

УДК: 534.1

## Стационарные состояния и бифуркации в одномерной активной среде осцилляторов

Н. Н. Веричев<sup>1,a</sup>, С. Н. Веричев<sup>2,b</sup>, В. И. Ерофеев<sup>1,c</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПФ РАН),

Россия, 603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, 85

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»,

Россия, 630073, г. Новосибирск, пр-т К. Макса, 20

E-mail: <sup>a</sup> nverichev@yandex.ru, <sup>b</sup> verichev@corp.nstu.ru, <sup>c</sup> erof.vi@yandex.ru

*Получено 28.08.2022, после доработки — 07.04.2023.*

*Принято к публикации 10.05.2023.*

В предлагаемой статье приводятся результаты аналитического и компьютерного исследования коллективных динамических свойств цепочки автоколебательных систем (условно — осцилляторов). Предполагается, что связи отдельных элементов цепочки являются невзаимными, однонаправленными. Точнее, предполагается, что каждый элемент цепочки находится под воздействием предыдущего, в то время как обратная реакция отсутствует (физически несущественна). В этом состоит главная особенность цепочки. Данную систему можно интерпретировать как активную дискретную среду с однонаправленным переносом, в частности переносом вещества. Подобные цепочки могут являться математическими моделями реальных систем с решеточной структурой, имеющих место в самых различных областях естествознания и техники: в физике, химии, биологии, радиотехнике, экономике и др. Также они могут быть моделями технологических и вычислительных процессов. В качестве элементов решетки выбраны нелинейные автоколебательные системы (условно — осцилляторы) с широким спектром потенциально возможных индивидуальных автоколебаний: от периодических до хаотических. Это позволяет исследовать различные динамические режимы цепочки от регулярных до хаотических, меняя параметры элементов и не меняя природу самих элементов. Совместное применение качественных методов теории динамических систем и качественно-численных методов позволяет получить обзримую картину всевозможных динамических режимов цепочки. Исследуются условия существования и устойчивости пространственно однородных динамических режимов (детерминированных и хаотических) цепочки. Аналитические результаты иллюстрированы численным экспериментом. Исследуются динамические режимы цепочки при возмущениях параметров на ее границе. Показывается возможность управления динамическими режимами цепочки путем включения необходимого возмущения на границе. Рассматриваются различные случаи динамики цепочек, составленных из неоднородных (различных по своим параметрам) элементов. Аналитически и численно исследуется глобальная (всех осцилляторов цепочки) хаотическая синхронизация.

**Ключевые слова:** динамическая система, решетка, бифуркации, осциллятор, фазовое пространство, динамический хаос, синхронизация

Работа выполнена в рамках государственного задания на проведение фундаментальных научных исследований по теме № 0030-2021-0025, регистрационный номер 1021060908990-9-2.3.2, и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-08-00372-а).

UDC: 534.1

## Stationary states and bifurcations in a one-dimensional active medium of oscillators

N. N. Verichev<sup>1,a</sup>, S. N. Verichev<sup>2,b</sup>, V. I. Erofeev<sup>1,c</sup>

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Science – Branch of Federal Research Center “Institute of Applied Physics of the RAS”,  
85 Belinskogo st., Nizhny Novgorod, 603024, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State Technical University,  
20 K. Marx ave., Novosibirsk, 630073, Russia

E-mail: <sup>a</sup> nverichev@yandex.ru, <sup>b</sup> verichev@corp.nstu.ru, <sup>c</sup> erof.vi@yandex.ru

Received 28.08.2022, after completion – 07.04.2023.

Accepted for publication 10.05.2023.

This article presents the results of an analytical and computer study of the collective dynamic properties of a chain of self-oscillating systems (conditionally – oscillators). It is assumed that the couplings of individual elements of the chain are non-reciprocal, unidirectional. More precisely, it is assumed that each element of the chain is under the influence of the previous one, while the reverse reaction is absent (physically insignificant). This is the main feature of the chain. This system can be interpreted as an active discrete medium with unidirectional transfer, in particular, the transfer of a matter. Such chains can represent mathematical models of real systems having a lattice structure that occur in various fields of natural science and technology: physics, chemistry, biology, radio engineering, economics, etc. They can also represent models of technological and computational processes. Nonlinear self-oscillating systems (conditionally, oscillators) with a wide “spectrum” of potentially possible individual self-oscillations, from periodic to chaotic, were chosen as the “elements” of the lattice. This allows one to explore various dynamic modes of the chain from regular to chaotic, changing the parameters of the elements and not changing the nature of the elements themselves. The joint application of qualitative methods of the theory of dynamical systems and qualitative-numerical methods allows one to obtain a clear picture of all possible dynamic regimes of the chain. The conditions for the existence and stability of spatially-homogeneous dynamic regimes (deterministic and chaotic) of the chain are studied. The analytical results are illustrated by a numerical experiment. The dynamical regimes of the chain are studied under perturbations of parameters at its boundary. The possibility of controlling the dynamic regimes of the chain by turning on the necessary perturbation at the boundary is shown. Various cases of the dynamics of chains comprised of inhomogeneous (different in their parameters) elements are considered. The global chaotic synchronization (of all oscillators in the chain) is studied analytically and numerically.

Keywords: dynamical system, lattice, bifurcations, oscillator, phase space, dynamical chaos, synchronization

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 491–512 (Russian).

The work was carried out within the state task for fundamental scientific research on the topic no. 0030-2021-0025, state registration number 1021060908990-9-2.3.2, and work was supported by the RFBR, project no. 20-08-00372-a.

## 1. Введение

Исследования непрерывных и дискретных активных сред (автоволн различного типа и их свойств) являются естественным продолжением и расширением понятий и методов теории нелинейных колебаний (в частности, автоколебаний) сосредоточенных систем, созданной А. А. Андроновым [Андронов, Витт, Хайкин, 1959], задуманной в качестве междисциплинарного научного направления. Давно замечено, что многие процессы в самых различных областях естествознания (в физике, биологии, химии, и даже в общественно-экономических системах) имеют качественно похожие динамические картины, включая, в определенных случаях, пространственно-временную самоорганизацию — структурную динамику систем. Это значит, что эти процессы могут быть описаны в рамках похожих или даже, что случается, в рамках одной и той же математической модели. Это обстоятельство как раз и является сутью «Теории колебаний», и оно же определяет самоценность тех математических моделей («банка» математических моделей), свойства которых могут быть переформулированы на физические и иные системы. Математические модели коллективных систем (дифференциальные уравнения, точечные отображения) имеют крайне большую размерность. В докомпьютерное время это обстоятельство, как правило, являлось мертвым тормозом в их аналитических исследованиях. В настоящее время благодаря мощной и доступной каждому компьютерной базе эта проблема становится преодолимой. В то же время ошибочно думать, что компьютерные исследования являются совершенно универсальным инструментом: без хотя бы грубого представления о структуре фазового пространства исследуемой системы любой численный результат даст лишь отрывочное знание о ее динамике. Решением проблемы является совокупное использование качественных и качественно-численных методов.

Решетки динамических систем относятся к числу базовых моделей современной теории колебаний. Напомним их устройство: предполагается, что в узлах воображаемой решетки размещаются некоторые динамические системы с относительно невысокой размерностью, а ребра решетки символизируют собой связи этих систем. Каждая элементарная система может быть связана как с частью, так и со всеми своими соседями. Характер связей может быть различным: они могут быть линейными и нелинейными, взаимными и не взаимными. Кроме свойств линейности/нелинейности подобные решетки классифицируются в том числе и по их геометрической размерности: одномерные (1D), двумерные (2D) и т. д. Одномерные решетки также называются цепочками. Цепочку, в которой воздействие каждого элемента на предыдущий элемент (они пронумерованы) несущественно, а существенным является воздействие данного элемента на последующий, иногда называют потоковой. Динамика такого объекта и представляет интерес в данной статье.

Как известно, множество объектов живой и неживой природы имеет решеточную, сетевую структуру. В частности, таковыми являются антенные решетки и сети систем фазовой синхронизации [Афраймович и др., 1989], нейронные ансамбли [Абарбанель и др., 1996; Борисюк и др., 2002], нейрон-подобные сети по обработке информации [Babloyntz, Destexhe, 1986] и многое другое. Все из перечисленного допускает использование в качестве математических моделей решетки динамических систем. Разумеется, при условии, что соответствующие физические, биологические и иные объекты в индивидуальном порядке допускают моделирование обыкновенными дифференциальными уравнениями (см. [Коршунова, Лахно, 2020; Rabinovich et al., 2006; Verichev, Verichev, Erofeev, 2020; Колмогоров, Петровский, Пискунов, 1975; Pecora, Carroll, 1990] и др.).

Материальные решеточные структуры при определенных параметрах могут возникать в активных сплошных средах. Одним из примеров тому являются конвекционные валы, возникающие в подогреваемом снизу слое жидкости. В этом случае слой условно разбивается на конвективные ячейки с отсутствующим массообменом [Verichev, Verichev, Erofeev, 2021] (рис. 1, а).

Как показывает эксперимент, возмущенная структура с течением времени приходит в исходное состояние с тем же самым набором элементов (устойчива). При этом воспроизводятся термодинамические параметры отдельного конвективного вала, его геометрические размеры и форма. Число конвективных ячеек в кювете является постоянным при фиксированных параметрах эксперимента. Это значит, что об отдельной ячейке можно говорить как о базовом элементе структуры. С другой стороны, динамика жидкости в конвекционной ячейке может быть описана как движение жидкости в так называемой конвективной трубке — тороидальной трубке с жидкостью. Соответственно, динамику слоя жидкости можно рассматривать как динамику жидкости в системе контактирующих конвективных трубок [Verichev, Verichev, Erofeev, 2021; Мун, 1990] (рис. 1, б). В этом случае мы приходим к исследованию решетки (цепочки) динамических систем — взаимосвязанных систем Лоренца. Здесь  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — соответственно скорость потока и температура жидкости в указанных точках. Разумеется, при подобном моделировании рассчитывать на получение точных количественных результатов не приходится. Однако качественные результаты, в частности касающиеся устойчивости структур, могут быть вполне адекватными [Колмогоров, Петровский, Пискунов, 1975; Pecora, Carroll, 1990].

