончательном виде. В начале шага по времени имеем  $\mathbf{V}_c^n$  и  $p^n$ .

Этап 1. Вычисляем давление  $p^{n+1}$  из уравнения

$$\sum_f S_f (\nabla_f p^{n+1}) = \frac{\rho}{\tau^n} \sum_f S_f \left( \mathbf{n}_f (\mathbf{V}_c^n)_f + \frac{\tau^n}{\rho} (\nabla_f p^n) \right). \quad (17)$$

Этап 2. Вычисляем консервативные скорости на гранях ячеек:

$$\mathbf{V}_f^{n+1} = \mathbf{n}_f (\mathbf{V}_c^n)_f - \frac{\tau^n}{\rho} (\nabla_f p^{n+1} - \nabla_f p^n). \quad (18)$$

Этап 3. Решаем уравнение импульсов

$$\mathbf{V}_c^{n+1} - \mathbf{V}_c^n + \tau^n \mathbf{CD}(\mathbf{V}_f^{n+1}, \mathbf{V}_c^n) = -2\frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^{n+1} + \frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^n. \quad (19)$$

Этап 4. Решаем все остальные конвективно-диффузионные уравнения (14).

Таким образом, алгоритм (17)–(19), в отличие от «классического» метода расщепления, позволяет рассчитать консервативные скорости на гранях ячейки  $\mathbf{V}_f^{n+1}$  (18) в начале шага по времени и все остальные уравнения конвективно-диффузионного переноса, включая само уравнение импульсов, решать с их использованием. Поэтому при любой перестройке расчетной сетки консервативные скорости  $\mathbf{V}_f^{n+1}$  будут восстановлены перед началом интегрирования уравнений математической модели движения жидкости на текущем шаге по времени.

Отметим, что в данном алгоритме скорость в центре ячейке  $\mathbf{V}_c^{n+1}$  неконсервативна, так как, по сути, она является промежуточной скоростью  $\tilde{\mathbf{V}}_c^{n+2}$  в «классическом» алгоритме расщепления (не путать с консервативными скоростями на гранях ячеек  $\mathbf{V}_f^{n+1}$ ). Вычислить консервативную скорость в центре ячейки можно из уравнения (13). В новом алгоритме и в новой нотации оно выглядит следующим образом:

$$\mathbf{V}_{c,cons}^{n+1} = \mathbf{V}_c^{n+1} - \frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^{n+1} + \frac{\tau^n}{\rho} \nabla p^n. \quad (20)$$

#### 4. Устранение осцилляций решения на совмещенной сетке

Известно, что для совмещенной расчетной сетки характерно возникновение осцилляций решения [Rhies, Chow, 1983]. Эти осцилляции связаны с тем, что аппроксимация уравнения импульсов (19) содержит аппроксимацию градиента давления, в которую значение давления в данной ячейке входит с очень малым или нулевым коэффициентом. С другой стороны, уравнение для давления (17) содержит аппроксимацию дивергенции скорости  $\sum_f S_f \mathbf{n}_f (\mathbf{V}_c^n)_f$ , в которой коэффициент при скорости в данной ячейке мал или равен нулю. Решения по скорости и давлению перестают быть связанными друг с другом в данной ячейке. В результате возникают так называемые шахматные (checkerboard) осцилляции. Для устранения осцилляций традиционно используются подход из [Armfield, 1991] и метод Rhies – Chow [Rhies, Chow, 1983]. При ближайшем рассмотрении более известный метод Rhies – Chow ничем не отличается от подхода Армфильда. Суть обоих заключается в расширении шаблона для уравнения для давления. Запишем оператор аппроксимации градиента давления на предыдущем шаге по времени с повышенным порядком точности  $\nabla_H$ :

$$V_f^{n+1} = \mathbf{n}_f (\mathbf{V}_c^n)_f - \frac{\tau^n}{\rho} (\nabla_f p^{n+1} - \nabla_H p^n). \quad (21)$$

