

УДК: 004.021

## Анализ алгоритмов совместной глобальной локализации устройств смешанной реальности на основе регистрации облаков точек

А. А. Осипов<sup>а</sup>, М. А. Останин<sup>б</sup>, А. С. Климчик<sup>с</sup>

Университет Иннополис,  
Россия, 420500, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1

E-mail: <sup>а</sup> a.osipov@innopolis.university, <sup>б</sup> m.ostanin@innopolis.ru, <sup>с</sup> a.klimchik@innopolis.ru

*Получено 25.10.2022, после доработки — 04.02.2023.  
Принято к публикации 26.04.2023.*

Современные подходы локализации и построения карты для устройств дополненной (AR) и смешанной (MR) реальности основаны на извлечении локальных признаков с камеры. Наряду с этим современные устройства AR/MR позволяют строить трехмерную сетку окружающего пространства. Однако существующие методы не решают задачу глобальной совместной локализации устройства из-за применения разных дескрипторов для вычисления признаков с изображений. Используя карту пространства из трехмерной сетки, мы можем решить проблему совместной глобальной локализации устройств AR/MR. Этот подход не зависит от типа дескрипторов функций и алгоритмов локализации и картографирования, используемых на борту устройства AR/MR. Сетку можно свести к облаку точек, которое состоит только из вершин сетки. Мы предлагаем подход для совместной локализации устройств AR/MR с использованием облаков точек, которые не зависят от алгоритмов на борту устройства. Мы проанализировали различные алгоритмы регистрации облаков точек и обсудили их ограничения для задачи совместной глобальной локализации устройств AR/MR в помещении.

Ключевые слова: совместная локализация, дополненная и смешанная реальность, регистрация облаков точек

UDC: 004.021

## Analysis of mixed reality cross-device global localization algorithms based on point cloud registration

A. A. Osipov<sup>a</sup>, M. A. Ostanin<sup>b</sup>, A. S. Klimchik<sup>c</sup>

Innopolis University,  
1 Universitetskaya st., Innopolis, 420500, Russia

E-mail: <sup>a</sup> a.osipov@innopolis.university, <sup>b</sup> m.ostanin@innopolis.ru, <sup>c</sup> a.klimchik@innopolis.ru

*Received 25.10.2022, after completion — 04.02.2023.*

*Accepted for publication 26.04.2023.*

State-of-the-art localization and mapping approaches for augmented (AR) and mixed (MR) reality devices are based on the extraction of local features from the camera. Along with this, modern AR/MR devices allow you to build a three-dimensional mesh of the surrounding space. However, the existing methods do not solve the problem of global device co-localization due to the use of different methods for extracting computer vision features. Using a space map from a 3D mesh, we can solve the problem of collaborative global localization of AR/MR devices. This approach is independent of the type of feature descriptors and localisation and mapping algorithms used onboard the AR/MR device. The mesh can be reduced to a point cloud, which consists of only the vertices of the mesh. We propose an approach for collaborative localization of AR/MR devices using point clouds that are independent of algorithms onboard the device. We have analyzed various point cloud registration algorithms and discussed their limitations for the problem of global co-localization of AR/MR devices indoors.

Keywords: co-localization, augmented and mixed reality, point cloud registration

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 657–674 (Russian).

## Введение

Локализация и построение карты — основные технические возможности современных систем смешанной реальности и робототехники. Эта функция позволяет объединить реальный и цифровой мир в единую реальность. Чтобы люди могли сотрудничать в смешанной реальности или чтобы люди и роботы могли работать вместе, они должны быть локализованы в едином координатном пространстве. Кроме того, локализация устройств также требуется для положения цифрового контента на заранее построенной карте.

В настоящее время устройства решают задачи локализации и отображения на борту. Однако существует тенденция к облачным вычислениям и переносу локализации цифрового контента в облако. Например, есть системы Microsoft Azure Spatial Anchors<sup>1</sup>, Niantic<sup>2</sup>, Google Cloud Anchors<sup>3</sup> и др. Эти системы отправляют ключевые признаки в облако для локализации контента.

Современные системы имеют несколько ограничений совместной локализации. Совместная локализация с устройствами, использующими разные дескрипторы признаков, невозможна [Dusmanu et al., 2021]. Кроме того, в различных системах одновременно используются разные алгоритмы одновременной локализации и построения карты (англ. Simultaneous localization and mapping, SLAM) и аппаратное ускорение для них. Например, можно использовать различные дескрипторы, такие как SIFT [Ng, Henikoff, 2003] или SOSNet [Tian et al., 2019]. Более того, существующие устройства будут отставать от новых алгоритмов SLAM. Это делает невозможным совместную локализацию систем друг с другом. Помимо вышеперечисленного, человеку сложно или невозможно воспринимать карту, состоящую из признаков. Это накладывает ограничение на удаленное размещение контента на карте.

Существует общий функционал для построения 3D-карты реальной окружающей среды в системах смешанной реальности. Карта из 3D-меш-сетки геометрически описывает реальную окружающую среду. Соответственно, на разных системах, вне зависимости от алгоритмов, эти карты будут похожи друг на друга в одном и том же месте. Однако сама сетка содержит много информации, и ее трудно передавать и сохранять, поэтому мы предлагаем свести пространственную карту к облаку точек, состоящему только из вершин сетки. В результате мы получим разреженное облако точек, которые легче сохранять и переносить. В то же время это облако точек будет удобочитаемым для человеческого восприятия, что может помочь использовать его для размещения контента.

В этой статье мы анализируем методы регистрации облаков точек с модификациями. Наша главная цель — найти подход, способный решить проблему совместной глобальной локализации устройств смешанной реальности в помещении. Мы собрали набор данных с парами реконструированных облаков точек единой окружающей среды.

Наш первый этап — экспериментальное сравнение эффективности четырех глобальных методов регистрации на реальных облаках точек помещения, чтобы узнать, какие методы регистрации облаков точек подходят для решения задачи совместной локализации MR-устройств, и понять, какие параметры алгоритма определяют более высокие значения надежности и вероятности успешной регистрации облаков точек.

Второй этап — более детальный анализ эффективности более перспективных методов регистрации, способных решить задачу совместной локализации для различных параметров и модификаций методов. В качестве модификации мы использовали локальный дескриптор Weighted Height Image (WHI) [Sun et al., 2020] в дополнение к стандартному и часто используемому

<sup>1</sup> <https://azure.microsoft.com/en-us/services/spatial-anchors>

<sup>2</sup> <https://lightship.dev>

<sup>3</sup> <https://developers.google.com/ar/develop/java/cloud-anchors/overview-android>

Fast Point Feature Histogram (FPFH) [Rusu, Blodow, Beetz, 2009]. Наш третий этап — анализ эффективности гибридного подхода: метод, основанный на соответствиях признаков в сочетании с итеративным алгоритмом ближайших точек (англ. Iterative Closest Point, ICP). Этот подход предлагается нами для решения проблемы совместной локализации устройств смешанной реальности.

На заключительном этапе мы обсудим слабые места предложенного гибридного подхода и полученные результаты, которые могут быть полезны для более точной настройки подхода по совместной локализации устройств AR/MR в реальных сценариях.

## Методы регистрации облаков точек

В этом разделе мы рассмотрим фундаментальные основы изучаемых алгоритмов и их возможности. В задаче регистрации нам даны два трехмерных облака точек:  $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^N$  (источник) и  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^M$  (целевое облако точек) с  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ . Существует множество алгоритмов для решения этой проблемы. Одним из наиболее часто используемых подходов к регистрации облака точек является итеративный алгоритм ближайших точек [Besl, McKay, 1992].