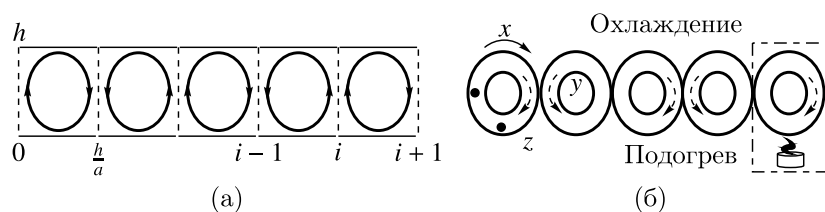


Рис. 1. Схема конвективных валов (а) и система конвективных трубок (б)

## 2. Математическая модель потоковой цепочки

В качестве базовой динамической системы, описывающей парциальную динамику звена цепочки, выберем систему с широким диапазоном периодических и хаотических движений, а также имеющую конкретные физические приложения — так называемый *обобщенный осциллятор Лурье*. Эта система была предложена для описания динамики нелинейной системы автоматического регулирования [Лурье, 1951] и представляется дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -f(x) + \mathbf{a}^T \mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{B} \mathbf{y} + \mathbf{b} x. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^1$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^1$ ,  $\mathbf{B}$  — постоянная Гурвица (устойчивая) матрица,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  — постоянные  $(n \times 1)$ -векторы.

Что также немало важно — эту динамическую систему можно считать обобщением многих известных моделей физических систем с хаотической динамикой.

В уравнениях (1) предполагается, что нелинейная функция  $f(x)$  является непрерывной и имеет вид, подобный кубической параболы с тремя нулями. По этой причине будем считать выполненным на всей числовой прямой неравенство

$$xf(x) \geq mx^2 - l, \quad (2)$$

где  $m$ ,  $l$  — некоторые положительные постоянные, смысл и порядок выбора которых обсудим ниже. Данное условие выполняется для большого числа прикладных задач (в случае радиотехнических автогенераторов достаточно вспомнить вид вольт-амперных характеристик туннельных диодов и других нелинейных активных элементов).

Из всех свойств (1) здесь укажем только на существование шара диссипации, а другую информацию о динамике системы дадим на примере другого осциллятора, который является частным случаем (1).

Введем в рассмотрение вспомогательную линейную систему:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{A}\mathbf{u}, \\ \mathbf{u} &= (x, y)^T, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -m & \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b} & \mathbf{B} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Относительно системы (3) будем предполагать:

- а) состояние равновесия  $\mathbf{u} = 0$  асимптотически устойчиво;
- б) производная функции Ляпунова вида  $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^T \mathbf{H}y)$ , вычисленная вдоль траекторий системы (3),  $\dot{V} = -mx^2 + (\mathbf{H}\mathbf{b} + \mathbf{a})^T xy + y^T \mathbf{H}\mathbf{B}y = -Q(x, y)$  является отрицательной во всем фазовом пространстве. Здесь  $\mathbf{H}$  — некоторая положительная симметрическая матрица.

Величину параметра  $m$  будем выбирать минимальной из всех тех значений, для которых выполняются свойства системы (3). Такой выбор имеет простой физический смысл:  $m$  — минимальное активное сопротивление, заменяющее нелинейный элемент, при котором соответствующая линейная система приобретает свойство абсолютной устойчивости. На языке фазового пространства такой выбор определяет поверхность без контакта для линейной системы (3)  $V = \text{const} = V(m_{\min})$ , являющуюся границей шара диссипации нелинейной системы (1).

Покажем, что при условии (2) и условиях системы (3) система (1) является диссипативной.

Рассматриваем квадратичную форму  $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^T \mathbf{H}y)$ . Ее производная, в силу системы (1) и с учетом неравенства (2), имеет следующие вид и оценку:

$$\dot{V} = -xf(x) + (\mathbf{H}\mathbf{b} + \mathbf{a})^T xy + y^T \mathbf{H}\mathbf{B}y \leq -Q(x, y) + l.$$

Очевидно, что последнее выражение не положительно вне некоторого шара  $x^2 + |y|^2 \leq r^2$ . В свою очередь, отрицательность производной вне этого шара определяет некоторый шар диссипации  $x^2 + y^T \mathbf{H}y \leq R^2$  системы (1).

*Осциллятор Чуа.* Одна из предложенных Л. Чуа [Special issue on Chua’s circuit, 1993] радиотехнических схем автогенератора хаотических колебаний изображена на рис. 2. На схеме через  $G^*$  обозначен нелинейный элемент с вольт-амперной характеристикой (ВАХ)  $I(V)$ .

Отметим, что данная схема очень проста для практической реализации в физическом эксперименте. Кроме того, все «нужные» свойства этого автогенератора обнаруживаются при кусочно-линейной ВАХ, что придает предельно возможную простоту его математической модели для аналитических исследований. По названным причинам динамика данного автогенератора (и его аналогов) хорошо изучена экспериментально, численно и аналитически [Special issue on Chua’s circuit, 1993]. В настоящее время осциллятор Чуа фактически уже стал классическим объектом нелинейной динамики.

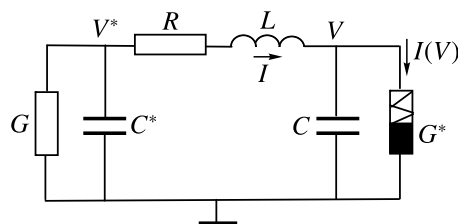


Рис. 2. Радиотехническая схема осциллятора Чуа

В физических переменных и параметрах, смысл которых отражен на рис. 2, динамика схемы описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} C\dot{V} &= I - I(V), \\ L\dot{I} &= -RI + V^* - V, \\ C^*\dot{V}^* &= -I - GV^*. \end{aligned}$$

Здесь  $I(V)$  — вольт-амперная характеристика (ВАХ) нелинейного элемента с нелинейной проводимостью  $G^*$ .

В безразмерном времени, относительно безразмерных переменных и параметров:

$$\begin{aligned} V &= V_0x, \quad I = I_0y, \quad V^* = V_0^*z, \quad \frac{R}{L}t = \tau, \\ \frac{L}{CR^2} &= \alpha, \quad \frac{\alpha I(V_0x)}{I_0} = \alpha h(x), \quad \frac{L}{C^*R^2} = \beta, \quad \frac{GL}{C^*R} = \gamma, \end{aligned}$$

где  $V_0, I_0, V_0^*$  — масштабные коэффициенты, получаем следующую динамическую систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - h(x)), \\ \dot{y} &= -y + z - x, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z. \end{aligned} \quad (4)$$

Идеализированная ВАХ нелинейного элемента имеет вид

$$h(x) = m_1x + \frac{m_0 - m_1}{2}(|x + 1| - |x - 1|),$$

где  $m_0, m_1$  — положительные параметры. Сравнивая уравнения (4) с (1), видим, что осциллятор Чуа — частный случай осциллятора Лурье. Для перехода от (4) к (1) следует положить, что  $y = (y, z)^T$ ,  $f(x) = \alpha h(x)$ ,  $\mathbf{a}^T = (\alpha, 0)$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\beta & -\gamma \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 0)^T$ .

На рис. 3 приведена графическая иллюстрация выполняемости условия (2) для нелинейной функции  $f(x) = \alpha h(x)$ .

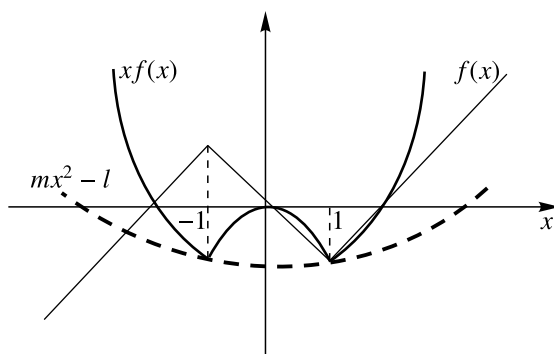


Рис. 3. Графическая иллюстрация свойства нелинейной функции системы (4)

Из рисунка следует, что величина параметра  $m$  может выбираться в том числе и сколь угодно малой.

Перечислим некоторые свойства динамической системы (4).

1. Диссипативность. Покажем, что условия системы (2) выполняются, когда ее параметрами являются параметры осциллятора Чуа.

Пусть  $f(x) = mx$ . При этом система (4) переходит в уравнения (2), и  $O(0, 0, 0)$  — ее единственное состояние равновесия. Рассматриваем функцию Ляпунова  $V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\alpha}{2}y^2 + \frac{\alpha}{2\beta}z^2$ . Ее производная вдоль траекторий названной системы имеет вид  $\dot{V} = -(mx^2 + \alpha y^2 + \frac{\alpha\gamma}{\beta}z^2)$ . Поскольку производная отрицательна во всем фазовом пространстве, то состояние равновесия  $O(0, 0, 0)$  асимптотически устойчиво в целом. В данном случае  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ , а  $Q = mx^2 + \alpha y^2 + \frac{\alpha\gamma}{\beta}z^2 \geq 0$ .

Найдем шар диссипации системы (4). Из рисунка находим, что максимальное  $m = \frac{\alpha(m_1+m_0)}{2}$ . При этом  $l = \frac{\alpha(m_1-m_0)}{2}$ .

Допустим, что  $\max(1, \alpha, \frac{\alpha}{\beta}) = \lambda_1$ , а  $\min(m, \alpha, \frac{\alpha\gamma}{\beta}) = \lambda_2$ . В таком случае  $x^2 + \alpha y^2 + \frac{\alpha}{\beta}z^2 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_2}l$  — шар диссипации.

