

УДК: 517.958

Моделирование гидроупругого отклика пластины, установленной на нелинейно-упругом основании и взаимодействующей с пульсирующим слоем жидкости

Д. В. Кондратов^{1,2,3}, Т. С. Кондратова¹, В. С. Попов^{1,3,а}, А. А. Попова¹

¹Саратовский государственный технический университет имени Ю. А. Гагарина,
Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени
Н. Г. Чернышевского,
Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

³Институт проблем точной механики и управления – обособленное структурное подразделение
Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального исследовательского центра
«Саратовский научный центр РАН»,
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

E-mail: ^а vic_p@bk.ru

Получено 17.01.2023, после доработки – 20.03.2023.
Принято к публикации 26.04.2023.

В работе сформулирована математическая модель гидроупругих колебаний пластины на нелинейно-упрочняющемся основании, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости. В предложенной модели, в отличие от известных, совместно учтены упругие свойства пластины, нелинейность ее основания, а также диссипативные свойства жидкости и инерция ее движения. Модель представлена системой уравнений двумерной задачи гидроупругости, включающей: уравнение динамики пластины Кирхгофа на упругом основании с жесткой кубической нелинейностью, уравнения Навье – Стокса, уравнение неразрывности, краевые условия для прогибов пластины, давления жидкости на торцах пластины, а также для скоростей движения жидкости на границах контакта жидкости и ограничивающих ее стенок. Исследование модели проведено методом возмущений с последующим использованием метода итерации для уравнений тонкого слоя вязкой жидкости. В результате определен закон распределения давления жидкости на поверхности пластины и осуществлен переход к интегро-дифференциальному уравнению изгибных гидроупругих колебаний пластины. Данное уравнение решено методом Бубнова – Галёркина с применением метода гармонического баланса для определения основного гидроупругого отклика пластины и фазового сдвига. Показано, что исходная задача может быть сведена к исследованию обобщенного уравнения Дуффинга, в котором коэффициенты при инерционных, диссипативных и жесткостных членах определяются физико-механическими параметрами исходной системы. Найдены основной гидроупругий отклик пластины и фазовый сдвиг, проведено их численное исследование при учете инерции движения жидкости и для ползущего движения жидкости при нелинейно- и линейно-упругом основании пластины. Результаты расчетов показали необходимость учета вязкости жидкости и инерции ее движения совместно с упругими свойствами пластины и ее основания как для нелинейных колебаний, так и для линейных колебаний пластины.

Ключевые слова: моделирование, пластина, нелинейно-упрочняющееся основание, пульсирующая вязкая жидкость, нелинейные колебания, гидроупругий отклик, фазовый сдвиг

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 23-29-00159.

© 2023 Дмитрий Вячеславович Кондратов, Татьяна Сергеевна Кондратова, Виктор Сергеевич Попов, Анна Александровна Попова
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 517.958

Modelling hydroelastic response of a plate resting on a nonlinear foundation and interacting with a pulsating fluid layer

D. V. Kondratov^{1,2,3}, T. S. Kondratova¹, V. S. Popov^{1,3,a}, A. A. Popova¹

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
77 Politehnicheskaya st., Saratov, 410054, Russia

²Saratov State University,

83 Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russia

³Institute of Precision Mechanics and Control – Subdivision of the Federal State Budgetary Research Institution
Saratov Federal Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
24 Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia

E-mail: ^a vic_p@bk.ru

Received 17.01.2023, after completion – 20.03.2023.

Accepted for publication 26.04.2023.

The paper formulates a mathematical model for hydroelastic oscillations of a plate resting on a nonlinear hardening elastic foundation and interacting with a pulsating fluid layer. The main feature of the proposed model, unlike the well-known ones, is the joint consideration of the elastic properties of the plate, the nonlinearity of elastic foundation, as well as the dissipative properties of the fluid and the inertia of its motion. The model is represented by a system of equations for a two-dimensional hydroelasticity problem including dynamics equation of Kirchhoff's plate resting on the elastic foundation with hardening cubic nonlinearity, Navier – Stokes equations, and continuity equation. This system is supplemented by boundary conditions for plate deflections and fluid pressure at plate ends, as well as for fluid velocities at the bounding walls. The model was investigated by perturbation method with subsequent use of iteration method for the equations of thin layer of viscous fluid. As a result, the fluid pressure distribution at the plate surface was obtained and the transition to an integro-differential equation describing bending hydroelastic oscillations of the plate is performed. This equation is solved by the Bubnov – Galerkin method using the harmonic balance method to determine the primary hydroelastic response of the plate and phase response due to the given harmonic law of fluid pressure pulsation at plate ends. It is shown that the original problem can be reduced to the study of the generalized Duffing equation, in which the coefficients at inertial, dissipative and stiffness terms are determined by the physical and mechanical parameters of the original system. The primary hydroelastic response and phases response for the plate are found. The numerical study of these responses is performed for the cases of considering the inertia of fluid motion and the creeping fluid motion for the nonlinear and linearly elastic foundation of the plate. The results of the calculations showed the need to jointly consider the viscosity and inertia of the fluid motion together with the elastic properties of the plate and its foundation, both for nonlinear and linear vibrations of the plate.

Keywords: modelling, plate, nonlinear hardening foundation, pulsating viscous fluid, nonlinear oscillations, hydroelastic response, phase response

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 581–597 (Russian).

The work was supported by Russian Science Foundation grant No. 23-29-00159.

1. Введение

Одной из актуальных проблем современной механики и математической физики является разработка математических моделей и моделирование динамики взаимодействия жидкости и упругих конструкций. Данное направление связано с развитием теории гидроупругости, а также потребностями современного машиностроения, приборостроения и строительства, так как упругие конструкции в виде балок, пластин и оболочек являются основными элементами различных машин, устройств и сооружений. Например, трубопроводы можно рассматривать как балки кольцевого сечения или оболочки, взаимодействующие с жидкостью. Обшивку судов, летательных аппаратов, гидротехнических сооружений — как пластины, контактирующие с потоком жидкости [Горшков и др., 2000; Amabili, 2008; Païdoussis, Price, De Langre, 2011]. Кроме того, упругие элементы могут представлять собой чувствительные элементы различных датчиков [Распопов, 2007]. Исследование проблем взаимодействия жидкости с реальными упругими конструкциями требует формулировки задач гидроупругости с учетом различных дополнительных факторов, учитывающих наличие упругих соединений между жесткими элементами конструкции, особенностей краевого закрепления упругой конструкции, диссипации энергии за счет вязких сил трения жидкости, а также влияние сил инерции жидкости, особенностей изготовления и деформации упругой конструкции, упругой податливости ее основания и др. Например, в [Indeitsev, Osipova, 2000] исследовано взаимодействие вибрирующего штампа, опирающегося на пружину и являющегося частью дна бесконечно длинного канала малой глубины, с находящейся в нем идеальной жидкостью со свободной поверхностью. В работе [Kheiri et al., 2014] исследовалась динамика и устойчивость трубопровода, транспортирующего идеальную жидкость. Трубопровод представляется балкой кольцевого сечения, имеющей упругоподатливые закрепления на торцах в виде пружин, допускающих поворот торцов и их смещение. Экспериментальное исследование влияния гидроупругих эффектов при подъеме круглой пластины с поверхности воды проведено в [Vega-Martínez et al., 2019]. Исследование показало, что на динамику процесса, кроме влияния присоединенной массы жидкости, существенное воздействие оказывают прогибы пластины. В исследовании также предложена модель процесса в рамках линейной осесимметричной задачи гидроупругости для круглой пластины Кирхгофа, взаимодействующей с идеальной несжимаемой жидкостью. Собственные частоты колебаний и устойчивость прямоугольной пластины конечных размеров, являющейся верхней стенкой канала с прямоугольным сечением, заполненного идеальной жидкостью, исследованы численно на базе метода конечных элементов в [Bochkarev, Lekomtsev, Matveenko, 2016]. В [Morozov, Indeitsev, Michailov, 2019] рассмотрены задачи взаимодействия идеальной жидкости с пластины различной формы при разного рода вариантах их закрепления на торцах и получены присоединенные массы жидкости, учитывающие увеличение инерционных свойств упругой конструкции в рассматриваемой механической системе. Результаты экспериментального исследования частот собственных колебаний прямоугольных пластин на свободной поверхности воды и в воздухе при различных вариантах их опирания на торцах представлены в [Bochkarev, Kamenskikh, Lekomtsev, 2020]. Вопросы подавления гидроупругой реакции дна цилиндрического резервуара с жесткими стенками и дном в виде круглой пластины, на упругом основании Пастернака, изучены в [Hasheminejad, Mohammadi, 2017]. Исследование проведено в рамках линейной осесимметричной задачи гидроупругости для круглой пластины Кирхгофа, взаимодействующей с идеальной пульсирующей жидкостью. В работе [Kutlu, Uğurlu, 2017] аналогичная задача была исследована численно с использованием конечно-элементного подхода, для системы «круглая пластина Миндлина – упругое основание», и при учете взаимодействия между идеальной жидкостью и упругой пластиной с помощью метода граничных элементов. Гидроупругие колебания тонкой пороупругой плавающей пластины, для моделирования колебаний ледового покрова под действием внешнего гармонически изменяющегося по времени давления, рассмотрены в [Zavyalova, Shishmarev, Korobkin, 2021]. Исследование про-