### Итеративный алгоритм ближайших точек

Итеративный алгоритм ближайших точек (англ. iterative Closest Point, ICP) решает задачу регистрации  $L_2$ -нормы для оценки движения, такого как вращение  $\mathbf{R} \in SO(3)$  и перемещение  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$  между исходным ( $\mathcal{A}$ ) и целевым ( $\mathcal{B}$ ) облаком точек, что минимизирует целевую функцию  $L_2$ -ошибки:

$$E(\mathbf{R}, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{R}\mathbf{a}_i + \mathbf{t} - \mathbf{b}_{k^*}\|^2, \quad (1)$$

где  $\mathbf{a}_i$  —  $i$ -я точка исходного облака, а  $\mathbf{b}_{k^*}$  — ближайшая точка целевого облака к преобразованной точке  $\mathbf{a}_i$ , то есть

$$k^* = \operatorname{argmin}_{k \in \{1, \dots, M\}} \|\mathbf{R}\mathbf{a}_i + \mathbf{t} - \mathbf{b}_k\|. \quad (2)$$

Определенная  $L_2$ -ошибка невыпукла, потому что существуют невыпуклые ограничения. Стандартный алгоритм ICP решает эту проблему итеративно, попеременно оценивая преобразование с помощью (1) и находя соответствия ближайших точек (2). Хотя ICP отличается простотой и эффективностью, он только гарантирует сходимость к локальному минимуму [Besl, McKay, 1992]. Следовательно, ICP нуждается в хорошем начальном положении между облаками точек для глобальной сходимости. В некоторых вариантах ICP [Granger, Pennec, 2002; Maier-Hein et al., 2011; Chetverikov, Stepanov, Krsek, 2005; Kaneko, Kondo, Miyamoto, 2003] предлагается использовать надежные целевые функции для улучшения сходимости, но они по-прежнему являются локальными методами и не дают гарантии глобальной сходимости.

### Методы регистрации облаков точек, основанные на ICP

Как правило, в реальных сценариях облака точек от нескольких устройств имеют большое относительное смещение, а ошибка вращения может составлять около 360 градусов для одного из углов Эйлера. Поэтому для решения задачи сопоставления облаков точек необходимо использовать глобальные методы регистрации, не зависящие от хорошей инициализации.

### Go-ICP

Globally Optimal ICP (Go-ICP) [Yang et al., 2015] — это метод регистрации облака точек, обеспечивающий оптимальное глобальное решение без первоначального предположения. Для поиска глобального решения авторы метода Go-ICP используют алгоритм VnB (Branch-and-Bound) [Morrison et al., 2016], распространяющийся на поиск трехмерного движения  $SE(3) = SO(3) \times \mathbb{R}^3$ . При этом авторы применяют параметризацию пространства, которая компактно представляет трехмерное пространство поиска вращения в виде твердого шара радиусом  $\pi$  в  $\mathbb{R}^3$ , а для части пространства, отвечающего за перемещение, представляется в виде ограниченного куба  $[-\xi, \xi]$ , где  $\xi$  можно легко установить (рис. 1).

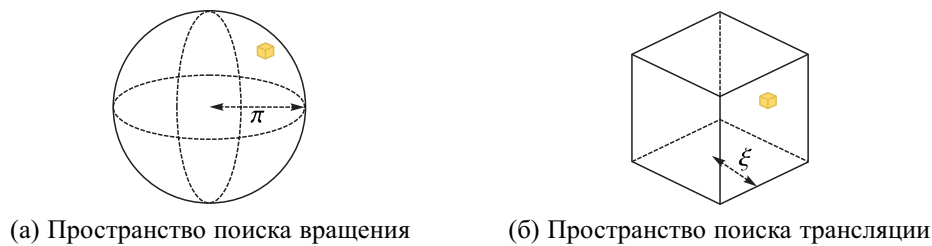


Рис. 1. (а) Пространство поиска вращения  $SO(3)$ , параметризованное в шар радиусом  $\pi$ . (б) Предполагается, что решение для пространства трансляции лежит внутри куба с параметрами  $[-\xi, \xi]^3$

Также они ограничивают функцию ошибки  $L_2$ -нормы [Yang et al., 2015]. Параметризация пространства и ограничивающие функции позволяют применить поиск VnB к проблеме (1). Подводя итог, метод Go-ICP представляет собой интеграцию двух основных процессов: глобального поиска VnB и локального поиска ICP, которые помогают друг другу достичь глобального минимума целевой функции (рис. 2).

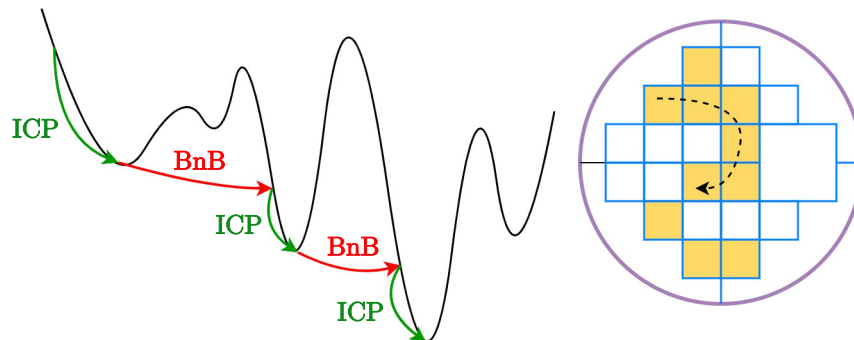


Рис. 2. Пример совместного действия VnB и ICP для достижения глобального минимума целевой функции

### Bayesian-ICP

В то время как Go-ICP представляет собой детерминированный подход к регистрации облаков точек, существует также вероятностный подход, такой как алгоритм Bayesian-ICP [Maken, Ramos, Ott, 2020]. Bayesian-ICP объединяет идеи стохастического градиентного спуска ICP (SGD-ICP) [Maken, Ramos, Ott, 2019] и стохастической градиентной динамики Ланжевена (SGLD) [Welling, Teh, 2011], что позволяет оценить распределение поз. SGD-ICP использует стохастический градиентный спуск для решения оптимизационной проблемы ICP (1). Для каждой итерации SGD-ICP формируются небольшие наборы  $M_k$  из исходного облака вместо полного облака точек и связываются с ближайшими точками в целевом облаке, как в ICP для решения

задачи оптимизации (1). Таким образом, SGD-ICP определяет правило обновления шести параметров преобразования  $\vartheta$  (по три параметра для перемещения и три вращения) между облаком источником и целевым облаком точек:

$$\vartheta_{k+1} = \vartheta_k - \alpha A \vec{g}(\vartheta_k, \mathcal{M}_k), \quad (3)$$

где  $\alpha$  — скорость обучения,  $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  действует как предобуславливатель, а  $\vec{g}$  является градиентом целевой функции (1). Идея SGLD состоит в том, чтобы на каждой итерации добавить определенное количество шума к результатам оптимизации SGD для сглаживания итогового распределения, что позволяет ему сходиться к апостериорному распределению. Поэтому общее правило обновления SGD-ICP изменяется путем добавления гауссовского шума  $\eta_k \sim \mathcal{N}(0, A\alpha)$  и априорного  $p(\vartheta)$  к параметрам преобразования  $\theta$ , и общее правило обновления параметров для Bayesian-ICP становится следующим:

$$\vartheta_{k+1} = \vartheta_k - \frac{\alpha}{2} A \left( -\nabla \log p(\vartheta_k) + N \vec{g}(\vartheta_k, \mathcal{M}_k) \right) + \eta_k, \quad (4)$$

где  $N$  — размер облака точек,  $\nabla \log p(\vartheta_k)$  — градиент для априорного распределения.

### **Методы регистрации облаков точек, основанные на соответствиях**

Методы регистрации, основанные на соответствиях, — еще один подход к решению проблемы регистрации облаков точек, обеспечивающий глобальное решение. Наиболее перспективными алгоритмами методов регистрации на основе соответствий являются метод быстрой глобальной регистрации [Zhou, Park, Koltun, 2016] и Teaser++ [Yang, Shi, Carlone, 2020]. Они используют дескрипторы (признаки), инвариантные к вращениям и перемещениям, для построения соответствий между облаками точек. Дескрипторы облаков точек продолжают улучшаться (устойчивость к шуму, окклюзии, помехам и т. д., компактность, описательность), в том числе с использованием нейронных сетей, и по сей день.