2. Состояния равновесия системы (4). Заметим, что в силу нечетности функции  $h(x)$  система инвариантна к замене  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$ . То есть она обладает центральной симметрией и все ее предельные множества траекторий, которые все находятся в шаре диссипации, симметричны относительно начала координат. По-другому говоря, каждое предельное множество фазовых траекторий системы (состояние равновесия, предельный цикл или странный аттрактор) имеет симметричного относительно нуля близнеца. Естественно, что бифуркации близнецов происходят при одних и тех же значениях параметров.

Система, в зависимости от параметров, имеет одно или три состояния равновесия:  $O(0, 0, 0)$ ,  $O_1(x_0, y_0, z_0)$  и  $O_2(-x_0, -y_0, -z_0)$  (близнец), координаты которых определяются уравнениями  $f(x) + (\mathbf{a}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})x = 0, \mathbf{y} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}x$ . Решая эти уравнения, находим:

$$x_0 = \frac{(\gamma + \beta)(m_1 - m_0)}{\gamma + m_1(\gamma + \beta)}, \quad y_0 = -\frac{\gamma(m_1 - m_0)}{\gamma + m_1(\gamma + \beta)}, \quad z_0 = \frac{\beta(m_1 - m_0)}{\gamma + m_1(\gamma + \beta)}.$$

3. Бифуркации и хаос. Типичным бифуркационным сценарием рождения странных аттракторов при изменении параметра  $\alpha$  и постоянстве других является следующий.

Если  $0 < \alpha < \alpha_1$ , то  $O(0, 0, 0)$  является неустойчивым, а  $O_1$  и  $O_2$  — устойчивыми состояниями равновесия. Величина  $\alpha_1$  определена условиями устойчивости Гурвица. При  $\alpha = \alpha_1$   $O_1$  и  $O_2$  теряют устойчивость с рождением предельного цикла. Далее предельные циклы претерпевают каскад бифуркаций удвоения периода с развитием при  $\alpha = \alpha_2$  двух симметричных относительно начала координат хаотических аттракторов-близнецов (рис. 4). В данном числовом эксперименте параметры осциллятора  $(\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1) = (9, 0, 14, 0, 1, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$ .

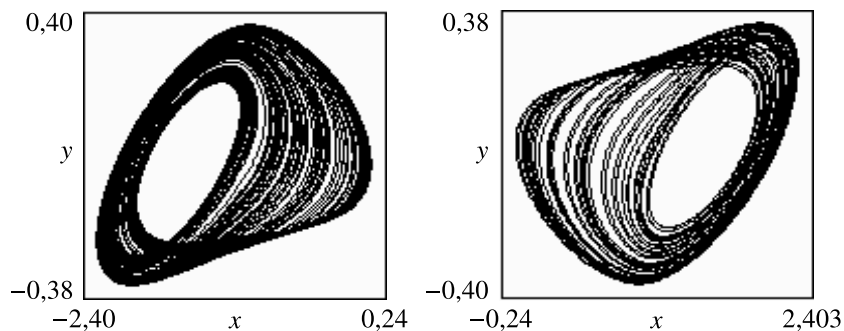


Рис. 4. Хаотические аттракторы-близнецы осциллятора Чуа

Аттракторы имеют изолированные области притяжения и сосуществуют, как самостоятельные объекты, в интервале параметра  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ . При  $\alpha = \alpha_3$  происходит объединение областей притяжения аттракторов (кризис), и изображающая точка движется на объединенном аттракторе, называемом double-scroll (рис. 5). В данном случае параметры осциллятора  $(\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1) = (9,5, 14, 0,1, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$ .

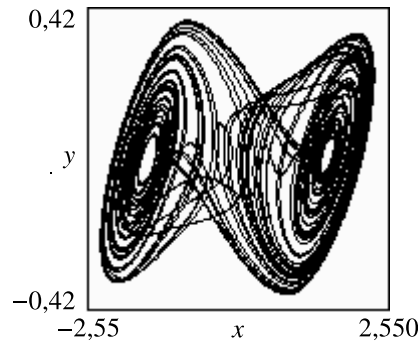


Рис. 5. Double-scroll-аттрактор Чуа

Надо сказать, что потоковые цепочки явились первыми, с которых началось исследование нелинейной динамики решеток осцилляторов (см. [Афраймович, Рабинович, Сбитнев, 1985; Арансон, Веричев, 1988] и др.). Причиной этому является их удобство в исследовании механизмов перехода от регулярных движений к хаосу по мере изменения пространственной координаты цепочки (номера осциллятора) и получения тем самым наглядной картины процессов зарождения и развития турбулентности в потоковых системах, в частности в гидродинамических течениях.

Предположим, что произвольный элемент (звено, осциллятор) решетки испытывает воздействие предыдущего, а воздействие на него последующего элемента пренебрежимо мало. В таком случае имеем следующую автономную потоковую цепочку динамических систем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= -f(x_k) + \mathbf{a}^T \mathbf{y}_k + \varepsilon(x_{k-1} - x_k), \\ \dot{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{B} \mathbf{y}_k + \mathbf{b} x_k \end{aligned} \quad (5)$$

(с граничным условием  $x_0 \equiv x_1$ ).

Здесь  $\varepsilon$  — параметр связи. В данном случае решетка является однородной как по своим элементам, так и по параметру связи этих элементов.

Наш интерес будет представлять как случай отрезка цепочки:  $k = \overline{1, N}$ , с граничным условием  $x_N \equiv x_{N+1}$ , так и случай цепочки, не ограниченной справа.

### 3. Пространственно однородное состояние цепочки

Поскольку предполагаем, что элементами нашей решетки являются активные объекты, то ее пространственно однородное состояние можно интерпретировать как изохронную синхронизацию соответствующих осцилляторов. По этой причине далее будем формулировать утверждения в терминах этого знакомого каждому явления. Условия глобальной асимптотической устойчивости (ГАУ) изохронной синхронизации для отрезка цепочки из  $N$  осцилляторов сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть  $\lambda_0 = \inf_{x \in R} f'(x)$ ,  $xf(x) \geq mx^2 - l$ ,  $x \in R$ , и выполнены условия а), б) для системы (3). Тогда при  $\varepsilon > t - \lambda_0$  изохронная синхронизация в системе (5) является ГАУ.



*Доказательство.* Преобразуем систему (5) к переменным  $U_k = x_k - x_{k+1}$ ,  $W_k = y_k - y_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_k &= -\lambda_k(\xi_k)U_k + \mathbf{a}^T W_k + \varepsilon_1(U_{k-1} - U_k), \\ \dot{W}_k &= \mathbf{B}W_k + \mathbf{b}U_k, \\ k &= \overline{1, N-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $\lambda_k = f'(\xi_k)$ ,  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$  (теорема Лагранжа) и граничные условия:  $U_0 = 0$ ,  $U_N = 0$ .

В силу граничного условия  $U_0 = 0$  первая подсистема (6) ( $k = 1$ ) независима. Ее решение  $U_1 = 0$ ,  $W_1 = 0$  является ГАУ, как только  $\varepsilon_1 > m - \lambda_0$ . Это устанавливается при помощи функции Ляпунова  $V = \frac{1}{2}(U_1^2 + W_1^T H W_1)$ . Ее производная, вычисленная в силу первых двух уравнений (6), имеет выражение и оценку

$$\dot{V} = -Q(U_1, W_1) - (\lambda_1 - m + \varepsilon)U_1^2 \leq -[Q(U_1, W_1) + (\lambda_0 - m + \varepsilon)U_1^2].$$

Она отрицательна, если  $\varepsilon_1 > m - \lambda_0$ . Это значит, что  $\|U_1\| < M_1 e^{-\mu_1 \tau}$ ,  $\|W_1\| < M_1 e^{-\mu_1 \tau}$ , где  $M_1, \mu_1$  — некоторые положительные постоянные.

Для всех  $k \geq 2$  запишем систему (6) в виде

$$\dot{Z}_k = A_k(\tau)Z_k + \varepsilon Z_{k-1}(\tau), \quad k = \overline{2, N-1}, \tag{7}$$

где  $Z_k = (U_k, W_k)^T$ ,  $A_k = \begin{pmatrix} -\lambda_k(\tau) - \varepsilon_1 & \mathbf{a}^T \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \mathbf{0}_{1 \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix}$ .

Заметим, что все матрицы  $A_k(\tau)$  устойчивы при  $\varepsilon_1 > m - \lambda_0$ .

Пусть  $k = 2$ . Тогда, в силу устойчивости  $A_2(\tau)$  и нормы возмущения  $\|Z_1\| < M_1 e^{-\mu \tau}$ , получаем, что  $\|Z_k\|_{k=2} < M_2 e^{-\mu \tau}$  [Демидович, 1967]. То есть решение  $Z_2 = 0$  ГАУ. Далее рассуждения повторяются для всех  $k \geq 3$ . Таким образом, тривиальное решение уравнения (7) — изохронная синхронизация осцилляторов — в условиях теоремы является ГАУ.

Кажется, что данную теорему можно распространить на случай неограниченной цепочки. Это было бы справедливо, если бы удалось показать, что постоянные  $M_k$  в оценках нормы решений не имеют неограниченного роста по мере возрастания номера осциллятора. Если же названные постоянные будут экспоненциально расти с номером осциллятора, то, очевидно, мы будем иметь дело с конвективной неустойчивостью [Лифшиц, Питаевский, 1979] пространственно однородного состояния.

Исследуем устойчивость пространственно однородного состояния полубесконечной цепочки по отношению к возмущениям на границе — возмущениям уравнений первого осциллятора (правых частей его уравнений). Заметим, если в цепочке возмущения испытывает большее число осцилляторов, то весь возмущенный отрезок, от начала до предпоследнего из возмущенных осцилляторов, может быть отброшен. Последний из возмущенных осцилляторов может приниматься за начало цепочки, и тем самым задача сводится к задаче с возмущениями на границе цепочки.