ведено в рамках плоской линейной задачи гидроупругости пластины Кирхгофа, взаимодействующей с идеальной несжимаемой жидкостью, а для учета пористой структуры льда вводится в рассмотрение параметр пористости, представляющий собой аналог коэффициента Дарси в теории фильтрации. Аналогичное исследование по взаимодействию пористой упругой пластины на поверхности идеальной жидкости с пористым элементом на дне канала через слой жидкости между ними выполнено в [Kumar, Saha, Bora, 2022]. Гидроупругий отклик чувствительного элемента датчика давления в виде круглой пластины Кирхгофа, установленной на конце абсолютно жесткой трубы, заполненной пульсирующей идеальной жидкостью, с учетом тепловых и гидродинамических эффектов для осесимметричной задачи определен и исследован в [Velmisov, Pokladova, 2019; Вельмисов, Покладова, 2011]. Однако в упомянутых работах не рассматривается влияние вязкости жидкости на гидроупругие колебания твердых тел и пластин, поэтому ниже мы приводим краткий обзор современных исследований, рассматривающих этот аспект. Численное моделирование взаимодействия вязкого сжимаемого газа с подпружиненным жестким диском, при описании движения последнего одномассовой моделью, для исследования процесса срабатывания предохранительного клапана выполнено в [Королева и др., 2018]. Двумерная задача гидроупругости для моделирования колебаний абсолютно жесткой стенки клиновидного канала, подвешенной на пружине и взаимодействующей со слоем вязкой ползущей жидкости, поставлена и решена в [Mogilevich, Popov, Popova, 2018; Mogilevich, Popov, Rabinsky, 2016]. Моделирование колебаний упруго закрепленных абсолютно жестких торцевых стенок плоского или кольцевого канала, взаимодействующих с пульсирующей вязкой жидкостью, проведено в [Попов, Попова, 2020; Kondratov, Popov, Popova, 2021; Christoforova, Popov, Popova, 2023]. Постановка и решение двумерной задачи гидроупругости для исследования изгибных колебаний консольно закрепленной балки Эйлера – Бернулли, окруженной неограниченной вязкой несжимаемой жидкостью, осуществлены в [Faria, Inman, 2014]. Исследование нелинейного гидроупругого отклика жесткой стенки, имеющей нелинейно-упругий подвес и являющейся торцевым уплотнением плоского канала с вибрирующей верхней стенкой, заполненного вязкой жидкостью, выполнено в [Barulina et al., 2022]. В работе [Christoforova, Popov, Popova, 2022] проведено математическое моделирование нелинейных колебаний жесткой стенки узкого канала с параллельными стенками, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. Авторы исследовали канал, верхняя жесткая стенка которого поддерживается пружиной с кубической нелинейностью, а противоположная стенка считается жесткой и неподвижной, а возбуждение колебаний происходит за счет пульсации давления на торцах канала. В [Velmisov, Ankilov, 2017] поставлена и решена двумерная задача динамической устойчивости упругой пластины, являющейся частью твердой границы, разделяющей две вязкие жидкости. Исследование собственных колебаний нанопластины, взаимодействующей со слоем вязкой жидкости над ней, при ограничении учетом только градиента давления и составляющей скорости жидкости по нормали к пластине, проведено в [Hosseini-Hashemi et al., 2019]. Вместе с тем в указанной работе не раскрыт вопрос об удовлетворении условий на границе контакта вязкой жидкости с пластиной и не рассмотрен случай установки пластины на упругое основание. В работе [Tulchinsky, Gat, 2019] на основе постановки и решения двумерной связанный задачи гидроупругости были исследованы установившиеся колебания слоя вязкой пульсирующей жидкости, находящегося в канале с параллельными стенками, опирающимся на упругое основание Винклера, стенки канала образованы бесконечно длинными упругими пластинами Кирхгофа. Изгибные и радиальные установившиеся колебания круглой трехслойной пластины, опирающейся на упругое основание Винклера и взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости, изучались в [Popov, Chernenko, 2021]. Однако в указанных выше работах за рамками исследования остались вопросы определения гидроупругого отклика пластины, опирающейся на упрочняющееся нелинейно-упругое основание и взаимодействующей со слоем пульсирующей вязкой жидкости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим пластину, установленную на нелинейно-упругое основание, которая образует нижнюю стенку узкого канала, как показано на рис. 1. Основание рассматривается как обобщение основания Винклера, у которого кроме линейной реакции, пропорциональной кубу ее прогиба [Reissner, 1970; Erofeev et al., 2008; Андрианов, Данишевский, Иванков, 2010]. На торцах пластина имеет шарнирное опирание. Верхняя стенка канала является абсолютно жесткой, в невозмущенном состоянии стенки канала параллельны друг другу. Полагаем, что толщина пластины — h_0 , размеры стенок канала в плане равны $2\ell \times b$ при условии $2\ell \ll b$, и исследуем двумерную задачу гидроупругости для рассматриваемой пластины. Связем декартову систему координат xuz с центром срединной поверхности пластины в невозмущенном состоянии, при этом расстояние между стенками канала — δ . Узость канала обуславливает условие $\delta \ll \ell$. Канал полностью заполнен пульсирующей вязкой несжимаемой жидкостью. Пульсация жидкости вызвана заданным на торцах справа и слева гармоническим законом изменения давления p^* . Вследствие того, что учет вязких сил трения в жидкости ведет к быстрому затуханию переходных процессов [Пановко, 1991; Пановко, Губанова, 2020], далее рассматриваем установившиеся изгибные нелинейные колебания [Nayfeh, Mook, 1979] пластины за счет пульсации давления жидкости в канале, амплитуда которых — $w_m \ll \delta$.