Соответственно изменится уравнение давления (18):

$$\sum_f S_f (\nabla_f p^{n+1}) = \frac{\rho}{\tau^n} \sum_f S_f \left( \mathbf{n}_f (\mathbf{V}_c^n)_f + \frac{\tau^n}{\rho} (\nabla_H p^n) \right). \quad (22)$$

Отметим, что такой подход устранения осцилляций оборачивается зависимостью стационарного решения от шага по времени. Представим оператор  $\nabla_H$  как  $\nabla_H = \nabla_f + \nabla_a$ , где  $\nabla_a$  есть добавка к оператору  $\nabla_f$ , определенная на большем шаблоне, чем  $\nabla_f$ . Для стационарного решения (21) перейдет в

$$V_f^{n+1} = \mathbf{n}_f (\mathbf{V}_c^n)_f + \frac{\tau^n}{\rho} \nabla_a p^n.$$

Видим, что скорость на грани ячейки зависит от  $\tau$ . Чтобы устранить зависимость решения от шага по времени, авторы данной статьи используют следующее выражение для коррекции скоростей на гранях ячеек:

$$V_f^{n+1} = \mathbf{n}_f (\mathbf{V}_c^n)_f - \frac{\tau^n}{\rho} (\nabla_f p^{n+1} - \nabla_f p^n - C \nabla_a p^n), \quad (23)$$

где  $C = \min\left(1, \frac{\tau_{expl}}{\tau^n}\right)$ ,  $\tau_{expl} = \min_i \frac{h_i}{V_i}$  — явный шаг по времени для уравнения конвективного переноса,  $h_i$  — размер  $i$ -й расчетной ячейки,  $V_i$  — скорость в ее центре.

#### 5. Расчет обтекания кругового цилиндра при малых числах Рейнольдса

Рассмотрим результаты численного моделирования поперечного обтекания кругового цилиндра [Van Dyke, 1988; Taneda, 1956], выполненные с использованием представленного метода расщепления. Основной целью данной задачи является проверка корректности моделирования нестационарного несжимаемого потока вокруг цилиндра.

Рассматривается ламинарное течение несжимаемой жидкости вокруг кругового цилиндра. Все величины безразмерные, скорость набегающего потока — 1, диаметр цилиндра — 1, вязкость —  $\frac{1}{Re}$ , где  $Re$  — число Рейнольдса. Граничные условия показаны на рис. 2.

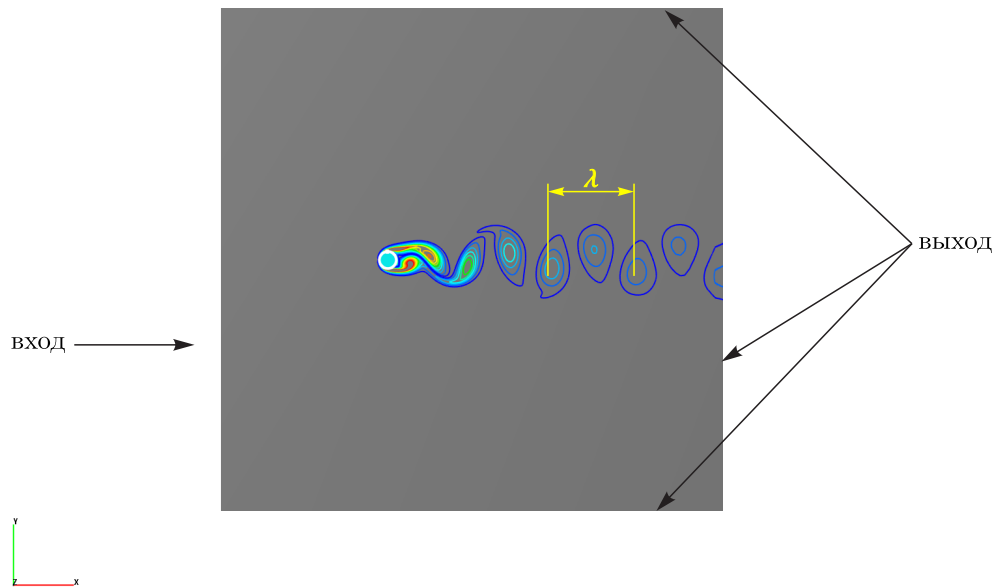


Рис. 2. Расчетная область и граничные условия.  $\lambda$  — длина волны дорожки Кармана