Проследить за полной эволюцией аттракторов индивидуальных осцилляторов (всех компонентов аттракторов) вниз по потоку представляется аналитически сложной задачей. Исследуем эволюцию состояний равновесия, точнее — координат состояний равновесия парциальных осцилляторов вдоль цепочки, при возмущениях этих координат в первом осцилляторе. Это даст некоторое представление об эволюции аттракторов вниз по потоку. Уравнения для состояний равновесия системы (6) имеют вид

$$\begin{aligned} -f(x_k) + \mathbf{a}^T y_k + \varepsilon(x_{k-1} - x_k) &= 0, \\ \mathbf{B}y_k + \mathbf{b}x_k &= 0, \\ k &= \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Исключая вектор  $y_k$  из этих уравнений, получаем неявный вид рекуррентного уравнения, связывающего координаты состояний равновесия предыдущего осциллятора с координатами последующего, — одномерное отображение вида

$$\begin{aligned} x_k &= F^{-1}(x_{k-1}), \\ F(x_{k-1}) &= x_{k-1} + \frac{1}{\varepsilon} \left( f(x_{k-1}) + \mathbf{a}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} x_{k-1} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

с начальным условием  $x_0 = x_1$ . Неподвижные точки отображения (8) ( $x_k = x_{k-1} = x^*$ ) являются корнями уравнения

$$f(x) + \mathbf{a}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} x = 0.$$

Нетрудно заметить, что координаты неподвижных точек совпадают с координатами состояний равновесия изолированных (при  $\varepsilon = 0$ ) осцилляторов.

Для простоты считаем, что нелинейность имеет вид кубической параболы. В этом случае два качественно различных типа отображения (8) изображены на рис. 6.

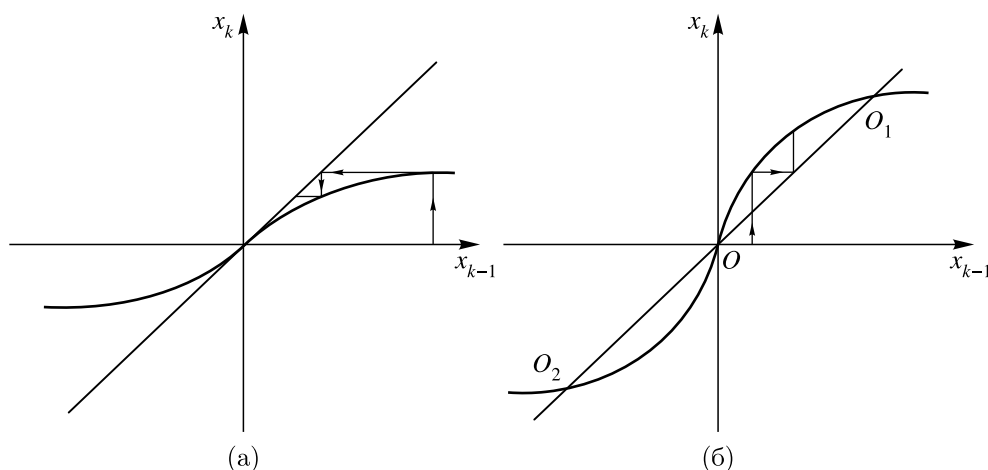


Рис. 6. Различные типы отображения (8) в зависимости от параметров осциллятора

В случае (а) каждый из парциальных автогенераторов недовозбужден (подобен пассивному объекту) и их устойчивое состояние равновесия в нуле является ГАУ. В то же время, как видно из рисунка, неподвижная точка в нуле отображения (8) также является устойчивой. Очевидно, что в этом случае динамика цепочки тривиальна: при любом возмущении состояний равновесия на границе в цепочке устанавливается равновесное состояние, в пределе  $k \rightarrow \infty$  совпадающее с состоянием невозбужденного парциального осциллятора. Другими словами, в данном случае имеет место абсолютная устойчивость (по пространству цепочки и времени) дискретной среды осцилляторов. В случае (б) парциальные автогенераторы возбуждены. В частности, если мы имеем дело с цепочкой осцилляторов типа Чуа, то, в зависимости от параметров, в парциальном осцилляторе может наблюдаться, или режим периодических колебаний или режим хаотических колебаний на одном из Чуа-аттракторов или, наконец, на объединенном double-scroll-аттракторе (см. рис. 4, 5). Эволюция координат состояний равновесия парциального аттрактора каждого из осцилляторов цепочки при возмущении состояния равновесия в первом осцилляторе хорошо видна из рис. 6, б.

В случае (б) неподвижная точка  $O$  отображения неустойчива. Записывая условие ее неустойчивости:  $\left| \left( F^{-1}(x) \right)' \right|_{x=x^*} > 1$ , получаем неравенство  $0 < -\frac{1}{2} \left( f'(x^*) + \mathbf{a}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \right) < \varepsilon$ .

В случае осциллятора Чуа для соответствующих векторов и матрицы имеем выражения

$$\mathbf{a}^T = (\alpha, 0), \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\beta + \gamma} \begin{pmatrix} -\gamma & -1 \\ \beta & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \frac{\alpha\gamma}{\gamma + \beta}.$$

Неподвижной точке  $O$  соответствует состояние равновесия  $O(0, 0, 0)$  изолированного осциллятора, которое при данных параметрах является седлом. В этой точке  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \inf_{x \in R} f'(x) = \lambda_0 = \alpha m_0 < 0$ . Условие ее неустойчивости имеет вид

$$0 < \frac{\alpha}{2} \left( |m_0| - \frac{\gamma}{\gamma + \beta} \right) < \varepsilon.$$

Нетрудно установить, что условие ГАУ для отрезка цепочки:  $\varepsilon > \alpha|m_0| + m$  и полученное условие пространственной (вдоль цепочки) неустойчивости совместимы.

Таким образом, если бы индивидуальный осциллятор обладал единственным состоянием равновесия  $O(0, 0, 0)$ , то в цепочке наблюдалась бы конвективная неустойчивость в чистом виде. В реальном же случае нелинейная диссипация достаточно быстро давит эту неустойчивость, что приводит только к деформации локальных аттракторов от точки к точке вниз по потоку. Этот факт имеет отражение и на диаграмме эволюции состояний равновесия (рис. 6, б).

Поскольку неподвижные точки отображения  $O_1$  и  $O_2$  являются устойчивыми, то возмущенное состояние равновесия индивидуального осциллятора  $O^k$  ( $k$  — его номер) неограниченно приближается к  $O_1$  или  $O_2$  (в зависимости от знака величины возмущения на границе). Соответственно,  $O_1^k \rightarrow O_1$ , а  $O_2^k \rightarrow O_2$ . То есть в пределе (при  $k \rightarrow \infty$ ) состояние равновесия  $O^k$  сливается с одним из состояний равновесия —  $O_1$  или  $O_2$ . Не проводя дальнейших исследований, можно прогнозировать, что при  $k \rightarrow \infty$  в цепочке будет устанавливаться пространственно однородный динамический режим. Однако он не будет связан с аттрактором парциального осциллятора, хотя и может содержать некоторые его визуальные очертания.

#### 4. Численный эксперимент

Заметим, что численный и натурный эксперименты по исследованию потоковых цепочек сопряжены с рядом трудностей. В их числе большое время установления стационарных состояний цепочки, большая чувствительность динамических режимов к изменению начальных условий, возникающая вследствие существования большого числа аттракторов в фазовом пространстве системы (большое число потенциально возможных режимов), большая чувствительность динамических режимов по отношению к пространственным возмущениям и др.

Ниже представлены результаты численного эксперимента по исследованию эволюций динамических режимов (течений) вдоль цепочки при различных возмущениях на границе. Эксперимент проводился с цепочкой из небольшого числа  $N = 6$  осцилляторов Чуа, что, однако, достаточно для общих выводов об устанавливающихся предельных режимах. Результаты исследования квазипериодических волновых движений в потоковой цепочке из 120 элементов представлены в [Арансон, Веричев, 1988].

Рассматривается постоянно действующее возмущение на границе — в первом осцилляторе, уравнения которого имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - h(x) + c), \\ \dot{y} &= -y + z - x, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z. \end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что изменение возмущающего параметра  $c$  в радиотехнике соответствует смещению рабочей точки на вольт-амперной характеристике нелинейного элемента. Заметим также, что при  $c \neq 0$  уравнения осциллятора теряют симметрию, что, естественно, отражается и на его аттракторах.

Величину связи осцилляторов можно интерпретировать в качестве скорости потока,  $\alpha$  — в качестве параметра активности среды, а  $\alpha c$ , согласно уравнениям (9), — параметра накачки. В эксперименте выбор параметров производился так, чтобы координаты состояний равновесия отдельных осцилляторов были уже достаточно близки к неподвижным точкам отображения (рис. 6). В результате эксперимента имеем следующую картину.

При небольшой скорости потока и небольшой величине накачки хаотичность потока развивается через некоторое число пространственных бифуркаций, происходящих в отдельных осцилляторах по мере возрастания их номеров. Число бифуркаций удвоения периода цикла всегда конечно [Арансон, Веричев, 1988] (рис. 7).

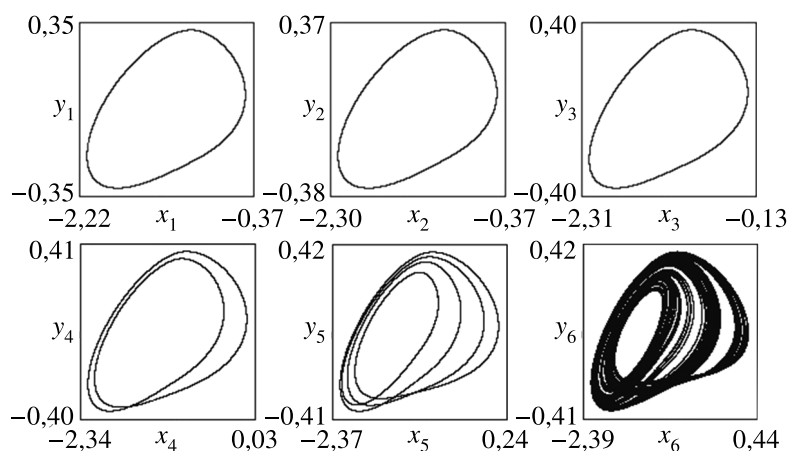


Рис. 7. Параметры эксперимента:  $(\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1, \varepsilon, c) = (8,51; 14; 0,1; -\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; 0,2; 0,01)$ ,  $C = \text{diag}(1; 0,1; 0,1)$

Заметим (не является правилом), что начавшаяся последовательность удвоения периода цикла должна закончиться динамическим хаосом. Существуют значения параметров, при которых после нескольких удвоений периода цикла происходит возврат на однократный цикл с дальнейшим установлением пространственно однородного периодического движения (рис. 8).