### **Быстрые гистограммы точечных признаков**

Быстрые гистограммы точечных признаков (англ. Fast Point Feature Histograms, FPFH) [Rusu, Blodow, Beetz, 2009] — это 33-мерный локальный дескриптор признаков, описывающий локальную геометрию пространства вокруг точки в трехмерном облаке точек. Этот дескриптор представляет собой упрощенную версию гистограммы точечных признаков (англ. Point Feature Histograms, PFH), который сохраняет дискриминационную способность PFH и может быть рассчитан за миллисекунды [Guo et al., 2016], поскольку вычислительная сложность алгоритма составляет  $O(k)$  в сравнении с  $O(k^2)$  для PFH. Вычисление функции FPFH точки  $a$  разделяется на два этапа. На первом этапе для каждой точки ее  $k$  соседей рассчитывается упрощенная гистограмма точечных признаков (англ. Simplified Point Feature Histogram, SPFH) на основе PFH-вычислений. На втором этапе окончательная гистограмма  $a$  рассчитывается следующим образом:

$$FPFH(a) = SPFH(a) + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{SPFH(a_i)}{\omega_i}, \quad (5)$$

где  $\omega_i$  — вес, представляющий расстояние между точкой  $a$  и соседней точкой  $a_i$ .

### **Взвешенное изображение высоты**

Взвешенное изображение высоты (англ. Weighted Height Image, WHI) [Sun et al., 2020] представляет собой компактный трехмерный локальный дескриптор для описания трехмерной

локальной формы в облаке точек. В то время как FPFH классифицируется как алгоритм, основанный на метриках инвариантных к вращению (RIM), дескриптор WHI основан на локальной системе координат (LRF). Дескрипторы на основе LRF имеют явные преимущества по сравнению дескрипторами, основанными на RIM. Во-первых, дескрипторы, основанные на LRF, вычисляют локальную систему координат, инвариантную к вращению, что является более воспроизводимо и устойчиво к окклюзиям и помехам. Во-вторых, использование LRF упрощает процесс кодирования информации, поскольку не требуется учитывать инвариантность вращения, и позволяет сохранить исходную информацию об облаке точек. Кроме того, дескриптор WHI может иметь максимальную компактность — размерность 16 — без большой потери в точности. Дескриптор WHI объединяет LRF и кодирование в виде 2D-изображения через взвешенное изображение высоты. Общая схема расчета представлена на рис. 3.

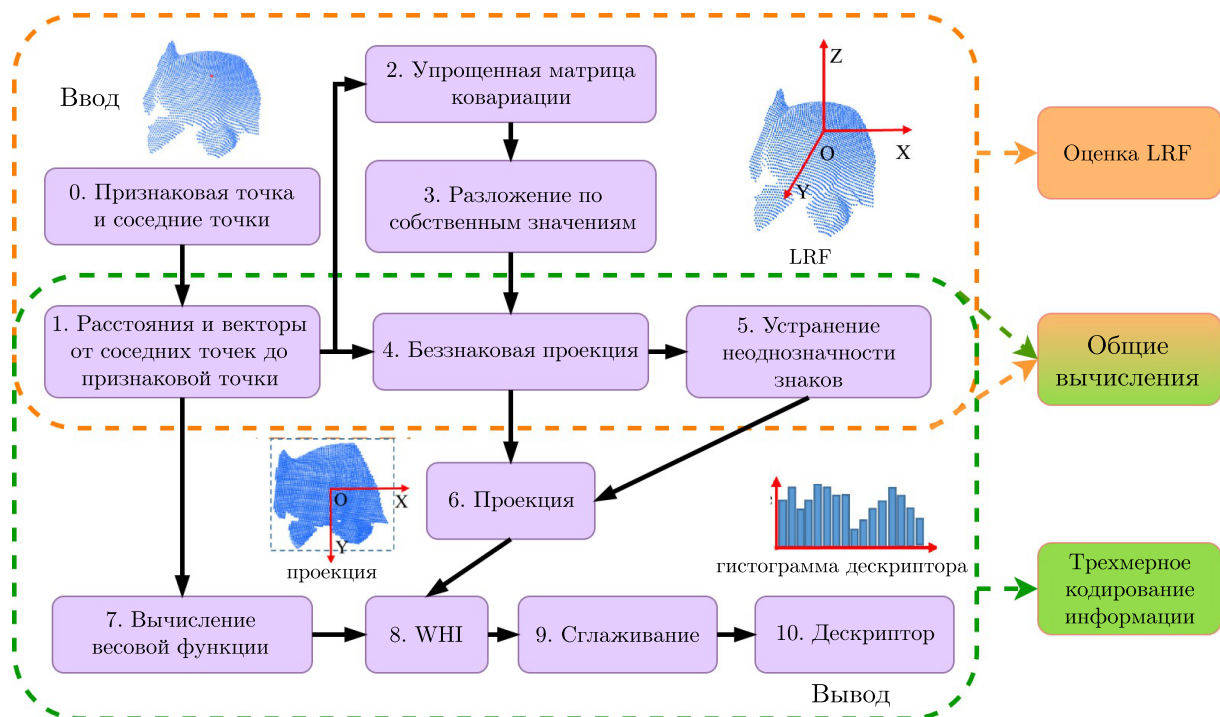


Рис. 3. Блок-схема вычисления WHI-дескриптора

### Метод быстрой глобальной регистрации

Метод быстрой глобальной регистрации (англ. Fast Global Registration, FGR) — это метод регистрации, основанный на соответствиях, который состоит из следующих основных частей: продвинутое сопоставление признаков (англ. Advanced Matching) и оценка преобразования [Zhou, Park, Koltun, 2016]. Во-первых, для каждой точки в исходном ( $\mathcal{A}$ ) и целевом ( $\mathcal{B}$ ) облаках точек извлекаются признаковые точки. Тогда  $\mathbf{F}(\mathcal{B})$  — это набор исходных признаковых точек, а  $\mathbf{F}(\mathcal{A})$  — набор целевых признаковых точек. Во-вторых, алгоритм продвинутого сопоставления признаков используется для построения соответствий с использованием признаковых точек, а также для удаления частично неправильных пар из них. Он состоит из 3 шагов. Первый шаг: строится множество пар точек  $\mathcal{K}_I$  путем вычисления ближайших соседей между признаковыми точками  $\mathbf{F}(\mathcal{B})$  и  $\mathbf{F}(\mathcal{A})$  в обе стороны. Второй и третий шаги: применяются тесты, направленные на отсеивание ложных соответствий, reciprocity test к  $\mathcal{K}_I$ , чтобы получить  $\mathcal{K}_{II}$ , и tuple test к  $\mathcal{K}_{II}$ , чтобы получить набор  $\mathcal{K}_{III}$  [Zhou, Park, Koltun, 2016]. И наконец, FGR использует построенные и профильтрованные соответствия для нахождения матрицы преобразования  $\mathbf{T}$ , которая

выравнивает два облака точек, для этого решается задача оптимизации со следующей целевой функцией:

$$E(\mathbf{T}) = \sum_{(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \in \mathcal{K}_{III}} \rho(\|\mathbf{b} - \mathbf{T}\mathbf{a}\|), \quad (6)$$

