КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2023 Т. 15 № 2 С. 317–327
DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-2-317-327

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.8

Транспортное моделирование: усреднение ценовых матриц

И. В. Подлипнова[1,a], М. И. Персиянов[1,2,b], В. И. Швецов[1,3,c], Е. В. Гасникова[1,d]

[1]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 141701, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
[2]Институт проблем передачи информации РАН,
Россия, 127051, г. Москва, Б. Каретный пер., д. 9
[3]Российский университет транспорта,
Россия, 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9

E-mail: [a] podlipnova.iv@phystech.edu, [b] persiianov.mi@phystech.edu, [c] vl.shvetsov@mail.ru, [d] egasnikova@yandex.ru

Получено 15.02.2023.
Принято к публикации 23.02.2023.

В данной работе рассматриваются различные подходы к усреднению обобщенных цен передвижений, рассчитанных для разных способов передвижения в транспортной сети. Под способом передвижения понимается как вид транспорта, например легковой автомобиль или транспорт общего пользования, так и передвижение без использования транспорта, например пешком. Задача расчета матриц передвижений включает в себя задачу вычисления суммарных матриц, иными словами — оценку общего спроса на передвижения всеми способами, а также задачу расщепления матриц по способам передвижений, называемого также модальным расщеплением. Для расчета матриц передвижений используют гравитационные, энтропийные и иные модели, в которых вероятность передвижения между районами оценивается на основе некоторой меры удаленности этих районов друг от друга. Обычно в качестве меры дальности используется обобщенная цена передвижения по оптимальному пути между районами. Однако обобщенная цена передвижения отличается для разных способов передвижения. При расчете суммарных матриц передвижений возникает необходимость усреднения обобщенных цен по способам передвижения. К процедуре усреднения предъявляется естественное требование монотонности по всем аргументам. Этому требованию не удовлетворяют некоторые часто применяемые на практике способы усреднения, например усреднение с весами. Задача модального расщепления решается применением методов теории дискретного выбора. В частности, в рамках теории дискретного выбора разработаны корректные методы усреднения полезности альтернатив, монотонные по всем аргументам. Авторы предлагают некоторую адаптацию методов теории дискретного выбора для применения к вычислению усредненной цены передвижений в гравитационной и энтропийной моделях. Перенос формул усреднения из контекста модели модального расщепления в модель расчета матриц передвижений требует ввода новых параметров и вывода условий на возможное значение этих параметров, что и было проделано в данной статье. Также были рассмотрены вопросы перекалибровки гравитационной функции, необходимой при переходе на новый метод усреднения, если имеющаяся функция откалибрована с учетом использования средневзвешенной цены. Предложенные методики были реализованы на примере небольшого фрагмента транспортной сети. Приведены результаты расчетов, демонстрирующие преимущество предложенных методов.

Ключевые слова: мультиномиальный логит, модель дискретного выбора, модальный выбор, гравитационная функция

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание), № 075-00337-20-03, номер проекта 0714-2020-0005.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2023 VOL. 15 NO. 2 P. 317–327
DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-2-317-327

UDC: 519.8

Transport modeling: averaging price matrices

I. V. Podlipnova[1,a], M. I. Persiianov[1,2,b], V. I. Shvetsov[1,3,c], E. V. Gasnikova[1,d]

[1]Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russia
[2]Institute for Information Transmission Problems RAS,
9 B. Karetny lane, Moscow, 127051, Russia
[3]Russian University of Transport (MIIT),
9/9 B. Obrazczova st., Moscow, 127994, Russia

E-mail: [a] podlipnova.iv@phystech.edu, [b] persiianov.mi@phystech.edu, [c] vl.shvetsov@mail.ru,
[d] egasnikova@yandex.ru

Received 15.02.2023.
Accepted for publication 23.02.2023.