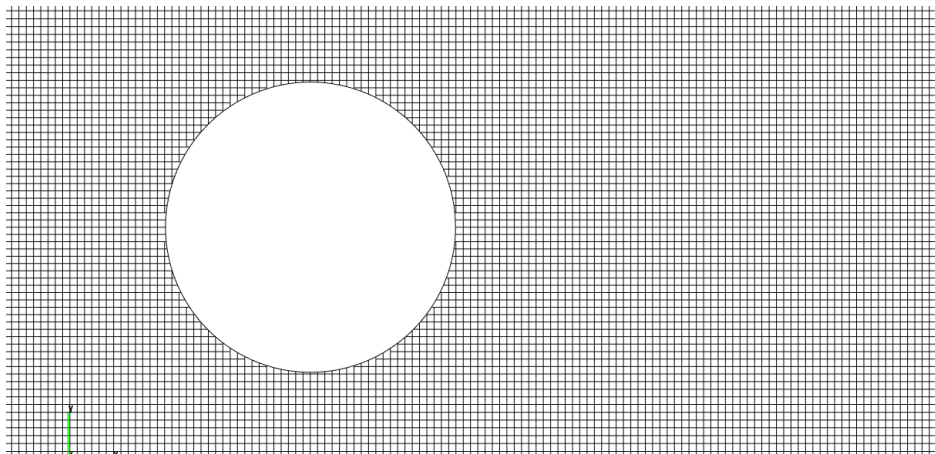


Рис. 3. Расчетная сетка вблизи цилиндра. Размер ячейки — 0,025

В качестве расчетной сетки была выбрана сетка, имеющая размер 0,025 около цилиндра и вдоль дорожки Кармана (рис. 3). Сеточная сходимость проверялась для случая  $Re = 140$ . На рис. 4 показано сравнение поперечной силы от времени, действующей на цилиндр, для сеток с размером ячейки 0,025 и 0,0125. Изменение сетки в два раза по каждому направлению приводит к изменению периода с 5,476 до 5,494 единиц времени, то есть 0,3%. Амплитуда также меняется незначительно. Из рисунка видно, что измельчение сетки не приводит к существенному изменению решения.

Сравнение положений срывающихся вихрей, полученных в расчете и в эксперименте при  $Re = 140$ , показано на рис. 5. Фотография эксперимента взята из альбома [Van Dyke, 1988]. Белые линии на фото — это частицы вещества, «сдуваемого» с цилиндра, подсвеченные световым ножом.

На рис. 6 показано сравнение экспериментальной [Taneda, 1956] и расчетной величины  $\frac{D}{\lambda}$ , где  $D$  — диаметр цилиндра,  $\lambda$  — расстояние между периодическими вихрями (см. рис. 2). Все расчеты проведены с числом Куранта – Фридриха – Леви  $CFL = 5$ . Видно, что результаты расчета хорошо совпадают с экспериментальными данными.