где  $\rho$  — штрафной компонент. Эта штрафная функция очень важна, потому что правильно выбранный штраф позволяет контролировать форму целевой функции (6) путем быстрой проверки и удаления плохих соответствий, чтобы исключить их из рассмотрения. Также это позволяет решать оптимизацию за один проход, без пересчета при оптимизации, как в алгоритме ICP. В качестве штрафной функции авторы используют оценку Geman–McClure [Geman, Yang, 1995]:

$$\rho = \frac{\mu x^2}{\mu + x^2}, \quad (7)$$

где  $x$  — это  $\|\mathbf{b} - \mathbf{T}\mathbf{a}\|$  и  $\mu$  — коэффициент, управляющий формой целевой функции (6) и тем, сколько соответствий будет участвовать в оптимизации. Оптимизация целевой функции (6) не может быть выполнена напрямую. Поэтому авторы используют двойственность Блэка–Рангараджана [Black, Rangarajan, 1996], что позволяет определить следующую целевую функцию:

$$E(\mathbf{T}, \mathbb{L}) = \sum_{(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \in \mathcal{K}_{III}} l_{\mathbf{b}, \mathbf{a}} \|\mathbf{b} - \mathbf{T}\mathbf{a}\|^2 + \sum_{(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \in \mathcal{K}_{III}} \mu \left( \sqrt{l_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}} - 1 \right)^2, \quad (8)$$

где  $\mathbb{L} = \{l_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}\}$  — линейный процесс над соответствиями. Для минимизации  $E(\mathbf{T}, \mathbb{L})$  частной производной  $\frac{\partial E}{\partial l_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}}$  должен быть равен нулю. Для него  $l_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}$  равно

$$l_{\mathbf{b}, \mathbf{a}} = \left( \frac{\mu}{\mu + \|\mathbf{b} - \mathbf{T}\mathbf{a}\|^2} \right)^2. \quad (9)$$

Если мы подставим  $l_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}$  в уравнение (8), то целевая функция (8) станет (6). Это означает, что оптимизация (8) оптимизирует цель (6). Преимущество оптимизации целевой функции (8) заключается в чрезвычайно эффективном расчете путем чередования и отдельной оптимизации между  $\mathbb{L}$  и  $\mathbf{T}$ , а также оптимизация (8) гарантирует сходимость целевой функции (6).

### Teaser++

Метод регистрации Teaser++ можно условно разделить на следующие основные подмодули: продвинутое сопоставление признаков, отбор верных соответствий методом максимальной клики (англ. Maximal Clique Inlier Selection, MCIS) и оценка трансформации [Yang, Shi, Carlone, 2020]. Авторы Teaser++, так же как в FGR, используют продвинутое сопоставление признаков [Zhou, Park, Koltun, 2016] для построения соответствий  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ , используя извлеченные признаковые точки для каждой точки источника  $\mathcal{A}$  и целевые облака точек  $\mathcal{B}$ . Они также считают, что точки облаков содержат некоторый шум измерений, и поэтому определяют следующую генеративную модель соответствия  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ :

$$\mathbf{b}_i = s\mathbf{R}\mathbf{a}_i + \mathbf{t} + \mathbf{o}_i + \epsilon_i, \quad (10)$$

где  $s > 0$  — оцениваемый масштаб,  $\mathbf{R} \in SO(3)$ ,  $\mathbf{t}$  — оцениваемый поворот и смещение, а  $\mathbf{o}_i$  равен нулевому вектору, если пара  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$  является верным соответствием, но если пара  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$  является выбросом, то  $\mathbf{o}_i$  — просто произвольный вектор. Формулируется задача оптимизации на основе усеченного метода наименьших квадратов (англ. Truncated Least Squares, TLS) для оценки неизвестного преобразования:

$$\min_{s > 0, \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\beta_i^2} \|\mathbf{b}_i - s\mathbf{R}\mathbf{a}_i - \mathbf{t}\|^2, \bar{c}^2 \right), \quad (11)$$



где  $\beta_i$  — заданная граница гауссовского шума для  $i$ -го соответствия,  $\bar{c}^2$  является порогом для штрафования соответствий с большим остатком. Эта формулировка позволяет учесть, что набор соответствий имеет экстремальное количество выбросов, а соответствия имеют неизвестный, но ограниченный гауссовский шум  $\beta_i \geq \|\epsilon_i\|$ . TLS оценивает решение только для измерений с небольшими остатками  $\left(\frac{1}{\beta_i^2} \|\mathbf{b}_i - s\mathbf{R}\mathbf{a}_i - \mathbf{t}\|^2 \leq \bar{c}^2\right)$ , т. е. TLS наказывает выбросы, а также соответствия с большими остаточными ошибками. Задача оптимизации (11) не является выпуклой, и ее трудно решить напрямую. Но задачу можно решить каскадно, разделив ее на оценку масштаба, вращения и перемещения. Для этого авторы ввели два инвариантных измерения. Измерение, инвариантное к трансляции:

$$\mathbf{b}_{ij} = s\mathbf{R}\mathbf{a}_{ij} + \mathbf{o}_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{b}_{ij}$ ,  $\mathbf{a}_{ij}$ ,  $\mathbf{o}_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$  — разности  $i$ -й и  $j$ -й компонент для, например,  $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j$  и т. д. Измерение, инвариантное к трансляции, зависит только от поворота и масштаба. Измерение, инвариантное к перемещению и вращению:

$$s_{ij} = s + o_{ij}^s + \epsilon_{ij}^s, \quad (13)$$

где  $s_{ij} = \frac{\|\mathbf{b}_{ij}\|}{\|\mathbf{a}_{ij}\|}$ ,  $o_{ij}^s = \frac{o_{ij}}{\|\mathbf{a}_{ij}\|}$  и  $\epsilon_{ij}^s = \frac{\epsilon_{ij}}{\|\mathbf{a}_{ij}\|}$ . Измерение не зависит от вращения и перемещения, а зависит только от масштаба. Другими словами, инвариантные измерения позволяют оценить масштаб, поворот и перемещение при выполнении следующих 3 шагов:

- 1) использование измерений, инвариантных к перемещению и вращению, для оценки масштаба  $\widehat{s}$ ;
- 2) использование измерений, инвариантных к перемещению  $\widehat{s}$ , для оценки вращения  $\widehat{\mathbf{R}}$ ;
- 3) использование  $\widehat{\mathbf{R}}$  и  $\widehat{s}$  для оценки перевода  $\widehat{\mathbf{t}}$  из задачи оптимизации (11).

В результате решаются три отдельные задачи оптимизации для оценки окончательного преобразования.

Оценка масштаба:

$$\widehat{s} = \operatorname{argmin}_s \sum_{k=1}^K \min\left(\frac{(s - s_k)^2}{\alpha_k^2}, \bar{c}^2\right). \quad (14)$$

Здесь  $s_k$  равно  $\{s_{ij}\}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , инвариантных измерений,  $\alpha_k = \{\alpha_{ij}\}_k = \left\{\frac{\sigma_{ij}}{\|\mathbf{a}_{ij}\|}\right\}_k$ ,  $\sigma_{ij} = \beta_i + \beta_j$ .

Оценка вращения:

$$\widehat{\mathbf{R}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{R} \in SO(3)} \sum_{k=1}^K \min\left(\frac{\|\mathbf{b}_k - \widehat{s}\mathbf{R}\mathbf{a}_k\|^2}{\sigma_k^2}, \bar{c}^2\right), \quad (15)$$

где  $\sigma_k$  равно  $\{\sigma_{ij}\}_k = \{\beta_i + \beta_j\}_k$ , а  $\mathbf{b}_k = \{\mathbf{b}_{ij}\}_k$ ,  $\mathbf{a}_k = \{\mathbf{a}_{ij}\}_k$  соответственно.