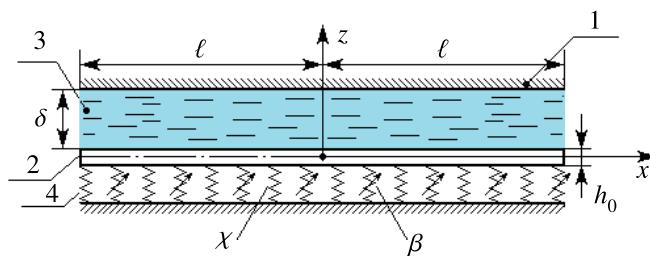


Рис. 1. Пластина, установленная на нелинейно-упругом основании и образующая дно узкого канала с параллельными стенками: 1 — верхняя неподвижная абсолютно жесткая стенка, 2 — пластина, 3 — вязкая пульсирующая жидкость, 4 — нелинейно-упругое основание, реакция которого пропорциональна прогибу (χ — коэффициент жесткости при линейной составляющей) и кубу прогиба (β — коэффициент жесткости при кубической составляющей)

Заданный закон пульсации давления на торцах канала представим в виде

$$p^* = -p_m \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь p_m — амплитуда пульсации давления, ω — заданная частота пульсации (частота вынуждающего воздействия), t — время.

Пластину рассматриваем в рамках гипотез Кирхгофа и уравнение ее динамики [Howell, Kozyreff, Ockendon, 2009] с учетом реакции нелинейного основания запишем в виде

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_n - q_f, \quad (2)$$

где $D = \frac{Eh_0^3}{12(1-\mu_0^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины, E — модуль Юнга материала пластины, μ_0 — коэффициент Пуассона материала пластины, ρ_0 — плотность материала пластины, w — прогиб пластины, t — время, q_n — напряжение, действующее на пластину со стороны жидкости, q_f — напряжение, действующее на пластину со стороны нелинейного основания.

Напряжение q_n определяется нормальным напряжением вязкой несжимаемой жидкости [Lamb, 1945] на верхней поверхности пластины, контактирующей с жидкостью, т. е.

$$q_n = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{при } z = \frac{h_0}{2} + w, \quad (3)$$

а напряжение q_f имеет вид [Erofeev et al., 2008; Андрианов, Данишевский, Иванков, 2010]

$$q_f = \chi w + \beta w^3. \quad (4)$$

Здесь p — давление жидкости, V_z — проекция скорости жидкости на ось Oz , ν , ρ — коэффициент кинематической вязкости жидкости и ее плотность соответственно, χ — коэффициент жесткости при линейной составляющей напряжения, действующего со стороны основания, β — коэффициент жесткости при кубической составляющей напряжения, действующего со стороны основания. Далее ограничимся рассмотрением так называемой жесткой нелинейности, когда $\beta > 0$, т. е. рассмотрим упрочняющееся основание [Reissner, 1970; Erofeev et al., 2008].

Уравнение (2) дополняется краевыми условиями — условиями шарнирного опищения пластины на торцах:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = -\ell, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = \ell. \quad (5)$$

В рассматриваемой постановке уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости представляют собой уравнения Навье–Стокса, записанные совместно с уравнением неразрывности [Lamb, 1945]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где V_x , V_z — проекции вектора скорости жидкости на оси координат.

Уравнения (6) дополним краевыми условиями: условиями равенства скоростей на границах контакта жидкости с пластиной и верхней неподвижной абсолютно жесткой стенкой канала:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial u}{\partial t}, \quad V_z = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{при } z = \frac{h_0}{2} + w, \\ V_x &= 0, \quad V_z = 0 \quad \text{при } z = \frac{h_0}{2} + \delta, \end{aligned} \quad (7)$$

а также условиями для давления в сечениях на левом и правом торцах канала:

$$p = p^*(\omega t) \quad \text{при } x = -\ell, \quad p = p^*(\omega t) \quad \text{при } x = \ell. \quad (8)$$

Здесь u — продольное перемещение пластины.

3. Разрешающие уравнения задачи гидроупругости для тонкого слоя пульсирующей вязкой жидкости

В рамках поставленной задачи введем в рассмотрение безразмерные переменные и малые параметры:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\delta}{\ell} \ll 1, \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} \ll 1, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad \zeta = \frac{z - \frac{h_0}{2}}{\delta}, \quad \tau = \theta t, \quad V_x = \frac{w_m \theta}{\psi} U_\xi, \\ w &= w_m W, \quad u = u_m U, \quad V_z = w_m \theta U_\zeta, \quad p = p^*(\omega t) + \frac{\rho \nu w_m \theta}{\delta \psi^2} P, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\theta = \frac{1}{T}$ — характерная частота нелинейных колебаний пластины, T — характерный период нелинейных колебаний пластины.

Осуществив подстановку (9) в (2)–(8), получим уравнения гидроупругости, в которых присутствуют члены порядка λ , ψ и ψ^2 . Применяя к данным уравнениям метод возмущений [Van Dyke, 1975; Попов, Попова, 2022], а именно, рассматривая асимптотические разложения по малому параметру λ и ограничиваясь только одним членом разложения, т. е. исключая из рассмотрения члены порядка λ , а также ψ и ψ^2 , получим разрешающие уравнения рассматриваемой задачи гидроупругости для тонкого слоя жидкости в безразмерных переменных (9), включающие в себя

- уравнения динамики пластины на нелинейно-упругом основании:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{\chi \ell^4}{D} W + \frac{\beta \ell^6}{D} \left(\frac{w_m}{\ell} \right)^2 W^3 = -\frac{\ell^4 \rho_0 h_0 \theta^2}{D} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{p^*(\omega t)}{\rho_0 h_0 w_m \theta^2} + \frac{\rho \nu}{\rho_0 h_0 \theta \delta \psi^2} P \right]; \quad (10)$$

- уравнения тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{\theta \delta_0^2}{\nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0; \quad (11)$$

соответствующие им краевые условия:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = \mp 1, \quad (12)$$

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{\partial W}{\partial \tau} \quad \text{при } \zeta = 0, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = 0 \quad \text{при } \zeta = 1, \quad (13)$$

$$P = 0 \quad \text{при } \xi = \mp 1.$$

Для определения закона изменения безразмерного давления P , входящего в правую часть (10), проведем решение уравнений (11) методом итерации [Могилевич, Попов, Скородумов, 2017]. На первой итерации исключим из (11) инерционный член $\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau}$ и получим уравнения гидродинамической теории смазки с граничными условиями (13). Затем на второй итерации подставим найденное на первой итерации решение в инерционный член $\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau}$ и решим полученные уравнения с граничными условиями (13). В результате на первой итерации получаем следующее решение:

$$U_\xi = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad U_\zeta = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} (3\zeta^2 - 2\zeta^3 - 1), \\ P = 12 \int_{\xi}^1 \int \frac{\partial W}{\partial \tau} d\xi d\zeta + 6(\xi - 1) \int_{-1}^1 \int \frac{\partial W}{\partial \tau} d\xi d\zeta. \quad (14)$$

Проводя решение уравнений (11) с граничными условиями (13), на второй итерации с учетом (14) определяем закон распределения давления вдоль канала в виде

$$P = \int_{\xi}^1 \int \left(\frac{6}{\nu} \frac{\delta^2 \theta}{\partial \tau^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 12 \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\zeta + \frac{1}{2} (\xi - 1) \int_{-1}^1 \int \left(\frac{6}{\nu} \frac{\delta^2 \theta}{\partial \tau^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 12 \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\zeta. \quad (15)$$

Можно заметить, что решение (14) соответствует случаю ползущего течения жидкости в рассматриваемом канале. Как известно, для такого течения инерционные члены в уравнениях динамики вязкой жидкости (6) исключаются из рассмотрения [Lamb, 1945] по сравнению с членами сил вязкого трения.