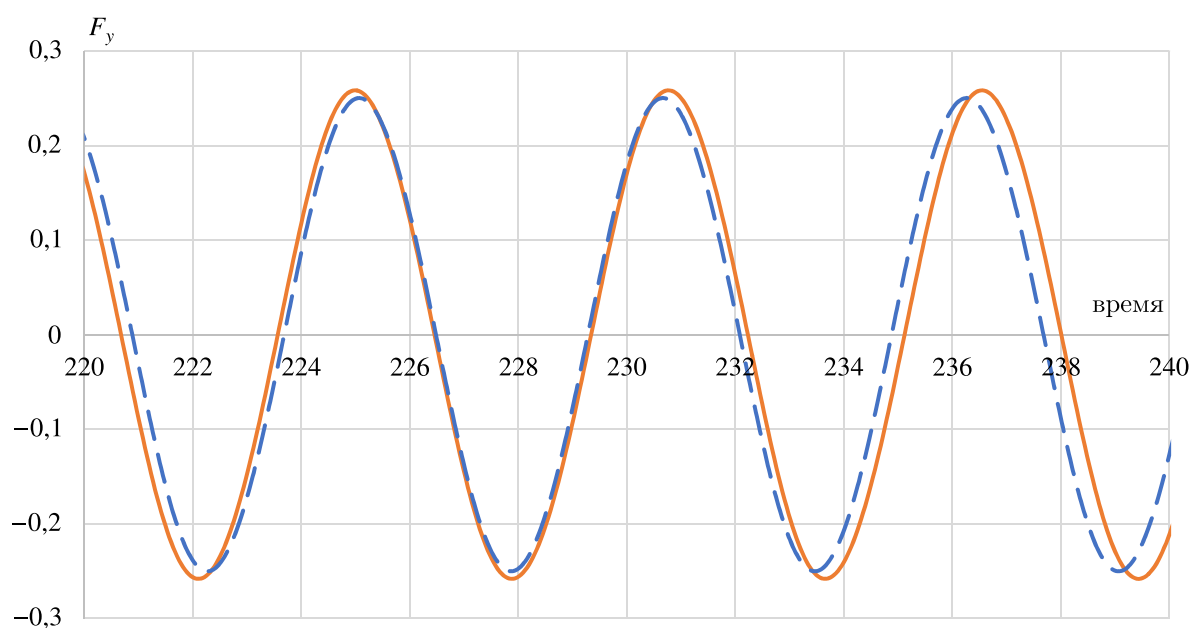


Рис. 4. Расчет поперечной силы  $F_y$ , действующей на цилиндр при  $Re = 140$ , в зависимости от времени. Пунктирная кривая: размер ячейки — 0,0125; сплошная — 0,025 (все величины безразмерные)