Покомпонентная оценка перемещения:

$$\widehat{t}_l = \operatorname{argmin}_{t_l} \sum_{k=1}^K \min\left(\frac{(s - [\mathbf{b}_k - \widehat{s}\widehat{\mathbf{R}}\mathbf{a}_k]_k)^2}{\beta_k^2}, \bar{c}^2\right), \quad (16)$$

где  $t_l$  —  $l$ -я компонента вектора переноса и  $l = 1, 2, 3$ . Задачи (14) и (16) решаются за полиномиальное время алгоритмом адаптивного голосования [Yang, Carlone, 2019]. Оценка вращения TLS (15) сводится к жесткой полуопределенной задаче релаксации и быстро решается с использованием градуированной невыпуклости [Yang et al., 2020]. Кроме того, после оценки масштаба используется алгоритм MCIS [Yang, Shi, Carlone, 2020]. Это позволяет отбросить большое количество соответствий-выбросов, что повышает устойчивость к выбросам.

## Наборы данных

В нашей работе мы сравниваем алгоритмы регистрации облака точек для задачи совместной локализации устройств смешанной реальности. Алгоритм берет облака точек реконструированной окружающей среды с одного и другого устройства. Реконструированное облако точек лишь аппроксимирует геометрические параметры реальной окружающей среды пользователя, но не описывает ее с высокой точностью. Набор данных для анализа и сравнения алгоритмов регистрации должен состоять из реконструированных пар облаков одного помещения, полученных с разных начальных местоположений; таким образом, каждая пара облаков точек будет иметь отличное друг от друга распределение точек, что приближено к реальной ситуации.

### *Набор данных А. Открытый набор данных облаков точек помещения*

Набор данных А состоит из двух поднаборов данных: KTH Longterm<sup>1</sup> и ICL-NUIM<sup>2</sup>. KTH Longterm был собран роботом Scitos G5 с поворотной камерой RGB-D. Он содержит данные из 8 различных областей офисной среды KTH. Половина площадей — это комнаты, а остальные — коридоры. Поднабор данных ICL-NUIM был собран датчиком камеры RGB-D и содержит данные двух комнат: гостиная и офис. В результате первый набор данных содержит 11 пар облаков точек KTH Longterm и 2 пары облаков точек ICL-NUIM. В обоих случаях данные не собираются с устройств смешанной реальности.

### *Набор данных В. Набор данных облаков точек помещения с очков Microsoft HoloLens*

Мы собрали набор данных В, используя два устройства смешанной реальности: Microsoft HoloLens 1-го и 2-го поколения. Каждое устройство строит сетчатую карту окружающей среды. Мы исследовали одно пространство с двух устройств и использовали портал устройств Windows для выгрузки пространственной карты. Пространственная карта — это трехмерная сетка, и для получения облака точек мы берем только вершины этой сетки. Набор данных В содержит разреженные облака точек 4 областей: три разные комнаты и коридор. Мы получили 20 пар облаков точек, где каждая пара облаков точек получена с разных устройств.

Чтобы оценить точность, мы создали синтетический набор данных облаков точек на основе реальных облаков точек из набора данных В. Мы отобрали большие примеры облаков точек и брали части разного размера из каждого такого большого облака. Каждая часть матрицы истинного преобразования задается для каждой пары случайным образом в диапазоне  $[-90, 90]$  градусов для вращения и  $[-50, 50]$  см для перемещения. Основная идея создания синтетического набора данных заключается в том, что мы знаем фактическое положение пары облаков точек относительно друг друга до регистрации. Следовательно, мы можем оценить точность совмещения пары облаков точек.

## Методология

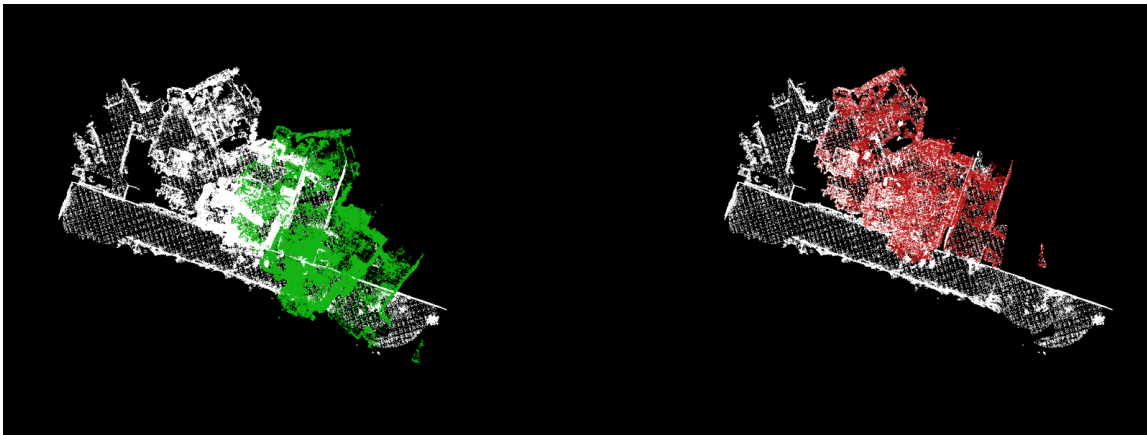
### *Оценка эффективности алгоритмов регистрации*

На первом этапе мы оценили эффективность четырех алгоритмов регистрации облаков точек: Go-ICP, Bayesian-ICP, FGR и Teaser++. FGR и Teaser++ также оценивались в зависимости от режимов использования алгоритма продвинутого сопоставления признаков и различных

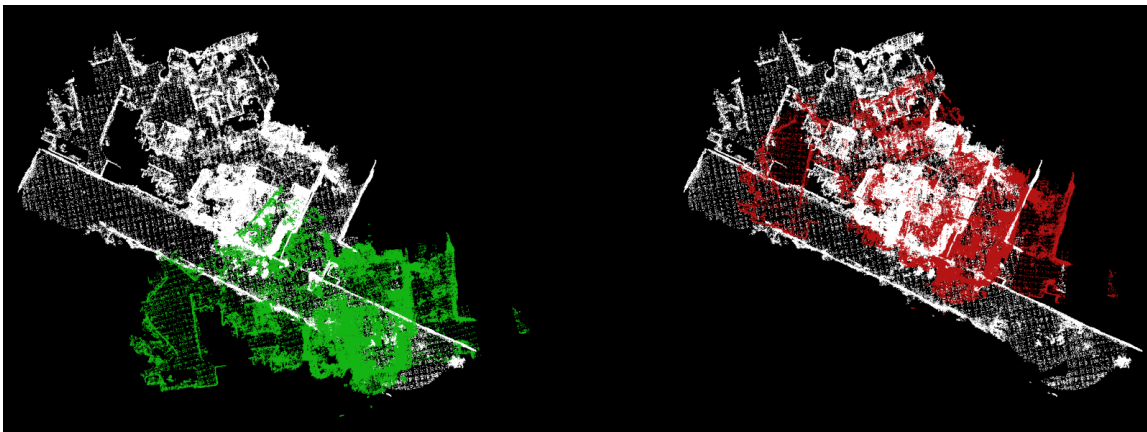
<sup>1</sup> [https://strands.readthedocs.io/en/latest/datasets/kth\\_lt.html](https://strands.readthedocs.io/en/latest/datasets/kth_lt.html)

<sup>2</sup> <http://redwood-data.org/indoor/dataset.html>

дескрипторов, а именно FPFH, WHI16, WHI36. Используемый радиус дескрипторов не превышал 150 см при соотношении, близком к рекомендуемому, что описано в следующем подразделе. Оценка эффективности состояла из среднего времени регистрации и количества успешных выравниваний. Так как достоверной информации о фактическом преобразовании между парами источников облаков точек нет, то успешность выравнивания для каждой пары оценивалась визуально, как показано в примере (рис. 4). Все алгоритмы были протестированы на наборах данных A и B.