Учитывая найденный закон распределения давления (15) в (10), запишем его в размерном виде

$$\begin{aligned} \frac{D}{\ell^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \chi w + \beta w^3 + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \\ = -p^*(\omega t) - \frac{\rho \nu}{\delta \psi^2} \left(\int_{\xi}^1 \int \left(\frac{6}{5} \frac{\delta^2}{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 12 \frac{\partial w}{\partial t} \right) d\xi d\xi + \frac{\xi - 1}{2} \int_{-1}^1 \int \left(\frac{6}{5} \frac{\delta^2}{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 12 \frac{\partial w}{\partial t} \right) d\xi d\xi \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Заметим, если рассматривать случай ползущего течения вязкой жидкости в узком канале, уравнение (16) примет вид

$$\frac{D}{\ell^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \chi w + \beta w^3 + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p^*(\omega t) - \frac{12 \rho \nu}{\delta_0 \psi^2} \left(\int_{\xi}^1 \int \frac{\partial w}{\partial t} d\xi d\xi + \frac{\xi - 1}{2} \int_{-1}^1 \int \frac{\partial w}{\partial t} d\xi d\xi \right). \quad (17)$$

В результате мы получили нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (16), описывающее изгибные гидроупругие колебания пластины, опирающейся на упругое основание с кубической нелинейностью и взаимодействующей с тонким слоем пульсирующей вязкой жидкости. Кроме того, получили частный вид данного уравнения (17) для случая ползущего течения пульсирующей вязкой жидкости в узком канале. Эти уравнения позволяют определить и исследовать нелинейный гидроупругий отклик пластины на заданный закон пульсации давления на ее торцах. В обоих случаях уравнения дополняются краевыми условиями (5), которые можно записать в виде $w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0$ при $\xi = \mp 1$.

4. Определение нелинейного гидроупрого отклика пластины

Для решения уравнения (17) используем метод Бубнова – Галёркина [Пановко, Губанова, 2020], согласно которому, учитывая краевые условия (5), форму прогибов пластины представим в виде

$$w = w_m W = \sum_{k=1}^n R_k(t) \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi. \quad (18)$$

Здесь $R_k(t)$ — неизвестные функции времени, n — количество удерживаемых членов ряда.

Учитывая форму прогибов (18) в правой части уравнения (16) и раскладывая $p^*(\omega t)$ в ряд по базисным функциям $\cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi$, после вычисления интегралов записываем правую часть (16) в виде

$$\begin{aligned} -p^*(\omega t) - \frac{\rho \nu}{\delta \psi^2} \left(\int_{\xi}^1 \int \left(\frac{6}{5} \frac{\delta^2}{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 12 \frac{\partial w}{\partial t} \right) d\xi d\xi + \frac{\xi - 1}{2} \int_{-1}^1 \int \left(\frac{6}{5} \frac{\delta^2}{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 12 \frac{\partial w}{\partial t} \right) d\xi d\xi \right) = \\ = -p^*(\omega t) \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi - \sum_{k=1}^n \left(M_k \frac{d^2 R_k}{dt^2} + K_k \frac{d R_k}{dt} \right) \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi, \quad (19) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{\rho \nu}{\delta \psi^2} \left[\frac{2}{(2k-1)\pi} \right]^2 \frac{\delta^2}{\nu} \frac{6}{5} = \frac{6\rho\ell^2}{5\delta} \left[\frac{2}{(2k-1)\pi} \right]^2, \\ K_k &= 12 \frac{\rho \nu}{\delta \psi^2} \left[\frac{2}{(2k-1)\pi} \right]^2 = 12 \frac{\rho \nu \ell^2}{\delta^3} \left[\frac{2}{(2k-1)\pi} \right]^2. \end{aligned} \quad (20)$$

В частном случае, при рассмотрении ползущего течения, правая часть уравнения (17) может быть также разложена по указанным базисным функциям. Данное разложение можно получить из (19), если положить $M_k = 0$.

Принимая во внимание наличие в рассматриваемой колебательной системе существенного демпфирования, обусловленного значительными силами вязкого трения в узком канале [Lamb, 1945], проводя процедуру метода Бубнова – Галёркина, можно ограничиться основной формой прогиба, так как амплитуды обертонаов будут подавляться и в течение короткого промежутка времени при выходе решения на установившиеся колебания будет преобладать основная форма (тон) колебаний [Пановко, 1991; Пановко, Губанова, 2020]. Таким образом, ограничиваясь первым членом ($n = 1$) в (18) и подставляя выбранную форму прогиба в (16) с учетом (19), а затем умножая правую и левую части полученного уравнения на базисную функцию и проводя интегрирование по ξ от -1 до 1 , получим следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\rho_0 h_0 + M_1) \frac{d^2 R_1}{dt^2} + K_1 \frac{dR_1}{dt} + \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{D}{\ell^4} + \chi \right] R_1 + \frac{3}{4} \beta R_1^3 = -\frac{4}{\pi} p^*(\omega t). \quad (21)$$

Уравнение (21) можно рассматривать как обобщение уравнения Дуффинга с учетом увеличения инерционных свойств (присоединенная масса жидкости M_1) и диссипации энергии (коэффициент демпфирования K_1) в рассматриваемой колебательной системе за счет взаимодействия пластины с тонким слоем вязкой пульсирующей жидкости. Другими словами, в отличие от классического уравнения Дуффинга в (21) входят присоединенная масса M_1 , коэффициент демпфирования K_1 , которые определяются физическими свойствами жидкости и геометрическими размерами канала, а также жесткость пластины и коэффициенты жесткости нелинейно-упругого основания. Если положить в (21) $M_1 = 0$, осуществляя переход к частному случаю ползущего течения пульсирующей вязкой жидкости в узком канале. Таким образом, показано, что задача гидроупругих колебаний пластины, установленной на нелинейно-упругом основании с кубической нелинейностью и взаимодействующей с тонким слоем вязкой жидкости, может быть сведена к исследованию уравнения (21). Проведем данное исследование на предмет определения периодического решения (21) методом гармонического баланса [Korsch, Jodl, Hartmann, 2008; Krack, Gross, 2019] с целью определения нелинейного гидроупругого отклика пластины на заданный закон пульсации давления на торцах канала.

Согласно методу гармонического баланса определим основной гидроупругий отклик пластины, соответствующий заданной частоте пульсаций давления в торцевых сечениях канала, т. е. полагаем частоту нелинейных колебаний близкой к частоте вынуждающего воздействия: $\theta \approx \omega$. Примем во внимание, что наличие демпфирования ведет к появлению фазового сдвига φ . Для упрощения дальнейших выкладок учтем неизвестный на данном этапе фазовый сдвиг в правой части (21), т. е. вместо (1) будем использовать $p^* = -p_m \sin(\omega t + \varphi)$, а искомое решение уравнения (21) представим в виде усеченного ряда Фурье:

$$R_1 = R_m \sin \omega t. \quad (22)$$

Имея в виду сказанное выше, подставляя (22) в уравнение (21) и раскладывая кубический член уравнения в усеченный ряд Фурье (22), получим

$$\left[\left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D + \chi + \frac{9}{16} \beta R_m^2 - (\rho_0 h_0 + M_1) \omega^2 \right] R_m \sin \omega t + K_1 \omega R_m \cos \omega t = \frac{4}{\pi} p_m (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi). \quad (23)$$

Приравнивая члены при одинаковых тригонометрических функциях, переходим к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D + \chi + \frac{9}{16} \beta R_m^2 - (\rho_0 h_0 + M_1) \omega^2 \right] R_m &= \frac{4}{\pi} p_m \cos \varphi, \\ K_1 \omega R_m &= \frac{4}{\pi} p_m \sin \varphi. \end{aligned} \quad (24)$$

Из системы (24) получаем уравнение для амплитуды прогибов пластины:

$$\left(\left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D + \chi + \frac{9}{16} \beta R_m^2 - (\rho_0 h_0 + M_1) \omega^2 \right)^2 R_m^2 + (K_1 \omega R_m)^2 = \frac{16}{\pi^2} p_m^2, \quad (25)$$

а также выражение для неизвестного фазового сдвига:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{K_1 \omega}{\rho_0 h_0 + M_1}}{\omega_*^2 - \omega^2}, \quad \omega_*^2 = \frac{\chi + \left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D + \frac{9}{16} \beta R_m^2}{\rho_0 h_0 + M_1}. \quad (26)$$

Здесь введена характеристика $\omega_*^2(R_m)$ — так называемая скелетная кривая, оценивающая изменение собственной частоты рассматриваемой нелинейной системы, если ее считать консервативной (полагая $K_1 = 0$) по сравнению с аналогичной линейной системой, т. е. при $\beta = 0$.