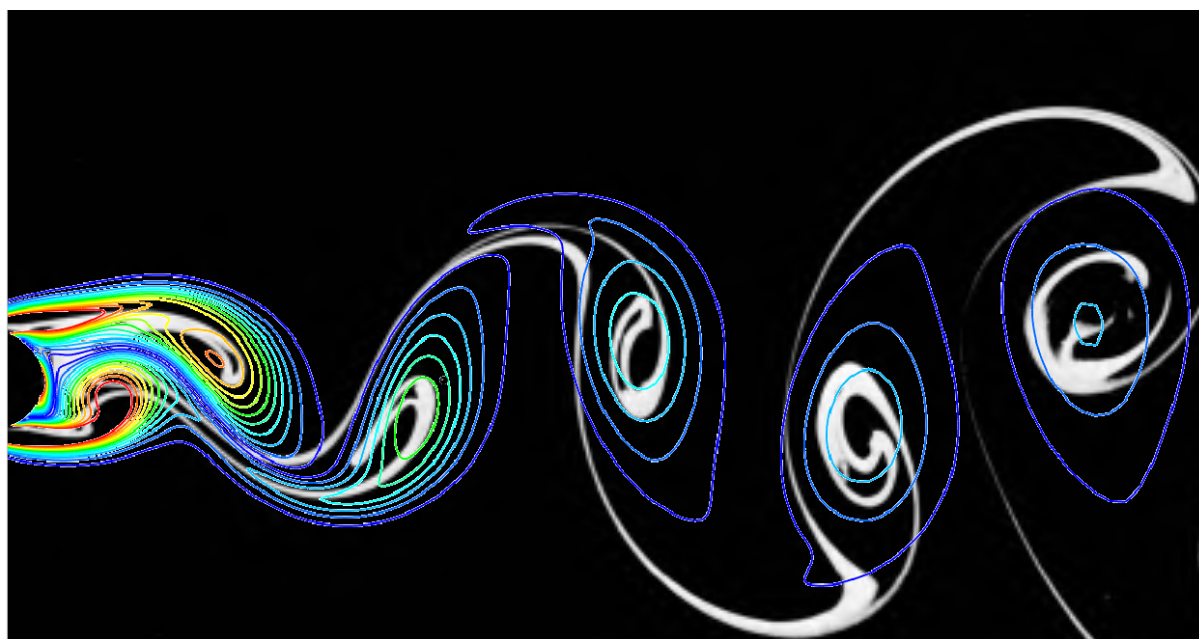


Рис. 5. Наложение завихренности, полученной в расчетах, на фото из альбома [Van Dyke, 1988]. Белые линии на фото — это «дым», создаваемый электролитическим способом на поверхности цилиндра и подсвечиваемый световым ножом

Данный пример авторы статьи считают демонстрационным. Безусловно, он не является достаточным доказательством эффективности предлагаемого метода расщепления. Пример показывает возможность метода решать нестационарные уравнения с шагом по времени, превышающим явный шаг в несколько раз. Демонстрируется сходимость результатов по расчетной сетке. В 2010 году представленный метод расщепления был распространен на сжимаемые течения.

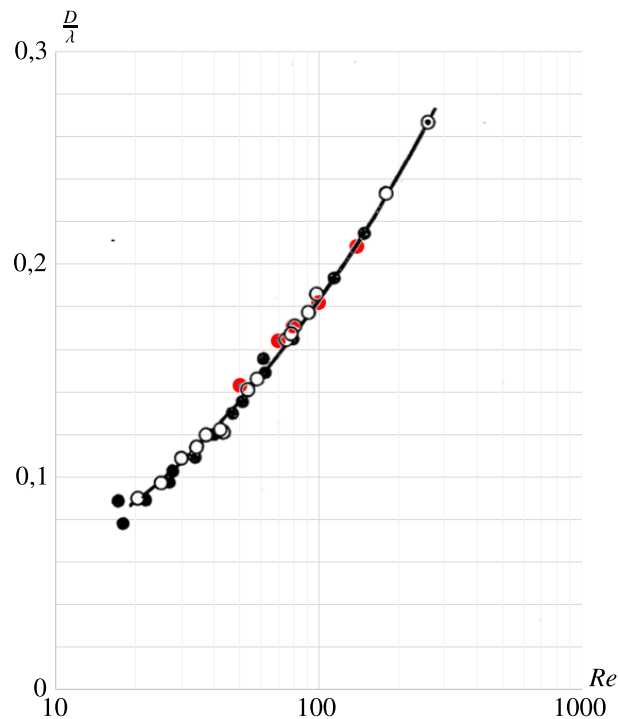


Рис. 6. Расчетные и экспериментальные [Taneda, 1956] длины волны дорожки Кармана за цилиндром,  $D$  — диаметр цилиндра,  $\lambda$  — длина волны (безразмерные величины)

С тех пор он успешно используется для решения различных задач в программном комплексе FlowVision. Этим методом устойчиво рассчитываются течения несжимаемых жидкостей, сжимаемых газов и многофазных сред, течения с химическими реакциями, фазовыми превращениями, подвижными телами и скользящими поверхностями. Часть решенных задач описывается в данном выпуске журнала.

## 6. Заключение

В настоящей работе представлен численный метод решения уравнений Навье–Стокса, предназначенный для моделирования несжимаемого течения жидкости. Метод основан на схеме расщепления по физическим переменным, в котором последовательность расчета уравнений инвертирована (если сравнивать его с классическим методом расщепления [Белоцерковский, Гущин, Щенников, 1975]). Первым решается уравнение для давления. Полученное поле давления используется для определения консервативных массовых скоростей на гранях ячеек. Затем эти скорости используются для решения уравнений переноса импульса, энергии и других характеристик рассматриваемого течения жидкости или газа. Данный подход позволяет интегрировать нестационарные конвективно-диффузионные уравнения, составляющие математическую модель течения, с шагом по времени, существенно превышающим явный шаг. В настоящей работе метод валидируется на классической задаче моделирования дорожки Кармана за цилиндром при числах Рейнольдса 50, 70, 80, 100, 140. Получено хорошее соответствие расчетов и экспериментальных данных.