(а) Успешное выравнивание



(б) Неуспешное выравнивание

Рис. 4. Примеры визуально успешных и неуспешных регистраций. Левая половина рисунков показывает состояние до регистрации, а правая половина показывает состояние после регистрации

#### ***Анализ точности и времени выполнения методов регистрации: FGR и Teaser++ для разных локальных дескрипторов***

На втором этапе изучалась эффективность алгоритмов в зависимости от разного радиуса дескрипторов FPFH, WHI16 и WHI36. Оценка эффективности алгоритмов включает оценку точности и времени выполнения. Так как использование реального датасета не позволяет рассчитать точность регистрации, мы использовали для оценки эффективности синтетический набор данных. Для нахождения ошибки вращения используются углы крена, тангажа и рыскания, рассчитанные для матрицы преобразования  $T_a$ , полученной алгоритмом, и для истинной матрицы

преобразования  $T_g$ :

$$\phi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33}), \quad \theta = \arcsin(-r_{30}), \quad \psi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}), \quad (17)$$

где  $r_{ij}$  —  $ij$ -й элемент части матрицы преобразования, отвечающей за вращение. Ошибка вращения  $R_{error}$  определяется как суммарная ошибка углов крена ( $\phi_{error}$ ), тангажа ( $\theta_{error}$ ), рысканья ( $\psi_{error}$ ):

$$\begin{aligned} \phi_{error} &= |\phi_g - \phi_a|, & \theta_{error} &= |\theta_g - \theta_a|, & \psi_{error} &= |\psi_g - \psi_a|, \\ R_{error} &= \phi_{error} + \theta_{error} + \psi_{error}. \end{aligned} \quad (18)$$

Ошибка перемещения  $t_{error}$  вычислялась следующим образом:

$$t_{error} = \sqrt{(x_g - x_a)^2 + (y_g - y_a)^2 + (z_g - z_a)^2}. \quad (19)$$

Мы также оценили количество успешных регистраций для FGR и Teaser++. Для локальных дескрипторов FPFH, WHI16, WHI36 мы рассчитывали метрики для разных радиусов, но сохраняли оптимальное соотношение радиусов понижающей дискретизации ( $r_d$ ) / нормали ( $r_n$ ) / дескриптора ( $r_f$ ), равное 1 : 2 : 5 для FPFH, и оптимальное соотношение радиусов понижающей дискретизации ( $r_d$ ) дескриптора ( $r_f$ ), равное 1 : 5 для дескрипторов типа WHI. Коэффициент FPFH рекомендован авторами FGR, а коэффициент WHI выбран нами для более достоверного сравнения методов регистрации на основе соответствия с разными дескрипторами. Успешное совмещение двух синтетических облаков точек мы считали выполнением условия точности:

$$R_{error} \leq 0,03 \text{ рад}, \quad t_{error} \leq 1,0 \text{ см}. \quad (20)$$

Такие требования к точности мы рассматривали как удовлетворительные для совместной локализации устройств смешанной реальности. Что касается времени регистрации, то для успешной синхронизации устройств достаточно не более 5 секунд, так как достаточно одной регистрации с последующим обновлением и уточнением. Таким образом, успехом в регистрации на синтетическом наборе данных мы считали выполнение следующих условий: 100 % случаев удовлетворяют условию точности (20) и времени выполнения менее 5 с.

### **Анализ точности и времени выполнения гибридных подходов**

На третьем этапе мы оценили эффективность регистрации гибридного подхода (метод на основе соответствия [FGR или Teaser++] как грубый метод регистрации + ICP как локальное уточнение регистрации). Гибридный подход позволяет использовать преимущества двух методов. Первый не требует хорошей инициализации для регистрации облаков точек, но использование понижающей дискретизации облаков точек ограничивает точность метода. Второй имеет высокую точность сходимости (движется к локальному минимуму, глобально сходится только при близости к глобальному минимуму), но требует хорошего (близкого к глобальному минимуму) наличия начального положения облаков точек относительно друг друга. Так, первый способ позволяет исключить недостатки второго, а второй способ позволяет исключить недостатки первого.

Мы использовали разное количество итераций ICP, чтобы оценить эффективность гибридного подхода и выявить рабочий диапазон радиуса дескрипторов. Мы использовали предыдущие метрики и добавили новый критерий для более гибкой оценки: 90 % случаев удовлетворяют условию точности (20) и времени выполнения 10 с. Так как точность и время выполнения могут быть улучшены за счет использования улучшений подмодулей гибридного подхода и более мощного оборудования.

Все эксперименты проводились с использованием библиотеки облаков точек (PCL)<sup>1</sup> на ноутбуке с процессором AMD Ryzen 7 4800HS.

<sup>1</sup> <https://pointclouds.org>

## Результаты

### Оценка эффективности алгоритмов регистрации на реальных наборах данных

В таблицах 1 и 2 показаны оцененное время регистрации и доля успешных выравниваний пар облаков точек. Алгоритмы, основанные на ICP: Go-ICP и Bayesian-ICP, показали очень низкий уровень успешных выравниваний, с большим временем регистрации. Алгоритмы на основе соответствий признаков (FGR и Teaser++) значительно превосходят алгоритмы на основе ICP как с точки зрения успешного выравнивания, так и с точки зрения времени выполнения.

Таблица 1. Эффективность алгоритмов регистрации FGR и Teaser++ на наборе данных А

Метод	Дескриптор	Продвинутое сопоставление	Среднее время выполнения (мс)	Доля успешных выравниваний (%)
Go-ICP	—	—	24 427	8
Bayesian-ICP	—	—	1647	54
FGR	FPFH	On	390	100
	WHI16		371	100
	WHI36		752	100
	FPFH	Off	442	100
	WHI16		441	100
	WHI36		823	92
Teaser++	FPFH	On	409	100
	WHI16		428	100
	WHI36		823	100
	FPFH	Off	1847	100
	WHI16		1209	100
	WHI36		1897	100

Таблица 2. Эффективность алгоритмов регистрации FGR и Teaser++ на наборе данных В

Метод	Дескриптор	Продвинутое сопоставление	Среднее время выполнения (мс)	Доля успешных выравниваний (%)
Go-ICP	—	—	24 158	0
Bayesian-ICP	—	—	1564	5
FGR	FPFH	On	219	68
	WHI16		223	53
	WHI36		419	79
	FPFH	Off	259	42
	WHI16		262	26
	WHI36		458	42
Teaser++	FPFH	On	219	63
	WHI16		213	58
	WHI36		446	63
	FPFH	Off	365	79
	WHI16		382	100
	WHI36		641	100

Доля успешных выравниваний алгоритмами на наборе данных В ниже, чем на наборе данных А. Это указывает на то, что набор данных В имеет более сложные для регистрации пары облаков. В наборе данных В более половины пар облаков точек имеют небольшую долю перекрытия (менее 50%) и более различное распределение точек. Успех регистрации пары облаков

точек зависит от доли перекрытия, а также от начальной степени разреженности облака точек. Доля перекрытия определяет, сколько пар облаков точек имеют общие геометрические части. Другими словами, чем больше площадь перекрытия облаков точек, тем проще алгоритму регистрации найти соответствия между ними и сопоставить их друг с другом. Что касается степени разреженности облаков точек, то она влияет на степень различия в распределении облаков точек. Разреженные облака могут иметь более разнородные распределения точек, чем плотные облака.

Когда алгоритм продвинутого сопоставления признаков для FGR отключен, вероятность успешного выравнивания облака точек снижается. В то же время для Teaser++ при выключенном алгоритме продвинутого сопоставления признаков процент успешных совмещений облаков точек, наоборот, увеличивается и достигает 100 % с локальными дескрипторами признаков WHI16 и WHI36. Это происходит потому, что, вероятно, часть алгоритма продвинутого сопоставления признаков, отбрасывающая ложные соответствия, отбрасывает не только неправильные соответствия, но и часть верных, и к тому же у Teaser++ есть подмодуль MCIS, который эффективно находит верные соответствия.