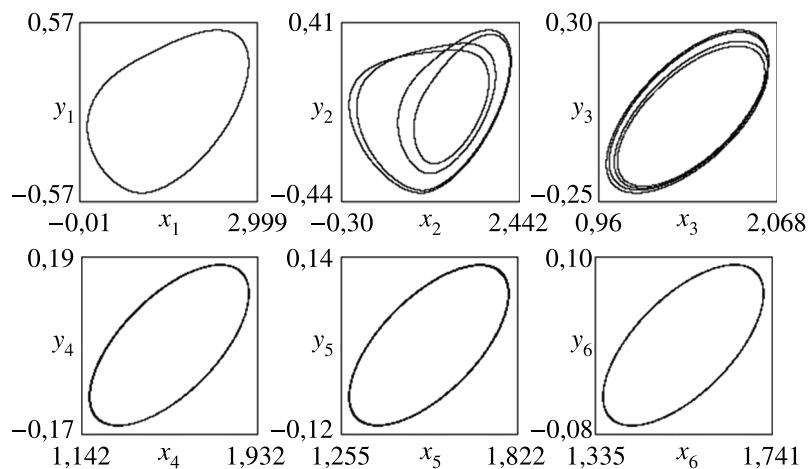


Рис. 8. Параметры:  $(\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1, \varepsilon, c) = (8,45; 14; 0,1; -\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; 0,2; 0,08)$ ,  $C = \text{diag}(1, 1, 1)$

Заметим также, что каскад пространственных бифуркаций не является обязательным условием для возникновения хаотического режима. При увеличении накачки периодическое движение первого осциллятора может сразу повлечь хаотические движения второго (рис. 9) с дальнейшим установлением пространственно однородного хаоса.

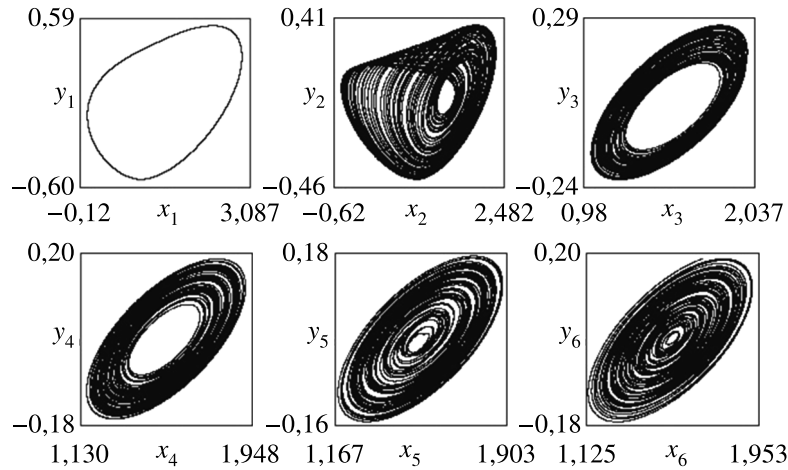


Рис. 9. Параметры осцилляторов:  $(\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1, \varepsilon, c) = (8,57; 14; 0,1; -\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; 0,2; 0,09)$ ,  $C = \text{diag}(1, 1, 1)$

При небольших значениях параметра связи существует такое явление, как стабилизация размерности хаотического движения (фрактальной) на отдельных отрезках цепочки осцилляторов, впервые обнаруженное в численном эксперименте [Афраймович, Рабинович, Сбитнев, 1985]. Эффект объясняется частичной хаотической синхронизацией осцилляторов с номерами на этих отрезках. В этом случае на графике зависимости размерности хаотического движения индивидуального осциллятора от его номера имеются практически горизонтальные полки, подобные резонансным полкам на характеристике вращения ротатора (осциллятора) в случае его принудительной синхронизации периодическим сигналом.

Если уровень накачки на границе значителен, то в зависимости от начальных условий в цепочке могут быть реализованы различные пространственно однородные динамические режимы. Для примера таковые изображены на рис. 10 и 11.

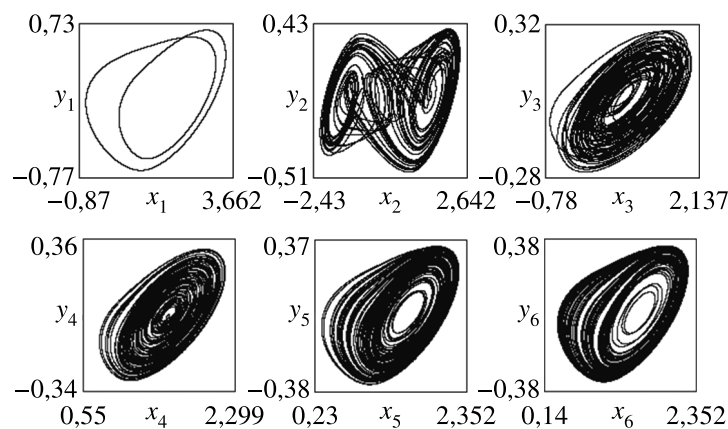


Рис. 10. Параметры осцилляторов:  $(\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1, \varepsilon, c) = (8,7; 14; 0,1; -\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; 0,2; 0,141)$ ,  $C = \text{diag}(1, 1, 1)$

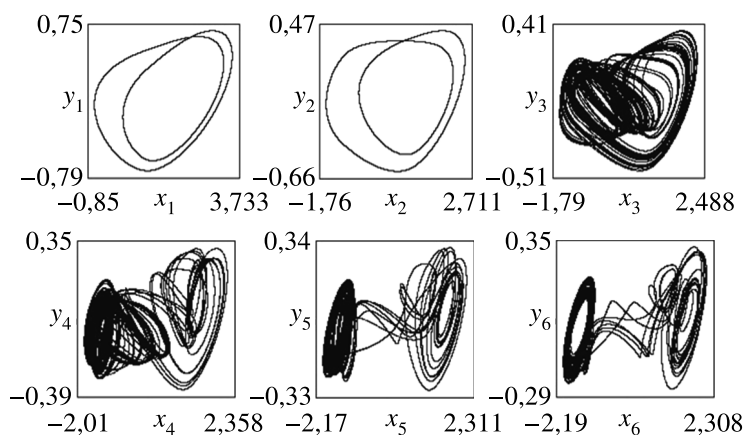


Рис. 11. Параметры осцилляторов:  $(\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1, \varepsilon, c) = (8,7; 14; 0,1; -\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; 0,2; 0,141)$ ,  $C = \text{diag}(1, 1, 1)$

## 5. Волны переключения

Как было сказано выше, пространственно однородный, и, в частности, хаотический динамический режим в потоковой цепочке чувствителен по отношению к величине и виду возмущений, подаваемых на границу. И если изменять соответствующий параметр, то можно обнаружить сходство получаемых картин с картинками, возникающими в потенциально неустойчивых (возбудимых) средах при запуске внешнего импульса. Имеются в виду волны переключения, соответствующие переходу среды из одного состояния в другое.

Подобные переходы — волны переключения типа «порядок–хаос» и наоборот, могут наблюдаться в рассматриваемой потоковой цепочке. В частности, переключателем состояния среды из хаотического в ламинарное может быть периодическое возмущение, синхронизирующее ведущий осциллятор и действующее в течение нужного времени. В таком случае, если первое состояние ведущего осциллятора описывается уравнениями (9), второе его состояние — уравнениями вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - h(x) + c + a \sin \omega\tau), \\ \dot{y} &= -y + z - x, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z.\end{aligned}$$

На рис. 12 и 13 представлены результаты численного эксперимента с цепочкой при различных параметрах, при постоянном и периодическом возмущениях на границе. При смене возмущений одного на другое имеем волну переключения состояния среды — цепочки с турбулентного на ламинарное состояние и наоборот.

## 6. Неоднородная цепочка

Обратимся к решению задачи о взаимоотношении синхронизированных движений осцилляторов в случае неоднородной цепочки. А именно, будем рассматривать цепочку с неоднородными по своей нелинейности элементами с однородной связью этих элементов.