## Список литературы (References)

- Аксёнов А. А., Гудзовский А. В., Дядькин А. А., Тишин А. П. Смешение газов при вдуве низконапорной струи в поперечный поток // Известия Академии наук. Сер. Механика жидкости и газа. — 1996. — № 3. — С. 67–74.

- Aksenov A.A., Gudzovskiy A.V., Dyadkin A.A., Tishin A.P.* Smeshenie gazov pri vduve nizkonapornoy strui v poperechniy potok [Gas mixing at a low-pressure jet blowing into a crossflow] // *Izvestia Akademii nauk Ser. Mehanika zidkosti i gaza* [Proceedings of the Academy of Sciences. Ser. Mechanics of Fluid and Gas]. — 1996. — No. 3. — P. 67–74 (in Russian).
- Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. — 2-е изд. (исп. и дополн.). — М.: Наука, 1994. — 442 с.
- Belotserkovskiy O.M.* Chislennoe modelirovanoe v mehanike sploshnih sred [Numerical simulation in continuum mechanics]. — 2-e izd (isp. i dopoln.) [2nd edition (revised and supplemented)]. — Moscow: Nauka, 1994. — 442 p. (in Russian).
- Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Щенников В. В.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1975. — Т. 15, № 1. — С. 197–207.
- Belotserkovskiy O.M., Gushin V.A., Shennikov V.V.* Metod rascheplenia v primeneni k resheniu zadach dinamiki viazkoiy neszhimaeomoi zhidkosti [Splitting method applied to the solution of problems of viscous incompressible fluid dynamics] // *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoi fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. — 1975. — Vol. 15, No. 1. — P. 197–207 (in Russian).
- Гаврилов А.* Метод контрольного объема для уравнений гидродинамики. Численная реализация. — [Электронный ресурс]. — [http://sigma-cfd.ru/gavand/wp-content/uploads/2010/10/fvm\\_5\\_SIMPLE.pdf](http://sigma-cfd.ru/gavand/wp-content/uploads/2010/10/fvm_5_SIMPLE.pdf) (дата обращения: 10.05.2023).
- Gavrilov A.* Metod controlnogo ob'ema dlia uravneniy gidrodinamiki. Chislennaia realizacia [Control volume method for the equations of hydrodynamics. Numerical implementation]. — [Electronic resource]. — [http://sigma-cfd.ru/gavand/wp-content/uploads/2010/10/fvm\\_5\\_SIMPLE.pdf](http://sigma-cfd.ru/gavand/wp-content/uploads/2010/10/fvm_5_SIMPLE.pdf) (accessed: 10.05.2023, in Russian).
- Жуков В. Т., Новикова Н. Д., Феодоритова О. Б.* О прямом методе решения задачи сопряженного теплообмена газовой смеси и твердого тела // *Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН*. — 2023. — № 12. — 37 с.
- Zhukov V.T., Novikova N.D., Feodoritova O.B.* O prjamom metode reshenija zadachi soprjazhennogo teploobmena gazivoi smesi i tverdogo tela [About direct method for solution of a problem of heat exchange between gas mixture and solid body] // *Preprint M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics Rossiiskoj akademii nauk* [Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS]. — 2023. — No. 12. — 37 p. (in Russian).
- Ковеня В. М.* Алгоритмы расщепления для численного решения уравнений Навье–Стокса и их применение в задачах аэродинамики // *Прикладная механика и техническая физика*. — 2021. — Т. 62, № 3 (367). — С. 48–59.
- Kovenya V.M.* Splitting algorithms for numerical solution of Navier–Stokes equations in fluid dynamics problems // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. — 2021. — Vol. 62, No. 3. — P. 391–400.
- Ковеня В. М., Бабинцев П. В.* Алгоритмы расщепления в методе конечных объемов // *Вычислительные технологии*. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 65–84.
- Kovenya V.M., Babintsev P.V.* Algoritmy rasshepleniya v metode konechnykh ob'emov [Splitting algorithms for the method of finite volumes] // *Vychislitel'nyje tehnologii* [Computational technologies]. — 2015. — Vol. 20, No. 5. — P. 65–84 (in Russian).
- Aksenov A., Dyadkin A., Pokhilko V.* Overcoming of barrier between CAD and CFD by modified finite volume method // *Proc. 1998 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, San Diego, ASME PVP*. — 1998. — Vol. 377-2. — P. 79–86.
- Armfield S.W.* Finite difference solutions of the Navier–Stokes equations on staggered and non-staggered grids // *Computers & Fluids*. — 1991. — Vol. 20, No. 1. — P. 1–17.
- Chang J.L., Kwak D.* On the method of pseudo compressibility for numerically solving incompressible flows // *AIAA 22nd Aerospace Science Meeting*. — 1994. — AIAA Paper 94-0252.
- Choi D., Merkle C.L.* Application of time-iterative schemes to incompressible flow // *AIAA Journal*. — 1985. — Vol. 23, No. 10. — P. 1518–1524.
- Chorin A.J.* A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // *J. of Comput. Phys.* — 1967. — Vol. 2. — P. 12–26.
- Ferziger J.H., Peric M.* *Computational methods for fluid dynamics*. — Springer, 2002. — 431 p.
- Hakimi N.* Preconditioning methods for time dependent Navier–Stokes equations. Application to environmental and low speed flows // *Ph. D. Thesis*. — Dept. of Fluid Mechanics, Vrije Universiteit Brussel, 1997. — 162 p.