Из (25) находим основной гидроупругий отклик пластины на нелинейно-упругом основании, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости, в следующем виде:

$$R_m = \frac{4}{\pi} \frac{\frac{p_m}{\rho_0 h_0 + M_1}}{\sqrt{\left(\omega_*^2 - \omega^2 \right)^2 + \left(\frac{K_1 \omega}{\rho_0 h_0 + M_1} \right)^2}}. \quad (27)$$

Введем безразмерную частоту η как отношение размерной частоты к собственной частоте линейной консервативной системы, т. е. рассматриваемой колебательной системы без демпфирования:

$$\eta = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\chi + \left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D}{\rho_0 h_0 + M_1}}}. \quad (28)$$

Тогда фазовый сдвиг (26) запишется как

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\eta}{1 + \frac{9}{16} \beta R_m^2 \left(\left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D + \chi \right)^{-1} - \eta^2}, \quad (29)$$

а гидроупругий отклик пластины (27) представим в виде

$$R_m = \frac{4}{\pi} \frac{\frac{p_m}{\chi + \left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D}}{\sqrt{\left(\eta_*^2 - \eta^2 \right)^2 + d^2 \eta^2}}. \quad (30)$$

Здесь обозначено $\eta_*^2 = 1 + \frac{9}{16} \beta R_m^2 \left(\left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D + \chi \right)^{-1}$, $d^2 = \frac{K_1^2}{\rho_0 h_0 + M_1} \left(\left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D + \chi \right)^{-1}$.

Член η_* в (30) представляет собой безразмерную скелетную кривую рассматриваемой колебательной системы. Разрешая (29) относительно η^2 , получим гидроупругий отклик пластины для введенной в рассмотрение безразмерной частоты:

$$\eta^2 = 1 + \frac{9\beta R_m^2}{16} \left(D \left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 + \chi \right)^{-1} - \frac{d^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\frac{4p_m}{\left(\chi + \left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D \right)^2}}{\pi^2 R_m^2} - d^2} \left(1 + \frac{9\beta R_m^2}{16} \left(D \left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^4 + \chi \right)^{-1} - \frac{d^2}{4} \right). \quad (31)$$

5. Результаты расчетов

Следует отметить, что полученные выражения для гидроупругого отклика пластины в виде (27), (30) или (31) и ее фазового сдвига (26) или (29) при $\beta = 0$ позволяют осуществить переход к частному случаю пластины, лежащей на линейно-упругом основании Винклера. С другой стороны, полагая в указанных выражения $M_1 = 0$, переходим к рассмотрению ползущего течения жидкости в узком канале, т. е. исключаем из рассмотрения инерцию движения жидкости, что соответствует рассмотрению только первой итерации при решении задачи динамики тонкого слоя жидкости в рассматриваемом канале. Кроме того, заметим, что в рамках разработанной модели возможно рассмотреть основной тон гидроупругих колебаний пластины при отсутствии упругого основания, если положить $\beta = \chi = 0$.

В случае нелинейного основания расчетные соотношения для гидроупругого отклика пластины (27), (30) и ее фазового сдвига (26), (29) представляют собой неявные функции, и их использование напрямую затруднительно, но они могут быть исследованы численно по аналогии с классическим осциллятором Дуффинга [Korsch, Jodl, Hartmann, 2008; Krack, Gross, 2019]. Поэтому далее приведем результаты численного моделирования гидроупругого отклика пластины для указанных выше случаев на примере канала со следующими параметрами: $\ell = 0,1$ м, $\delta_0 = 0,008$ м, $h_0 = 0,005$ м, $\mu_0 = 0,3$, $\rho_0 = 7,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\chi = 10^8$ Па/м, $\beta = 3 \cdot 10^{14}$ Па/м³, $\rho = 1,84 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 2,53 \cdot 10^{-4}$ м²/с.

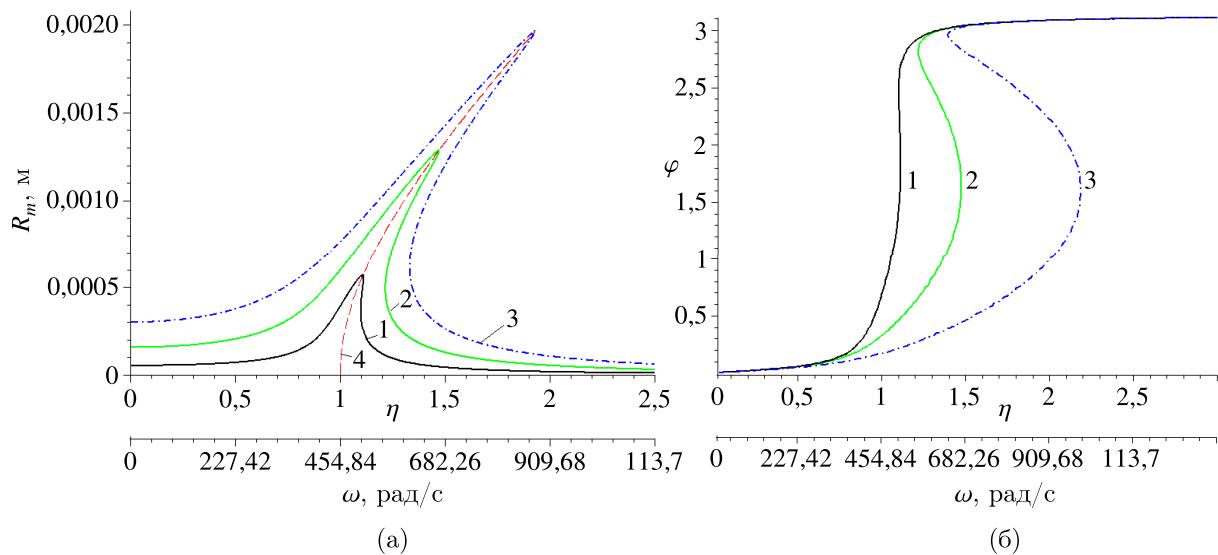


Рис. 2. Гидроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) пластины на упругом основании с жесткой кубической нелинейностью при учете инерции движения жидкости: 1 — амплитуда пульсации давления $p_m = 10^4$ Па, 2 — амплитуда пульсации давления $p_m = 3 \cdot 10^4$ Па, 3 — амплитуда пульсации давления $p_m = 6 \cdot 10^4$ Па, 4 — скелетная кривая η_* .