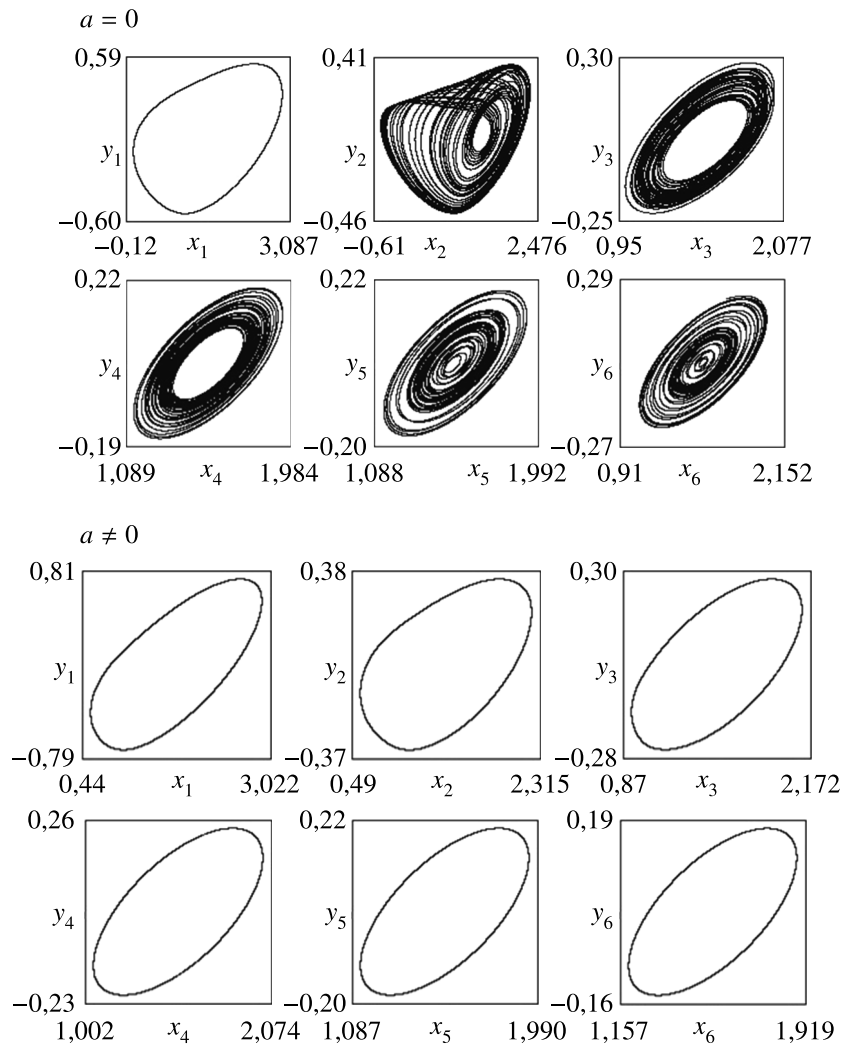


Рис. 12. Параметры осцилляторов:  $(\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1, \varepsilon, c, a, \omega) = (8,56; 14; 0,1; -\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; 0,2; 0,09; 0,25; 3,21)$ ,  $C = \text{diag}(1, 1, 1)$

### Цепочка слабо неидентичных осцилляторов

Рассматриваем связанную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X), \\ \dot{X}_i &= F(X_i) - \varepsilon C(X_i - X_{i-1}) + \mu F_i^*(X_i), \\ i &= \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{10}$$

с граничным условием  $X_0 \equiv X$ .

Здесь  $\mu$  — некоторый малый параметр, определяющий малые отклонения параметров осцилляторов цепочки по отношению к соответствующим параметрам ведущего (первого) осциллятора. Считаем, что каждый из осцилляторов представляет собой диссипативную систему, каковой является и связанная система (10). То есть все ее фазовые траектории ограничены шаром, как ограничены и соответствующие им решения.

Будем считать, что условия устойчивости пространственно однородного состояния в соответствующей однородной цепочке выполнены, а режим синхронизации осцилляторов считаем реализованным.

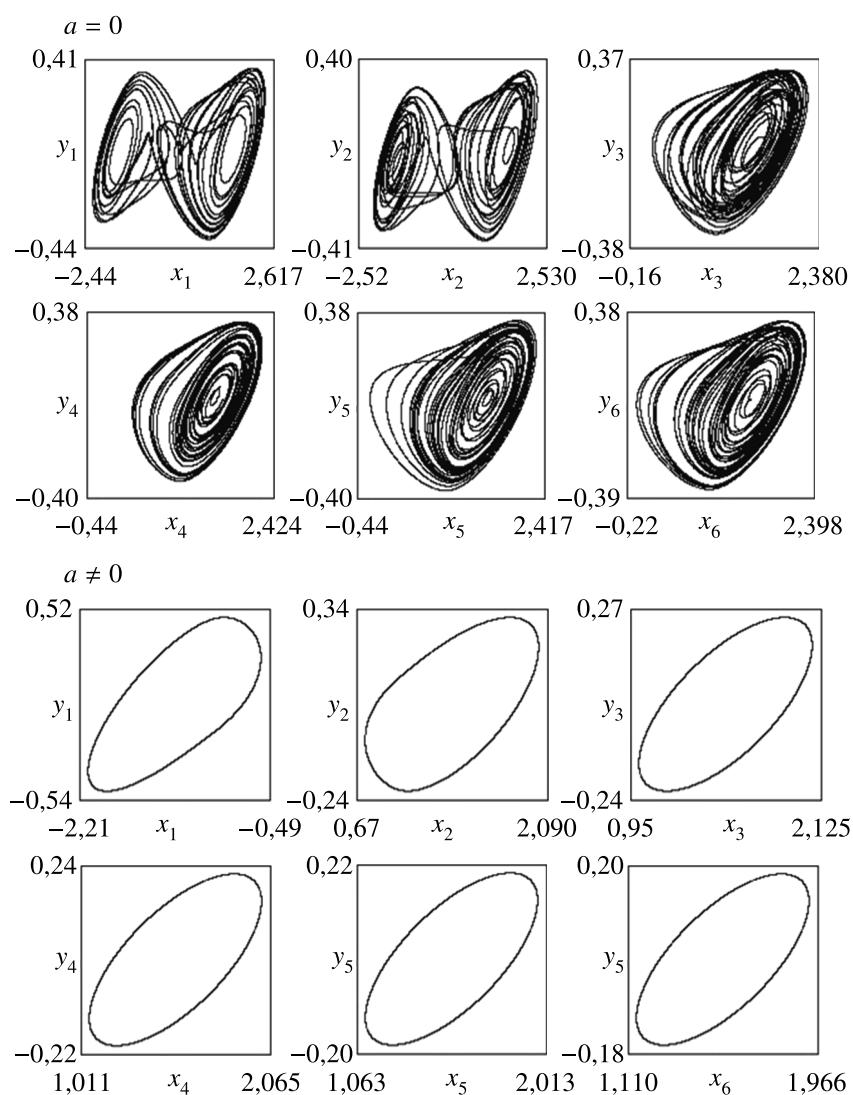


Рис. 13. Параметры осцилляторов:  $(\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1, \varepsilon, c, a, \omega) = (9,268; 14; 0,1; -\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; 0,2; 0,01; 0,2; 3,21)$ ,  $C = \text{diag}(1, 1, 1)$

Действуем в духе теории возмущений. А именно, запишем искомую связь переменных произвольного осциллятора цепочки с переменными ведущего осциллятора в виде степенного ряда по малому параметру:

$$X_i = X + \mu X_{i1}(X) + \mu^2 X_{i2}(X) + \dots \quad (11)$$

Производя известные для теории возмущений процедуры (подстановка в уравнения (10) и разделение величин по порядку малости параметра  $\mu$ ), получаем уравнения, определяющие функции  $X_{ij}$ . В частности, для функции первого приближения получаем уравнения вида

$$\dot{X}_{i1} - \frac{\partial F}{\partial X} X_{i1} + \varepsilon C X_{i1} = \varepsilon C X_{i-1,1} + F_i^*(X) \quad (12)$$

с граничным условием  $X_{01} \equiv 0$ .

Заметим, что при  $\varepsilon = 0$  и  $F_i^*(X) = 0$ ,  $X_{i-1,1} = 0$  каждое из уравнений (12) совпадает с уравнением в вариациях для ведущего осциллятора. Здесь матрица Якоби  $\frac{\partial F}{\partial X}$  рассматривается



относительно решения, соответствующего траектории его аттрактора. И если  $\lambda(1) > 0$  — максимальный ляпуновский показатель решений этого уравнения, то, как можно показать [Verichev, Verichev, Erofeev, 2021], при  $\varepsilon > \varepsilon^*(\lambda(1))$  тривиальное решение соответствующего (11) однородного уравнения является устойчивым. В силу предполагаемой диссипативности системы (10) и в силу указанной устойчивости решение каждого неоднородного уравнения из системы (12) является ограниченным. Это значит, что функциональные степенные ряды по малому параметру будут сходиться.

Уравнение в частных производных, соответствующее уравнению (12), имеет вид

$$\frac{\partial X_{i1}}{\partial X} F - \frac{\partial F}{\partial X} X_{i1} + \varepsilon C X_{i1} = \varepsilon C X_{i-1,1} + F_i^*(X). \tag{13}$$

Как полагается, при переходе от (12) к (13) члены  $\sim \mu$  отбрасываются (они отходят к следующему приближению по малому параметру).

При заданных векторах возмущений  $F_i^*(X)$  функции  $X_{i1}$  находятся последовательным решением уравнений (13).

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим возмущения векторов вида  $F_i^*(X) = \alpha_i^* C F$ . В этом случае решение системы (13) имеет вид  $X_{i1} = \Delta_i F(X)$ , где константы  $\Delta_i$  являются решением простого рекуррентного уравнения:

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + \varepsilon^{-1} \alpha_i^*$$

с начальным условием  $\Delta_0 = 0$ . С другой стороны, в силу разложения (11) получаем, что с точностью  $\sim \mu^2$  получаем уравнение  $X_n(t) = X(t + \varphi_n)$ , где  $\varphi_n = \mu \Delta_n$ . Таким образом параметр  $\Delta_i$  имеет смысл разности фаз  $i$ -го и ведущего осцилляторов. Решая рекуррентное уравнение, получаем  $\Delta_n = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \alpha_i^*$ .

В частности, для цепочки осцилляторов Чуа, различающихся параметром  $\alpha$ , связь переменных  $n$ -го осциллятора с переменными ведущего определяется векторным уравнением  $X_n(t) = X(t + \varphi_n)$ , где разность их фаз  $\varphi_n$  выражается формулой  $\varphi_n = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i - \alpha}{\alpha}$ .

**Цепочка сильно неидентичных осцилляторов с сильными связями**

Рассматриваем случай цепочки, в которой некоторые из осцилляторов имеют сильно различающиеся параметры ( $\sim \mu^0$ ), но при этом достаточно сильно связаны между собой: параметр связи  $\varepsilon \gg 1$ , а  $\mu = \varepsilon^{-1}$  — малый параметр.