### ***Анализ точности и времени выполнения FGR и Teaser++ для разных дескрипторов признаков***

На рис. 5 и 6 показаны точность и время выполнения выравнивания алгоритмами FGR, Teaser++ с различными локальными дескрипторами. Точность вращения и перемещения методов с локальными дескрипторами WHI16, WHI36 превышает точность методов с FPFH, а время выполнения методов с WHI16 наименьшее для радиуса более 50 см. На рис. 5 и 6 мы можем заметить, что точность перемещения регистрации облака точек меньше, чем уровень понижающей дискретизации для радиуса дескриптора 150 см или менее. Понижающая дискретизация с помощью сетки вокселей позволяет сохранить структуру поверхности, поскольку для каждого вокселя вычисляется точка центра тяжести. Следовательно, с одной стороны, малый размер вокселя при малом радиусе дескрипторов позволяет несколько сократить количество вычислений без потери информации о геометрии поверхности и точности регистрации соответственно. С другой стороны, при большом радиусе дескрипторов мы значительно ускоряем расчеты. Таким образом, существует компромисс между точностью и временем выполнения, то есть оптимальный диапазон радиуса дескриптора, удовлетворяющий некоторым требованиям к точности и времени выполнения для реальных применений.

### ***Анализ точности и времени выполнения гибридных подходов: FGR и Teaser++ с ICP***

Мы использовали FGR и Teaser++ с ICP в качестве гибридного подхода. В таблице 3 показана сводная оценка FGR и Teaser++ для различных типов и параметров локальных дескрипторов и итераций ICP. В таблице показаны диапазоны радиусов дескрипторов, которые соответствуют заданным критериям точности и времени выполнения. Таблица 3 может быть полезна при определении оптимального диапазона радиуса дескрипторов, необходимого для решения задачи совместной локализации. После наших тестов мы можем отметить увеличение точности регистрации для всех радиусов дескрипторов, не более 150 см. Повышения точности для радиуса WHI16 более 150 см не происходит. Это связано с тем, что методы FGR и Teaser++ имеют низкую точность для дескриптора WHI16 с радиусом более 150 см. Это создает плохую инициализацию для ICP, и в результате ICP сходится до локального минимума. Интересно, что гибридный подход для радиуса дескрипторов FPFH более 150 см позволяет ICP сходиться к глобальному минимуму. Точность FGR и Teaser++ для дескриптора FPFH радиусом более 150 см выше, чем для WHI. Возможно, что WHI для большого радиуса частично теряет свою описательность (в отличие от FPFH). Основываясь на результатах с синтетическим набором данных,

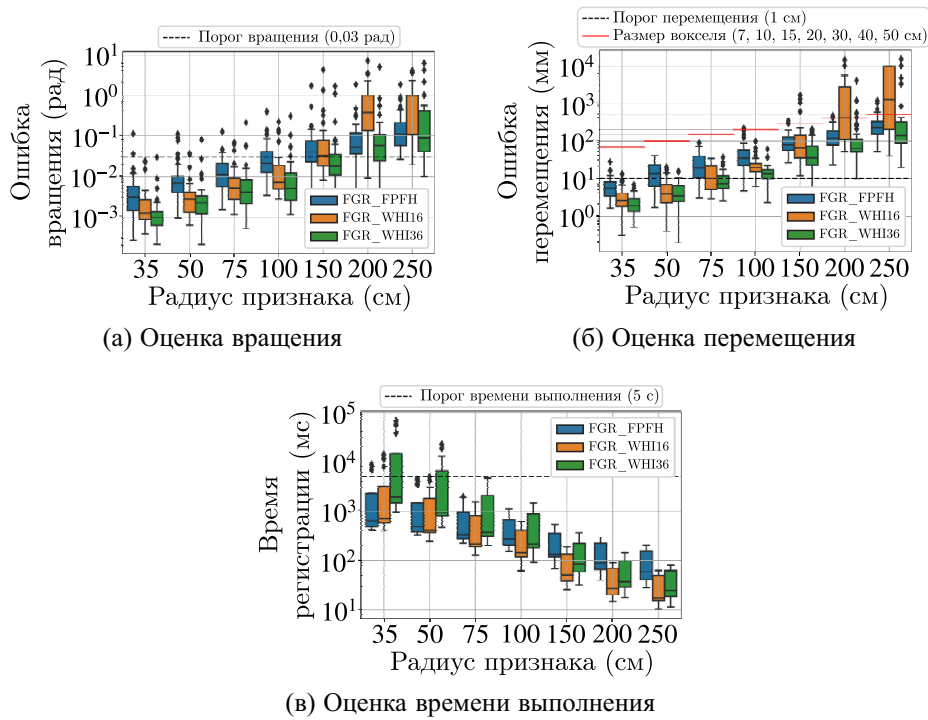


Рис. 5. Эффективность алгоритма регистрации FGR для дескрипторов FPFH, WHI16 и WHI36

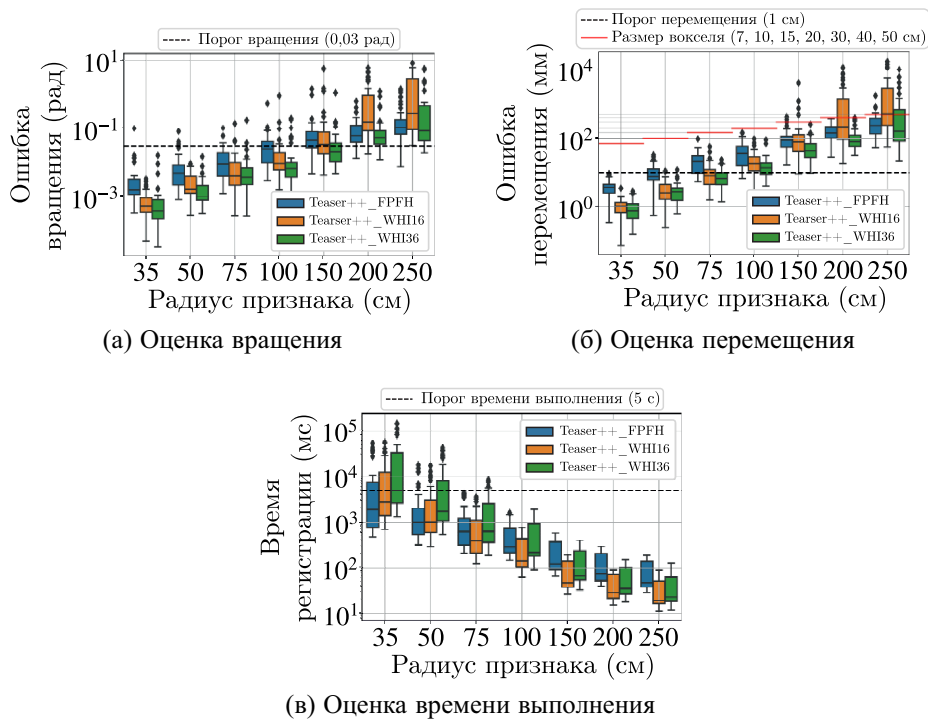


Рис. 6. Эффективность алгоритма регистрации Teaser++ для дескрипторов FPFH, WHI16 и WHI36

невозможно надежно определить, какой дескриптор признаков лучше всего использовать в реальном приложении. Но результаты на реальных данных показывают превосходство WHI над

Таблица 3. Эффективность алгоритмов регистрации FGR и Teaser++ на синтетическом наборе данных

Метод	Дескриптор	ICP	Радиус признака (см)							
			35	50	75	100	150	200	250	
FGR	FPFH	—								
		1								
		10								
		100								
	WHI16	—								
		1								
		10								
		100								
	WHI36	—								
		1								
		10								
		100								
Teaser++	FPFH	—								
		1								
		10								
		100								
	WHI16	—								
		1								
		10								
		100								
	WHI36	—								
		1								
		10								
		100								

100 % случаев ниже точности 0,03 рад и 1 см  
 90 % случаев ниже точности 0,03 рад и 1 см  
 менее 90 % случаев ниже точности 0,03 рад и 1 см  
 100 % случаев ниже времени выполнения 5 с  
 100 % случаев ниже времени выполнения 10 с  
 менее 100 % случаев ниже времени выполнения 10 с

FPFH. Поэтому мы рекомендуем использовать дескриптор WHI в диапазоне радиуса до 150 см, а для большего радиуса использовать FPFH.