This paper considers various approaches to averaging the generalized travel costs calculated for different modes of travel in the transportation network. The mode of transportation is understood to mean both the mode of transport, for example, a car or public transport, and movement without the use of transport, for example, on foot. The task of calculating the trip matrices includes the task of calculating the total matrices, in other words, estimating the total demand for movements by all modes, as well as the task of splitting the matrices according to the mode, also called modal splitting. To calculate trip matrices, gravitational, entropy and other models are used, in which the probability of movement between zones is estimated based on a certain measure of the distance of these zones from each other. Usually, the generalized cost of moving along the optimal path between zones is used as a distance measure. However, the generalized cost of movement differs for different modes of movement. When calculating the total trip matrices, it becomes necessary to average the generalized costs by modes of movement. The averaging procedure is subject to the natural requirement of monotonicity in all arguments. This requirement is not met by some commonly used averaging methods, for example, averaging with weights. The problem of modal splitting is solved by applying the methods of discrete choice theory. In particular, within the framework of the theory of discrete choice, correct methods have been developed for averaging the utility of alternatives that are monotonic in all arguments. The authors propose some adaptation of the methods of the theory of discrete choice for application to the calculation of the average cost of movements in the gravitational and entropy models. The transfer of averaging formulas from the context of the modal splitting model to the trip matrix calculation model requires the introduction of new parameters and the derivation of conditions for the possible value of these parameters, which was done in this article. The issues of recalibration of the gravitational function, which is necessary when switching to a new averaging method, if the existing function is calibrated taking into account the use of the weighted average cost, were also considered. The proposed methods were implemented on the example of a small fragment of the transport network. The results of calculations are presented, demonstrating the advantage of the proposed methods.

Keywords: multinomial logit, discrete choice model, modal choice, gravity function

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 2, pp. 317–327 (Russian).

The research was supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, No. 075-00337-20-03, project number 0714-2020-0005.

Введение

Важной задачей в транспортном моделировании является задача расчета матриц передвижений (корреспонденций) между районами. Передвижения в транспортной сети могут совершаться разными способами. Под способом передвижения понимается вид транспорта, например легковой автомобиль или транспорт общего пользования, а также, возможно, передвижение без использования транспорта, например пешком. Таким образом, задача расчета матриц передвижений включает в себя как задачу вычисления суммарных матриц (иными словами, оценку общего спроса на передвижения всеми способами), так и расщепление матриц по способам передвижений.

Для расчета матриц передвижений используют, например, гравитационные или энтропийные модели [Вильсон, 1978; Швецов, 2003], которые оценивают вероятность передвижения между районами на основе некоторой меры удаленности этих районов друг от друга. Обычно в качестве меры дальности в транспортных моделях используется обобщенная цена передвижения по оптимальному пути. Обобщенная цена, очевидно, сильно различается для разных способов передвижения. При наличии нескольких способов передвижения в модели возникает необходимость оценки обобщенной цены, некоторым образом усредненной по способам передвижения. В данной статье рассматриваются некоторые проблемы, связанные с процедурой такого усреднения, и предлагается корректный подход к усреднению ценовых матриц при наличии разных способов передвижения.

Следуя [Gasnikova et al., 2023], введем основные обозначения. Будем рассматривать улично-дорожную сеть (УДС) в виде ориентированного графа $G = (V, E)$, где вершины V соответствуют перекресткам или центроидам [Sheffi, 1984], а ребра E соответствуют дорогам. Способ передвижения также принято называть модой, а выбор агентом определенного способа называется модальным выбором. Под обобщенной ценой передвижения (в дальнейшем — просто цена) будем понимать некоторый критерий быстроты и комфорта передвижения, представляющий в общем случае взвешенную сумму таких факторов, как время движения, стоимость проезда, комфорт, издержки на поиск транспорта и так далее. Цену передвижения принято измерять в единицах времени.