На рис. 2, *a*, *b* представлены расчеты гидроупругого отклика пластины и ее фазового сдвига в случае учета нелинейности основания и инерции движения жидкости. Результаты расчетов для гидроупругого отклика пластины на нелинейно-упругом основании в случае ползущего движения жидкости в канале, т. е. при исключении из рассмотрения инерции ее движения, приведены на рис. 3, *a*, *b*. На рис. 4, *a*, *b* и рис. 5, *a*, *b* представлены результаты расчетов гидроупругого отклика пластины на линейно-упругом основании Винклера и ее фазового сдвига для случаев учета инерции движения жидкости и ползущего движения жидкости в канале. На рис. 6 приведены результаты расчетов гидроупругого отклика пластины при наличии или отсутствии

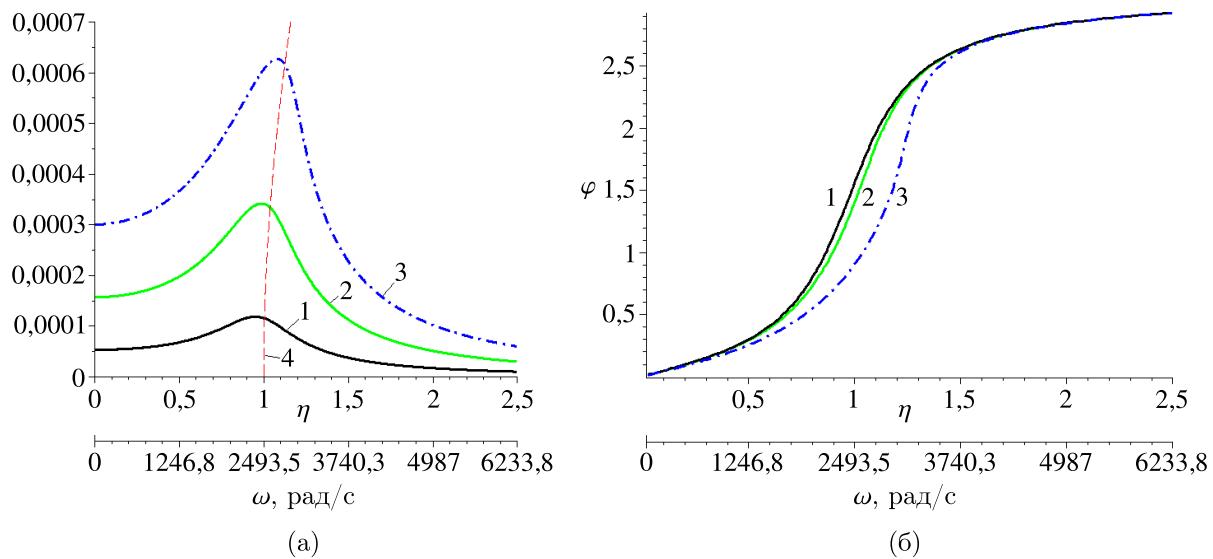


Рис. 3. Гидроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) пластины на упругом основании с жесткой кубической нелинейностью без учета инерции движения жидкости (ползущее течение): 1 — амплитуда пульсации давления $p_m = 10^4$ Па, 2 — амплитуда пульсации давления $p_m = 3 \cdot 10^4$ Па, 3 — амплитуда пульсации давления $p_m = 6 \cdot 10^4$ Па, 4 — скелетная кривая η_* .

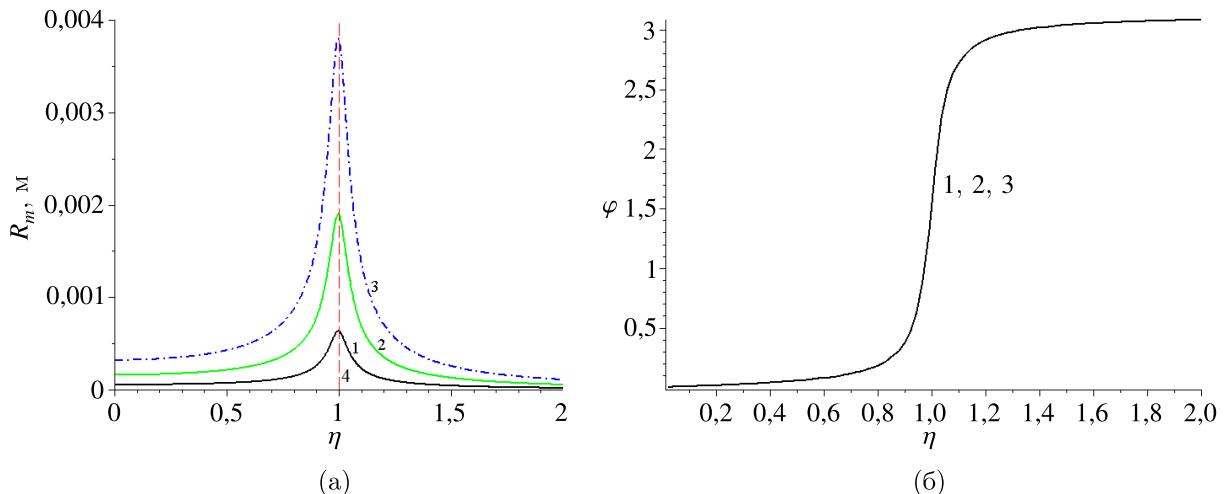


Рис. 4. Гидроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) пластины на линейном упругом основании Винклера при учете инерции движения жидкости: 1 — амплитуда пульсации давления $p_m = 10^4$ Па, 2 — амплитуда пульсации давления $p_m = 3 \cdot 10^4$ Па, 3 — амплитуда пульсации давления $p_m = 6 \cdot 10^4$ Па, 4 — собственная частота консервативной линейной системы (соответствует точке на скелетной кривой η_* при $R_m = 0$)

линейно-упругого основания Винклера для случаев учета инерции движения жидкости или без учета инерции движения жидкости (ползущее течение жидкости).

6. Заключение

Представленные результаты моделирования указывают на сильное влияние диссипативных свойств жидкости (ее вязкости) и особенностей ее движения в канале на гидроупругий отклик и фазовый сдвиг пластины. Данное влияние проявляется как в случаях нелинейных колебаний

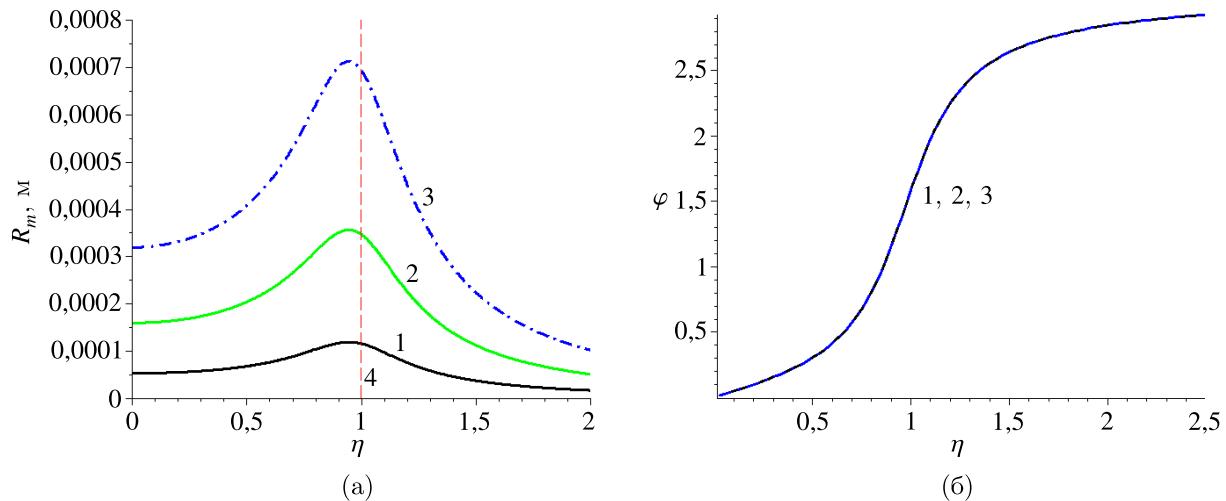


Рис. 5. Гидроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) пластины на линейном упругом основании Винклера без учета инерции движения жидкости (ползущее течение): 1 — амплитуда пульсации давления $p_m = 10^4$ Па, 2 — амплитуда пульсации давления $p_m = 3 \cdot 10^4$ Па, 3 — амплитуда пульсации давления $p_m = 6 \cdot 10^4$ Па, 4 — собственная частота консервативной линейной системы (соответствует точке на скелетной кривой η_* при $R_m = 0$)