## Обсуждение результатов

Результаты показали, что методы на основе ICP не подходят для решения проблемы совместной локализации, в отличие от алгоритмов на основе дескрипторов (признаков). Однако использование ICP для уточнения FGR и Teaser++ показывает хороший результат. Основным недостатком подхода в данном исследовании является зависимость от производительности алгоритмов SLAM. Если устройство AR/MR имеет ошибку построения карты, то эта ошибка добавляется к ошибке совместной локализации. Пространственная карта является производной от бортовых алгоритмов SLAM и обновляется каждые несколько секунд, а процедура совместной локализации будет вызываться еще реже. Кроме того, разреженная плотность пространственных карт, а также разнородность размеров ячеек сетки карты создают дополнительные сложности



для регистрации облака точек. Кроме того, такой подход не соответствует принципам конфиденциальности. Однако если пользователь хочет управлять картой для размещения контента, необходимо сохранить ее первоначальную форму с личной информацией.

Анализ методов FGR и Teaser++ на реальных наборах данных выявил их слабость в подмодуле продвинутого сопоставления признаков. Как показывают результаты, совместная локализация MR-устройств или успешность регистрации карт облака точек методами на основе соответствий зависят от качества построения и фильтрации ложных соответствий. Это более важно для карт облаков точек с небольшим перекрытием, поскольку в этом случае увеличивается количество соответствий-выбросов. В алгоритме продвинутого сопоставления признаков используется неэффективный метод поиска ближайшего соседа в kd-дереве с низкой точностью. Чтобы частично компенсировать этот недостаток, в нем используется перекрестный поиск, который значительно увеличивает время выполнения. Следовательно, улучшение или замена подмодуля продвинутого сопоставления признаков могут повысить качество совместной локализации с точки зрения точности, надежности и времени выполнения. Кроме того, результаты показали, что использование дескриптора объекта WHI вместо дескриптора FPFH, используемого по умолчанию, позволяет повысить вероятность успешной регистрации.

## Заключение

В этой статье мы предложили подход к совместной глобальной локализации устройств смешанной реальности и показали его производительность и ограничения. Мы оценили эффективность четырех методов регистрации облаков точек (Go-ICP, Bayesian-ICP, FGR, Teaser++) на реальных облаках точек помещений, полученных с помощью MR-устройств Microsoft HoloLens (1-го и 2-го поколения). Методы на основе соответствий признаков (FGR, Teaser++) продемонстрировали миллисекундную эффективность выполнения и высокую вероятность успешного выравнивания по сравнению с методами на основе ICP (Go-ICP, Bayesian-ICP). Мы протестировали новый дескриптор WHI для метода регистрации облака точек. На синтетических данных мы протестировали гибридный подход, была составлена таблица с различными параметрами алгоритма и производительностью для совместной локализации MR-устройств. Для совместной локализации MR-устройств в реальном сценарии мы рекомендуем использовать дескриптор функции WHI с радиусом дескрипторов до 150 см, так как он более устойчив к помехам и описателен для реальных данных по сравнению с FPFH.

В будущих работах мы хотели бы исследовать подходы локализации MR-устройств на больших предварительно построенных и размеченных картах.

## Список литературы (References)

- Besl P. J., McKay N. D.* Method for registration of 3-D shapes // *Sensor fusion IV: control paradigms and data structures*. — Spie, 1992. — Vol. 1611. — P. 586–606.
- Black M. J., Rangarajan A.* On the unification of line processes, outlier rejection, and robust statistics with applications in early vision // *International journal of computer vision*. — 1996. — Vol. 19, No. 1. — P. 57–91.
- Chetverikov D., Stepanov D., Krsek P.* Robust Euclidean alignment of 3D point sets: the trimmed iterative closest point algorithm // *Image and vision computing*. — 2005. — Vol. 23, No. 3. — P. 299–309.
- Dusmanu M., Miksik O., Schönberger J. L., Pollefeys M.* Cross-descriptor visual localization and mapping / *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*. — 2021. — P. 6058–6067.

- Geman D., Yang C.* Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization // IEEE transactions on Image Processing. — 1995. — Vol. 4, No. 7. — P. 932–946.
- Granger S., Pennec X.* Multi-scale EM-ICP: A fast and robust approach for surface registration / European conference on computer vision. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. — P. 418–432.
- Guo Y., Bennamoun M., Sohel F., Lu M., Wan J., Kwok N.M.* A comprehensive performance evaluation of 3D local feature descriptors // International Journal of Computer Vision. — 2016. — Vol. 116, No. 1. — P. 66–89.
- Kaneko S., Kondo T., Miyamoto A.* Robust matching of 3D contours using iterative closest point algorithm improved by M-estimation // Pattern Recognition. — 2003. — Vol. 36, No. 9. — P. 2041–2047.
- Maier-Hein L., Franz A.M., Dos Santos T.R., Schmidt M., Fangerau M., Meinzer H.P., Fitzpatrick J.M.* Convergent iterative closest-point algorithm to accommodate anisotropic and inhomogeneous localization error // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. — 2011. — Vol. 34, No. 8. — P. 1520–1532.
- Maken F.A., Ramos F., Ott L.* Estimating motion uncertainty with bayesian ICP / 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). — IEEE, 2020. — P. 8602–8608.
- Maken F.A., Ramos F., Ott L.* Speeding up iterative closest point using stochastic gradient descent / 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA). — IEEE, 2019. — P. 6395–6401.
- Morrison D.R., Jacobson S.H., Sauppe J.J., Sewell E.C.* Branch-and-bound algorithms: A survey of recent advances in searching, branching, and pruning // Discrete Optimization. — 2016. — Vol. 19. — P. 79–102.
- Ng P.C., Henikoff S.* SIFT: Predicting amino acid changes that affect protein function // Nucleic acids research. — 2003. — Vol. 31 — No. 13. — P. 3812–3814.
- Rusu R.B., Blodow N., Beetz M.* Fast point feature histograms (FPFH) for 3D registration / 2009 IEEE international conference on robotics and automation. — IEEE, 2009. — P. 3212–3217.
- Sun T., Liu G., Liu S., Meng F., Zeng L., Li R.* An efficient and compact 3D local descriptor based on the weighted height image // Information Sciences. — 2020. — Vol. 520. — P. 209–231.
- Tian Y., Yu X., Fan B., Wu F., Heijnen H., Balntas V.* Sosnet: Second order similarity regularization for local descriptor learning / Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. — 2019. — P. 11016–11025.
- Welling M., Teh Y.W.* Bayesian learning via stochastic gradient Langevin dynamics / Proceedings of the 28th international conference on machine learning (ICML-11). — 2011. — P. 681–688.
- Yang H., Antonante P., Tzoumas V., Carlone L.* Graduated non-convexity for robust spatial perception: From non-minimal solvers to global outlier rejection // IEEE Robotics and Automation Letters. — 2020. — Vol. 5, No. 2. — P. 1127–1134.
- Yang H., Carlone L.* A polynomial-time solution for robust registration with extreme outlier rates // arXiv preprint arXiv:1903.08588. — 2019.
- Yang J., Li H., Campbell D., Jia Y.* Go-ICP: A globally optimal solution to 3D ICP point-set registration // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. — 2015. — Vol. 38, No. 11. — P. 2241–2254.
- Yang H., Shi J., Carlone L.* Teaser: Fast and certifiable point cloud registration // IEEE Transactions on Robotics. — 2020. — Vol. 37, No. 2. — P. 314–333.
- Zhou Q.Y., Park J., Koltun V.* Fast global registration / European conference on computer vision. — Cham: Springer, 2016. — P. 766–782.