Поскольку необязательно все параметры осцилляторов могут быть сильно различны, то разделим их уравнения на две группы. А именно, допустим, что правые части  $k$  уравнений каждого из осцилляторов цепочки сильно различны и содержат сильную связь, а параметры  $(m - k)$  уравнений имеют слабую неидентичность параметров и содержат умеренную связь или вовсе не содержат таковой. В таком случае цепочка приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X, Y), \\ \dot{Y} &= \Phi(X, Y), \\ \dot{X}_i &= F_i(X_i, Y_i) - \varepsilon C(X_i - X_{i-1}), \\ \dot{Y}_i &= \Phi(X_i, Y_i) - D(Y_i - Y_{i-1}) + \mu \Phi_i^*(X_i, Y_i). \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь  $X_{1,2} \in R^k$ ,  $Y_{1,2} \in R^{m-k}$ ,  $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_k)$ ,  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{m-k})$ ,  $c_i > 0$ ,  $d_j \geq 0$ ,  $\varepsilon^{-1} = \mu$  — малый параметр.

Первые два уравнения в (14) (две группы уравнений) представляют ведущий (первый) осциллятор.

Как и в предыдущем случае, ищем связь переменных уравнений осцилляторов цепочки с соответствующими переменными ведущего осциллятора в виде степенных рядов по малому параметру:

$$\begin{aligned} X_i &= X + \mu X_{i1}(X, Y) + \mu^2 X_{i2}(X, Y) + \dots, \\ Y_i &= Y + \mu Y_{i1}(X, Y) + \mu^2 Y_{i2}(X, Y) + \dots \end{aligned}$$

Производя известные процедуры со степенными рядами, для функций первого приближения получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \mu \dot{X}_{i1} &= F_i - F - CX_{i1} + CX_{i-1,1} + \mu \left( \frac{\partial F_i}{\partial X} X_{i1} + \frac{\partial F_i}{\partial Y} Y_{i1} \right), \\ \dot{Y}_{i1} - \frac{\partial \Phi}{\partial Y} Y_{i1} + DY_{i1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial X} X_{i1} + \Phi_i^* + DY_{i-1,1} \end{aligned} \quad (15)$$

с граничными условиями  $X_{01} = 0, Y_{01} = 0$ .

Как видим, система (15) — система с сингулярными возмущениями. В другой терминологии это система с быстрыми и медленными движениями. Первое уравнение определяет быстрые движения системы к некоторой поверхности (точнее, гиперповерхности) в фазовом пространстве (15), а второе уравнение определяет медленные движения изображающей точки на этой поверхности. Поскольку матрица  $C$ , по условию, невырожденная, то, согласно [Демидович, 1967], поверхность медленных движений является устойчивой. Уравнение нулевого приближения для этой поверхности найдем из первого уравнения (15), полагая  $\mu = 0$ :

$$X_{i1} = X_{i-1,1} + C^{-1}(F_i - F), \quad F_0(X, Y) = F(X, Y), \quad X_{0,1} = 0. \quad (16)$$

Это приближение является главным. Все функции  $X_{i1}$  находятся решением рекуррентного уравнения (16), и эту задачу будем считать решенной. В таком случае остается задача нахождения функции  $Y_{i1}$ .

Обоснуем ограниченность решений второго уравнения (15). Поскольку  $Y_{01} = 0$ , то (15) может рассматриваться как последовательность неавтономных уравнений — при каждом номере  $i$  правую часть соответствующего уравнения можно интерпретировать как внешнее воздействие. С другой стороны, соответствующее однородное уравнение при  $D = 0$ , с точностью до обозначений, является частью системы в вариациях для ведущего осциллятора. Если это уравнение устойчиво (случай регулярного аттрактора), то полное уравнение (неавтономное) имеет ограниченное решение при любой матрице  $D$  (по условию, она неотрицательна). Если же упомянутое уравнение в вариациях неустойчиво, то ляпуновский показатель его решений по крайней мере не превышает ляпуновского показателя хаотического аттрактора ведущего осциллятора. Как известно, в таком случае всегда найдется положительная матрица  $D$ , смещающая показатели решений соответствующего однородного уравнения (15) в левую полуплоскость. Другими словами, всегда реализуется случай устойчивого однородного уравнения, а значит, все решения неоднородных уравнений из последовательности (15) являются ограниченными. Это условие необходимо для сходимости степенных рядов, представляющих связь переменных осцилляторов в режиме синхронизации.

При известных  $X_{i1}$  функции  $Y_{i1}$  находятся решением потоковой цепочки уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial Y_{i1}}{\partial X} F + \frac{\partial Y_{i1}}{\partial Y} \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial Y} Y_{i1} + DY_{i1} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} X_{i1} + \Phi_i^* + DY_{i-1,1} \quad (17)$$

с граничным условием  $Y_{01} = 0$ .

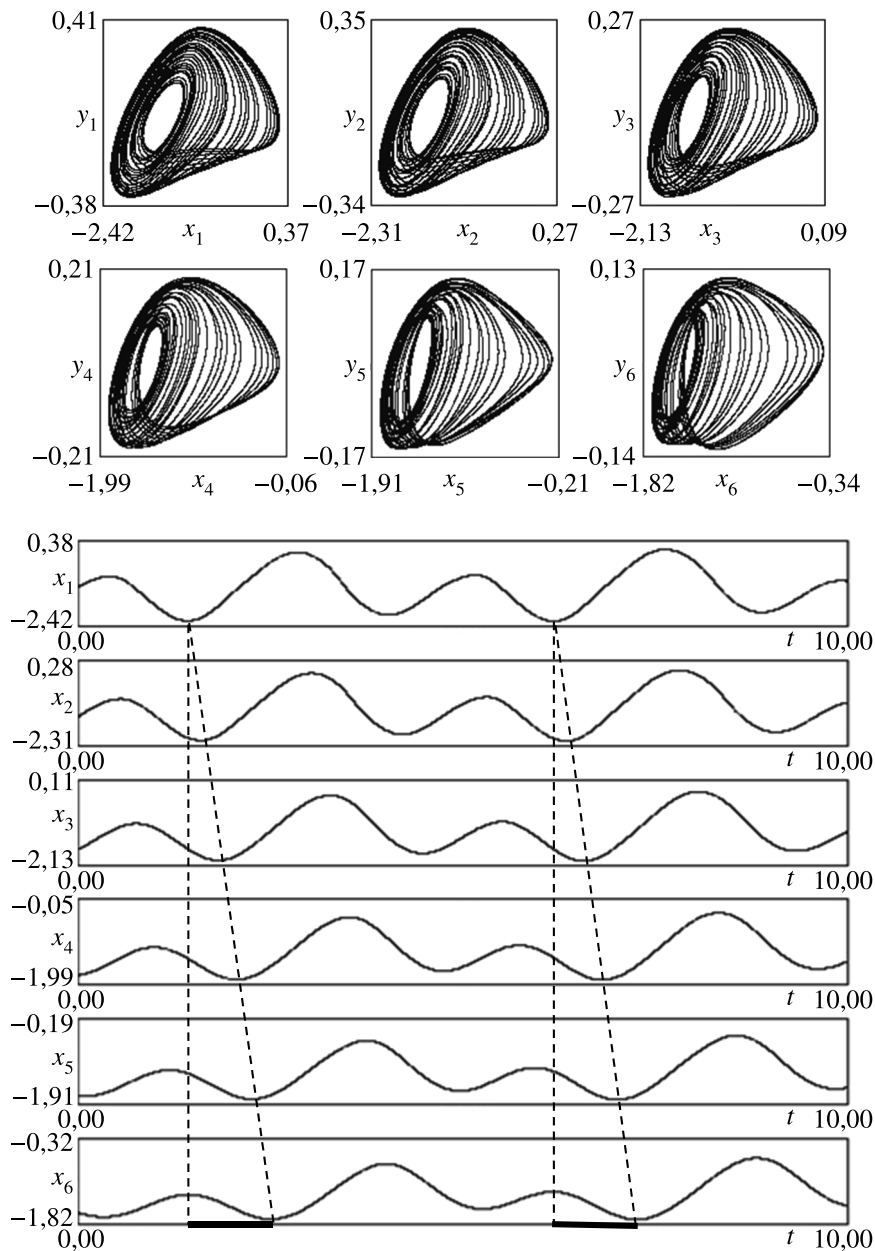


Рис. 14. Фазовые портреты и осциллограммы осцилляторов в режиме фазовой хаотической синхронизации. Параметры осцилляторов:  $\{\beta, \gamma, m_2, m_1, \varepsilon\} = \{14; 0,1; -\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; 3\}$ ,  $\{\alpha_i, i = \overline{1,6}\} = \{9,1; 4,0; 1,34; 1,0; 2,44; 0,4\}$

**ПРИМЕР 2.** Рассмотрим потоковую цепочку осцилляторов Чуа с сильно различными параметрами  $\alpha_i$  при идентичности остальных параметров. В этом случае нужные нам векторы и матрицы имеют следующий вид:  $X = x$ ,  $Y = (y, z)^T$ ,  $F(x, y) = \alpha(y - h(x))$ ,  $\Phi(x, y, z) = (-y + z - x, -\beta y - \gamma z)^T$ ,  $F_i(x, y) = \alpha_i(y - h(x))$ ,  $\Phi_i^* = 0$ ,  $D = 0$ ,  $C = 1$  (скаляр). Нетрудно видеть, что  $F_i(x, y) = \frac{\alpha_i}{\alpha} F(x, y) = \frac{\alpha_i}{\alpha} \dot{x}$ . Решая рекуррентное уравнение (16), получаем  $X_{n1} = \Delta_n \dot{x}$ , где  $\Delta_n = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i - \alpha}{\alpha}$ . При этом нетрудно убедиться, что  $Y_{n1} = \Delta_n \dot{Y}$  — решение уравнения (17). Это значит, что  $x_n(t) = x(t + \varphi_n)$ ,  $Y_n(t) = Y(t + \varphi_n)$ . То есть и в данном случае мы имеем дело с фазовой хаотической синхронизацией осцилляторов. Набег фазы между колебаниями ведущего и произвольного осцилляторов цепочки равен  $\varphi_n = \varepsilon^{-1} \Delta_n$  (рис. 14).