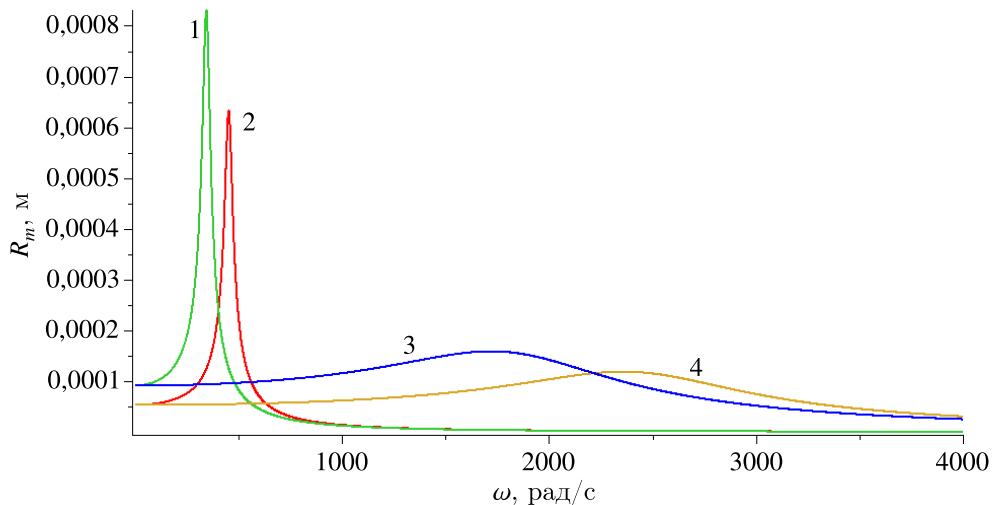


Рис. 6. Гидроупругие отклики пластины (линейный случай, $p_m = 10^4$ Па): 1 — шарнирно опертая пластина, упругое основание отсутствует, т. е. $\beta = \chi = 0$ при учете инерции движения жидкости; 2 — пластина на линейном основании Винклера при учете инерции движения жидкости; 3 — шарнирно опертая пластина, упругое основание отсутствует, т. е. $\beta = \chi = 0$ без учета инерции движения жидкости (ползущее течение); 4 — пластина на линейном основании Винклера без учета инерции движения жидкости (ползущее течение)

пластины, установленной на нелинейно-упрочняющемся основании, так и при ее линейных колебаниях на основании Винклера или при исключении из рассмотрения наличия основания у пластины. В частности, при рассмотрении нелинейных колебаний учет инерции движения жидкости приводит к смещению характеристик гидроупругого отклика и фазового сдвига в область низких частот колебаний и возрастанию амплитуд колебаний. При этом наблюдается выраженный изгиб кривых отклика вправо на резонансных частотах. Данный изгиб растет при увеличении амплитуды пульсации давления на торцах канала. Кривые фазового сдвига также изгибаются с ростом амплитуды пульсации давления. Вследствие учета вязкости жидкости кривые гидро-

упругого отклика имеют конечные амплитуды на резонансных частотах. При рассмотрении линейного основания изгибы кривых гидроупругого отклика и фазового сдвига отсутствуют, но амплитуда колебаний на резонансе остается конечной, при этом кривые фазового сдвига не зависят от амплитуды пульсации давления на торцах канала. Если в канале рассматривается ползущее движение жидкости, т. е. исключается из рассмотрения инерция ее движения, происходит смещение гидроупругого отклика и фазового сдвига в область высоких частот как для нелинейных колебаний, так и для линейных колебаний. Данное смещение сопровождается существенным падением амплитуд колебаний. При этом изгиб кривых гидроупругого отклика и фазового сдвига для нелинейных колебаний менее ярко выражен, т. е. кривые близки по форме к соответствующим кривым для линейных колебаний. Тем не менее для нелинейных колебаний сохраняется зависимость изгиба данных кривых от амплитуды пульсации давления на торцах канала.

Проведенное моделирование также показало важность учета упругих свойств основания, так как, с одной стороны, именно нелинейность его характеристики приводит к возникновению нелинейных гидроупругих колебаний. С другой стороны, наличие упругого основания, как нелинейного, так и линейного, приводит к дополнительному смещению характеристик гидроупругого отклика и фазового сдвига в область высоких частот. Данная зависимость особенно ярко проявляется для случая линейно-упругого основания Винклера (см. рис. 6).

В заключение отметим следующее: известно [Пановко, 1991; Nayfeh, Mook, 1979], что в случае нелинейных колебаний имеется частотный диапазон неустойчивых колебаний со скачкообразным изменением их амплитуд и данный диапазон соответствует зоне изгиба кривых основного отклика и фазового сдвига осциллятора Дуффинга. Результаты проведенного в работе моделирования позволили прийти к следующим обобщающим известный факт выводам. При рассмотрении проблем гидроупругих колебаний пластины Кирхгофа важен учет нелинейных свойств основания, на которое она установлена, так как это приводит к возникновению нелинейных колебаний. В случае нелинейно-упрочняющегося основания задача может быть сведена к исследованию обобщенного уравнения Дуффинга (21). При этом необходимо принимать во внимание вязкость совместно с инерцией движения жидкости, так как их учет обуславливает, с одной стороны, ограниченность амплитуд колебаний на резонансных частотах, а с другой — приводит к сдвигу частотного диапазона неустойчивых колебаний со скачкообразным изменением их амплитуд в низкочастотную область. Если рассматривается крайне узкий канал, заполненный сильно вязкой жидкостью, движение которой ползущее, будет наблюдаться сдвиг указанного частотного диапазона в область высоких частот, а скачки амплитуд колебаний в данном диапазоне будут менее выражены.

На практике разработанная математическая модель и полученные результаты могут быть предложены к использованию для предсказания возникновения нелинейных гидроупругих колебаний, сопровождаемых скачкообразным изменением их амплитуд, упругих элементов каналов, установленных на нелинейно-упрочняющемся основании. Помимо этого, их можно применять для анализа поведения чувствительных упругих элементов сенсоров давления жидкости, имеющих нелинейно-упрочняющиеся подложки.

Список литературы (References)

Андианов И. В., Данишевский В. В., Иванков А. О. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. — Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010.

Andrianov I. V., Danishevskij V. V., Ivankov A. O. Asimptoticheskie metody v teorii kolebanij balok i plastin [Asymptotic methods in the theory of beams and plates vibrations]. — Dnepropetrovsk: Pridneprovskaja gosudarstvennaja akademija stroitel'stva i arhitektury, 2010 (in Russian).

- Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод – датчик давления» // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. — 2011. — № 1 (29). — С. 137–144.*
- Vel'misov P. A., Pokladova Yu. V. O nekotorykh matematicheskikh modelyakh mehanicheskoi sistemy "truboprovod – datchik davleniya" [On some mathematical models of mechanical system "pipeline – pressure sensor"] // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Tekhnicheskie nauki. — 2011. — No. 1 (29). — P. 137–144 (in Russian).*
- Горшков А. Г., Морозов В. И., Пономарев А. Т., Шклярчук Ф. Н. Аэрогидроупругость конструкций. — М.: Физматлит, 2000.*
- Gorshkov A. G., Morozov V. I., Ponomarev A. T., Shkljarchuk F. N. Ajerogidrouprugost' konstrukcij [Aerohydroelasticity of structures]. — Moscow: Fizmatlit, 2000 (in Russian).*
- Королева М. Р., Мищенкова О. В., Редер Т., Тененев В. А., Чернова А. А. Численное моделирование процесса срабатывания предохранительного клапана // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 4. — С. 495–509.*
- Koroleva M. R., Mishenkova O. V., Reder T., Tenenev V. A., Chernova A. A. Chislennoe modelirovanie processa srbatyvaniya predohranitel'nogo klapana [Numerical simulation of the process of activation of the safety valve] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 4. — P. 495–509 (in Russian).*
- Могилевич Л. И., Попов В. С., Скородумов Е. С. Динамика сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующего с упругой пластиной // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. — 2017. — № 1. — С. 53–63.*
- Mogilevich L. I., Popov V. S., Skorodumov E. S. Dinamika sdavlivayemogo sloja vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti, vzaimodejstvujushhego s uprugoj plastinoj [Dynamics of viscous incompressible liquid constricted layer, interacting with elastic walls] // Matematicheskoe modelirovanie, kompjuternyj i naturnyj eksperiment v estestvennyh naukah. — 2017. — No. 1. — P. 53–63 (in Russian).*
- Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. — М.: Наука, 1991.*
- Panovko Ya. G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebanij [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. — Moscow: Nauka, 1991 (in Russian).*
- Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем: современные концепции, парадоксы и ошибки. — М.: Ленанд, 2020.*
- Panovko Ya. G., Gubanova I. I. Ustoichivost' i kolebaniia uprugikh sistem [Stability and Oscillations of Elastic Systems]. — Moscow: Lenand, 2020 (in Russian).*
- Попов В. С., Попова А. А. Моделирование взаимодействия стенки канала с упруго закрепленным торцевым уплотнением // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 2. — С. 387–400.*
- Popov V. S., Popova A. A. Modelirovanie vzaimodejstvija stenki kanala s uprugo zakreplennym torcevym uplotneniem [Modeling of a channel wall interaction with an end seal flexibly restrained at the edge] // Computer Research and Modeling. — 2020. — Vol. 12, No. 2. — P. 387–400 (in Russian).*
- Попов В. С., Попова А. А. Моделирование гидроупругих колебаний стенки канала, имеющей нелинейно-упругую опору // Компьютерные исследования и моделирование. — 2022. — Т. 14, № 1. — С. 79–92.*
- Popov V. S., Popova A. A. Modelirovanie vzaimodejstvija stenki kanala s uprugozakreplennym torcevym uplotneniem [Modeling of hydroelastic oscillations for a channel wall possessing a nonlinear elastic support] // Computer Research and Modeling. — 2022. — Vol. 14, No. 1. — P. 79–92 (in Russian).*
- Распопов В. Я. Микромеханические приборы. — М.: Машиностроение, 2007.*
- Raspopov V. Ya. Mikromehanicheskie pribory [Micromechanical devices]. — Moscow: Mashinostroenie, 2007 (in Russian).*
- Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. — New York: Cambridge University Press, 2008.*
- Barulina M., Santo L., Popov V., Popova A., Kondratov D. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations // Mathematics. — 2022. — Vol. 10. — 3844.*
- Bochkarev S. A., Kamenskikh A. O., Lekomtsev S. V. Experimental investigation of natural and harmonic vibrations of plates interacting with air and fluid // Ocean Engineering. — 2020. — Vol. 206. — 10734.*
- Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid // Fluid Dynamics. — 2016. — Vol. 51, No. 6. — P. 821–833.*

- Christoforova A. V., Popov V.S., Popova A.A.* Modeling hydroelastic oscillations for the end wall of an annular channel / Proceedings of the 8th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2022). Lecture Notes in Mechanical Engineering. — Cham: Springer, 2023. — P. 351–359.
- Christoforova A. V., Popov V.S., Popova A.A.* Modeling nonlinear oscillations for the wall of a narrow channel interacting with viscous liquid / Proceedings of the 7th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2021). Lecture Notes in Mechanical Engineering. — Cham: Springer, 2022. — P. 505–513.
- Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Lisenkova E.E., Semerikova N.P.* Nonsinusoidal bending waves in Timoshenko beam lying on nonlinear elastic foundation // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2008. — Vol. 37, No. 3. — P. 230–235.
- Faria C.T., Inman D.J.* Modeling energy transport in a cantilevered Euler – Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mechanical Systems and Signal Processing. — 2014. — Vol. 45, No. 2. — P. 317–329.
- Hasheminejad S.M., Mohammadi M.M.* Hydroelastic response suppression of a flexural circular bottom plate resting on Pasternak foundation // Acta Mechanica. — 2017. — Vol. 228. — P. 4269–4292.
- Hosseini-Hashemi S., Arpanahi R.A., Rahamanian S., Ahmadi-Savadkoohi A.* Free vibration analysis of nano-plate in viscous fluid medium using nonlocal elasticity // European Journal of Mechanics A/Solids. — 2019. — Vol. 74. — P. 440–448.
- Howell P., Kozyreff G., Ockendon J.* Applied solid mechanics. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- Indeitsev D.A., Osipova E.V.* Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water // Technical Physics. — 2000. — Vol. 45, No. 12. — P. 1513–1517.
- Kheiri M., Païdoussis M.P., Costa Del Pozo G., Amabili M.* Dynamics of a pipe conveying fluid flexibly restrained at the ends // Journal of Fluids and Structures. — 2014. — Vol. 49. — P. 360–385.
- Kondratov D.V., Popov V.S., Popova A.A.* Modeling the end seal oscillations of the channel filled with pulsating viscous fluid / Proceedings of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020). Lecture notes in mechanical engineering. — Cham: Springer, 2021. — P. 665–672.
- Korsch H.J., Jodl H.-J., Hartmann T.* Chaos: a program collection for the PC: third revised and enlarged edition. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.
- Krack M., Gross J.* Harmonic balance for nonlinear vibration problems. — New York: Springer, 2019.
- Kumar U.V., Saha S., Bora S.N.* Hydroelastic analysis of a coupled porous structure in finite water depth // Ocean Engineering. — 2022. — Vol. 246. — 110491.
- Kutlu A., Uğurlu B.* A combined boundary-finite element procedure for dynamic analysis of plates with fluid and foundation interaction considering free surface effect // Ocean Engineering. — 2017. — Vol. 145. — P. 34–43.
- Lamb H.* Hydrodynamics. — 6th edition. — New York: Dover Publications Inc., 1945.
- Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A.* Longitudinal and transverse oscillations of an elastically fixed wall of a wedge-shaped channel installed on a vibrating foundation // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2018. — Vol. 47, No. 3. — P. 227–234.
- Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N.* Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. — 2016. — Vol. 12, No. 4. — P. 9–17.
- Morozov D., Indeitsev D., Michailov A.* Added mass study of plane structures at their various motions // Materials Physics and Mechanics. — 2019. — Vol. 41, No. 1. — P. 116–124.
- Nayfeh A.H., Mook D.T.* Nonlinear oscillations. — New York: Wiley, 1979.
- Païdoussis M.P., Price S.J., De Langre E.* Fluid-structure interactions: cross-flow-induced instabilities. — New York: Cambridge University Press, 2011.

- Popov V.S., Chernenko A.V.* Modeling of bending and radial hydroelastic oscillations for a sandwich circular plate resting on an inertial elastic foundation // J. Phys.: Conf. Ser. — 2021. — Vol. 1791. — 012020.
- Reissner E.* On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a nonlinear elastic foundation // Studies in Appl. Math. — 1970. — Vol. XLIX, No. 1. — P. 45–57.
- Tulchinsky A., Gat A.D.* Frequency response and resonance of a thin fluid film bounded by elastic sheets with application to mechanical filters // Journal of Sound and Vibration. — 2019. — Vol. 438. — P. 83–98.
- Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics. — Stanford: The Parabolic Press, 1975.
- Vega-Martínez P., Rodríguez-Rodríguez J., Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A.* Hydroelastic effects during the fast lifting of a disc from a water surface // Journal of Fluid Mechanics. — 2019. — Vol. 869. — P. 726–751.
- Vel'misov P.A., Ankilov A.V.* Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid // Cybernetics and Physics. — 2017. — Vol. 6, No. 4. — P. 262–270.
- Vel'misov P.A., Pokladova Yu.V.* Mathematical modelling of the “Pipeline – pressure sensor” system // J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — Vol. 1353. — 01208.
- Zavyalova K.N., Shishmarev K.A., Korobkin A.A.* The response of a poroelastic ice plate to an external pressure // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. — 2021. — Vol. 14, No. 1. — P. 87–97.