- Harlow F.H., Welch J.E.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // *Physics of Fluid.* — 1965. — Vol. 8. — P. 2182–2189.
- Issa R.I.* Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // *J. of Comput. Phys.* — 1985. — Vol. 62. — P. 40–65.
- Patankar S.V.* A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations // *Numerical Heat Transfer.* — 1981. — Vol. 4. — P. 409–425.
- Patankar S.V.* Numerical heat transfer flow. — New York: Hemisphere Publishing Co. / McGraw-Hill Co., 1980.
- Patankar S.V., Spalding D.B.* A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* — 1972. — Vol. 15. — P. 1787–1806.
- Pereira J.C.F., Sequeira A.* Enhancement of PISO scheme in collocated grids // V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010. — Lisbon, Portugal, 14–17 June 2010. — 11 p.
- Peyret R., Taylor T.D.* Computational methods for fluid flow. — New York: Springer Verlag, 1983.
- Rhies C.M., Chow W.L.* Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation // *AIAA J.* — 1983. — Vol. 21. — P. 1525–1532.
- Sod G.A.* A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // *J. of Computational Physics.* — 1978. — Vol. 27. — P. 1–31.
- Taneda S.* Experimental investigation of the wakes behind cylinders and plates at low Reynolds numbers // *Journal of the Physical Society of Japan.* — 1956. — Vol. 11, No. 3. — P. 302–307. — DOI: 10.1143/jpsj.11.302
- Turkel E.* Preconditioning methods for solving the incompressible and low speed compressible equations // *Journal of Computational Physics.* — 1987. — Vol. 72. — P. 277–298.
- Van Dyke M.* Album of fluid motion. — The Parabolic Press, 1988. — 177 p.
- Weiss J.M., Smith W.A.* Implicit solution of the Navier–Stokes equations on unstructured meshes // *AIAA paper.* — 1997. — AIAA-97-2103.
- Yin R., Chow W.K.* Comparison of four algorithms for solving pressure/velocity linked equations in simulating atrium fire // *International Journal on Architectural Science.* — 2003. — Vol. 4, No. 1. — P. 24–35.