## Заключение

Большое разнообразие возможных динамических режимов, реализующихся как при возмущении начальных условий, так и при возмущении параметров одного или нескольких ее элементов, — главная особенность потоковой цепочки. Причиной тому является локальная конвективная неустойчивость, приводящая к быстрому росту амплитуды возмущений вдоль цепочки, которые могут быть незначительны на ее границе — в начале цепочки. Для элементов цепочки, удаленных от границы, это значит, что каждый из них находится под значительным и усиливающимся по мере возрастания номера элемента силовым воздействием левого соседа. Индивидуальная динамика нелинейных элементов становится сложной (в том числе хаотической при отсутствии таковой в индивидуальном порядке), и эта сложность усугубляется при трансляции вниз по потоку. Надо сказать, что введение даже относительно малой диффузии существенно упрощает общую картину возможных динамических режимов цепочки [Арансон, Веричев, 1988].

Как показано выше, в общем многообразии картин динамических режимов существуют и относительно простые — пространственно однородные. Последние определяются изохронной принудительной синхронизацией каждого элемента его соседом слева. Естественно, что подобные режимы реализуются только в цепочках с идентичными элементами. Разнообразие динамики таких состояний определяется индивидуальными динамическими возможностями элементов цепочки. Однако реализация подобных режимов на практике требует специального выбора параметров из областей устойчивости. Представляется интересным указанная выше возможность управления динамическими режимами цепочки путем специальных возмущений, подаваемых на границу.

Проведенное исследование динамики цепочки не касалось конкретных приложений. Полагаем, что заинтересованный читатель, будучи специалистом в конкретной области естествознания или в определенной промышленной технологии, сможет, с пользой используя эти результаты, дать им собственную интерпретацию.

## Список литературы (References)

- Абарбанель Г. Д., Рабинович М. И., Селверстон А., Баженов М. В., Хуэрта Р., Сущик М. М., Рубчинский Л. Л. Синхронизация в нейронных ансамблях // Успехи физических наук. — 1996. — Т. 166, № 4. — С. 363–390.
- Abarbanel H. D., Rabinovich M. I., Selverston A., Bazhenov M. V., Huerta R., Sushchik M. M., Rubchinskii L. L. Sinkhronizatsiya v neironnykh ansamblyakh [Synchronisation in neural networks] // UFN. — 1996. — Vol. 166, No. 4. — P. 363–390 (in Russian).
- Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
- Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. Teoriya kolebaniy [Theory of Oscillators]. — Moscow: Fizmatgiz, 1959 (in Russian).
- Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // Доклады Академии наук СССР. — 1986. — Т. 286, № 5. — С. 1120–1124.
- Anishchenko V. S., Aranson I. S., Postnov D. E., Rabinovich M. I. Prostranstvennaya sinkhronizatsiya i bifurkatsii razvitiya khaosa v tsepochnke svyazannykh generatorov [Spatial synchronization and bifurcations of chaos development in a chain of coupled generators] // DAN SSSR. — 1986. — Vol. 286, No. 5. — P. 628 (in Russian).
- Арансон И. С., Веричев Н. Н. Динамика квазипериодических волновых движений в однонаправленных цепочках генераторов // Известия вузов. Радиофизика. — 1988. — Т. 31, № 1. — С. 29–40.
- Aranson I. S., Verichev N. N. Dinamika kvaziperiodicheskikh volnovykh dvizhenii v odonapravlennykh tsepochkakh generatorov [Dynamics of quasiperiodic excitations in unidirectional chains of generators] // Izv. vuzov. Radiofizika. — 1988. — Vol. 31, No. 1. — P. 29–40 (in Russian).
- Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. Структурные аттракторы и пространственное развитие турбулентности в потоковых системах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1986. — Т. 90, № 5. — С. 1707–1718.

- Aranson I.S., Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I., Starobinets I.M.* Strukturnye attraktory i prostranstvennoe razvitiye turbulentnosti v potokovykh sistemakh [Structural attractors and spatial development of turbulence in flow systems] // *ZhETF*. — 1986. — Vol. 90, No. 5. — P. 1707–1718 (in Russian).
- Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // *Известия вузов. Радиофизика*. — 1986. — Т. 29, № 9. — С. 1050–1060.
- Afraimovich V.S., Verichev N.N., Rabinovich M.I.* Stokhasticheskaya sinkhronizatsiya kolebaniy v dissipativnykh sistemakh [Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems] // *Izv. vuzov. Radiofizika*. — 1986. — Vol. 29, No. 9. — P. 1050–1060 (in Russian).
- Афраймович В. С., Некоркин В. И., Осипов Г. В., Шалфеев В. Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации / под общ. ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича. — Горький: ИПФ АН СССР, 1989. — 253 с.
- Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Ustoichivost', struktury i khaos v nelineinykh setyakh sinkhronizatsii [Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization networks] / ed. A. V. Gaponov-Grekhov and M. I. Rabinovich. — Gorky: IPF Academy of Sciences of the USSR, 1989. — 253 p. (in Russian).
- Афраймович В. С., Рабинович М. И., Сбитнев В. И.* О размерности аттракторов в цепочке связанных генераторов // *Письма в Журнал технической физики*. — 1985. — Т. 11, № 6. — С. 338–342.
- Afraimovich V.S., Rabinovich M.I., Sbitnev V.I.* O razmernosti attraktorov v tsepoche svyazannykh generatorov [On the dimension of attractors in a chain of coupled generators] // *Letters in ZhTF*. — 1985. — Vol. 11, No. 6. — P. 338–342 (in Russian).
- Борисюк Г. Н., Борисюк Р. М., Казанович Я. Б., Иваницкий Г. Р.* Моделирование динамики нейронной активности и обработка информации в мозге — итоги «десятилетия» // *Успехи физических наук*. — 2002. — Т. 172, № 10. — С. 1189–1214.
- Borisyuk G.N., Borisyuk R.M., Kazanovich Ya.B., Ivanitskii G.R.* Modelirovanie dinamiki neironnoi aktivnosti i obrabotka informatsii v mozge — itogi “desyatiletia” [Models of neural dynamics in brain information processing — the developments of the decade] // *Phys. Usp.* — 2002. — Vol. 172, No. 10. — P. 1189–1214 (in Russian).
- Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
- Demidovich B.P.* Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]. — Moscow: Nauka, 1967. — 472 p. (in Russian).
- Колмогоров А. Н., Петровский И. Е., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастом вещества, и его применение к одной биологической проблеме // *Бюллетень Московского государственного университета: Секция А / под ред. В. В. Голубева, А. Н. Колмогорова и Л. А. Тумаркина. Математика и механика*. — 1975. — Т. 12. — С. 1–26.
- Kolmogorov A.N., Petrovsky I.E., Piskunov N.S.* Issledovanie uravneniya diffuzii, soedinennoi s vozrastaniem veshchestva i ego primenenie k odnoi biologicheskoi probleme [Study of the diffusion equation with a source of matter and its applications to biological problems] // *Voprosy kibernetiki*. — 1975. — Vol. 12. — P. 1–26 (in Russian).
- Коршунова А. Н., Лахно В. Д.* Равномерное движение и блоховские осцилляции полярона в однородной молекулярной полинуклеотидной цепочке в постоянном электрическом поле на основе модели Пейрарда–Бишопа–Холстейна // *Доклады Международной конференции «Математическая биология и биоинформатика» / под ред. В. Д. Лахно*. — Пушкино: ИМПБ РАН, 2020. — Т. 8. — С. 15–19.
- Korshunova A.N., Lakhno V.D.* Ravn timerne dvizhenie i blokhovskie ostillyatsii polyarona v odnorodnoi molekulyarnoi polinukleotidnoi tsepoche v postoyannom elektricheskom pole na osnove modeli Peirarda–Bishopa–Kholsteina [Uniform motion and Bloch oscillations of polaron in homogeneous molecular polynucleotide chain in constant electric field based on the Peyrard–Bishop–Holstein model] // *Proceedings of the Conference: Mathematical Biology and Bioinformatics / ed. V. D. Lakhno*. — Pushino: IMPB RAN, 2020. — Vol. 8. — P. 15–19 (in Russian).
- Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979. — 528 с.
- Lifshits E.M., Pitaevsky L.P.* Fizicheskaya kinetika [Physical kinetics]. — Moscow: Nauka, 1979. — 528 p. (in Russian).
- Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1951. — 216 с.
- Lurie A.I.* Nekotorye nelineinye zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya [Some nonlinear problems of the theory of automatic control]. — Moscow: Gostekhizdat, 1951. — 216 p. (in Russian).
- Мун Ф.* Хаотические колебания. — М.: Мир, 1990. — 311 с.
- Moon F.* Chaotic oscillations. — New York: Wiley-Interscience, 1987. (Russ. ed.: *Mun F. Khaoticheskie kolebaniya*. — Moscow: Mir, 1990. — 311 p.)
- Babloyntz A., Destexhe A.* Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. — 1986. — Vol. 83, No. 10. — P. 3513–3517.

- Pecora L. V., Carroll T. L.* Synchronization in chaotic systems // *Physical Review Letters*. — 1990. — Vol. 64, No. 8. — P. 821–824.
- Rabinovich M., Varona P., Selverston A., Abarbanel H.* Dynamical principles in neuroscience // *Review of Modern Physics*. — 2006. — Vol. 78. — P. 1213.
- Special issue on Chua's circuit // *Journal of Circuit, Systems, and Computers*. — 1993. — Vol. 3, No. 2.
- Verichev N., Verichev S., Erofeev V.* Chaos, synchronization and structures in dynamics of systems with cylindrical phase space. — Springer Nature Switzerland AG, 2020. — 197 p.
- Verichev N., Verichev S., Erofeev V.* Further insights into oscillation theory. — Cambridge Scholars Publishing, 2021. — 467 p.