Выбирая маршрут передвижения из некоторого района $i \in V$ в район $j \in V$, участник движения, или агент, выбирает оптимальный путь. Иными словами, мерой дальности между двумя различными районами — вершинами в графе G — является минимальная цена пути между заданными районами. При выборе маршрута поведение различных агентов в дорожно-транспортной сети будет схожим — все они будут выбирать кратчайший путь. Напротив, при модальном выборе различия в поведении участников движения проявляются сильнее. Иными словами, человеку, не имеющему личного транспорта, гораздо дороже использовать эту моду для перемещения, чем человеку с личным автомобилем. А участник движения, который имеет личный транспорт, в очень редких случаях откажется от комфорта поездки на собственном автомобиле и воспользуется общественным транспортом, даже если путь на автомобиле будет занимать больше времени, чем на общественном транспорте.

Для применения к гравитационной или энтропийной модели необходимо усреднить цены по способам передвижения. К процедуре усреднения возникает естественное требование монотонности функции усредненной цены по аргументам. Действительно, если цена для одного способа возрастает или уменьшается при неизменных ценах других способов, то усредненная цена должна, соответственно, возрастать или уменьшаться. Естественной процедурой усреднения на первый взгляд представляется усреднение цен с весами, где в качестве весов принимаются доли использования соответствующих способов. Однако несложно показать, что данная процедура не удовлетворяет требованию монотонности. Действительно, при увеличении цены одного из способов уменьшается соответствующая доля, то есть вес этой цены в усреднении, что может привести к тому, что усредненная цена не увеличится, а уменьшится. Ниже в статье будет приведен пример расчета с этим эффектом.

Модальное расщепление чаще всего рассчитывается с применением стандартных моделей дискретного выбора, в частности multinomial logit. В теории дискретного выбора также возникает задача оценки усредненной «полезности» разных альтернатив. Например, эта задача возникает в иерархических вариантах модели, где требуется оценить полезность «композитной» цели путем усреднения привлекательностей составляющих ее альтернатив. Формулы усреднения, полученные в теории дискретного выбора, автоматически удовлетворяют свойству монотонности. Это наталкивает на идею применения некоторой адаптации метода усреднения из модели дискретного выбора к оценке усредненных цен передвижений в гравитационной или энтропийной модели для расчета суммарных матриц передвижений.

Далее в данной статье приведены некоторые теоретические сведения о модели дискретного выбора и гравитационной модели. Для переноса формул теории дискретного выбора в модели корреспонденций нужно корректно перейти от полезностей альтернатив к ценам передвижений. В частности, процедура должна гарантировать неотрицательность усредненных цен при любых значениях аргументов. В статье получены необходимые и достаточные для этого условия на коэффициенты модели. Кроме того, обсуждается вопрос необходимой перекалибровки гравитационной функции (или функции априорной вероятности энтропийной модели). Полученные результаты иллюстрируются численными расчетами, выполненными на небольшом примере транспортной сети.

Модель дискретного выбора (МДВ)

Данная модель была впервые представлена в работе [McFadden, 1974] и нашла применение во многих приложениях [Ben-Akiva, Lerman, 1985; Anderson, Palma, Thisse, 1992; Mahajan, Ryzin, 1999].

Опишем модель на основе работ [Boyles, Lownes, Unnikrishnan, 2022; Ortúzar, Willumsen, 2011]. Пусть I — конечное множество альтернатив. Каждой альтернативе $i \in I$ соответствует *полезность* U_i. Предполагается, что агент делает свой выбор $i^* \in \operatorname{argmax}\{U_i\}$, максимизирующий полезность, заданную формулой

$$U_i = V_i + \varepsilon_i, \tag{1}$$

где V_i — *наблюдаемая полезность*, ε_i — *скрытая полезность*. Существует две интерпретации приведенных величин. Первая: V_i представляет собой полезность, доступную для измерения модельером, ε_i — недоступную, в связи с субъективными факторами. Вторая интерпретация: V_i содержит все факторы, о которых может знать модельер, и тогда ε_i есть *ошибка* между истинной полезностью V_i и полезностью U_i, которая, по ощущениям, должна быть.

Мультиномиальная логит-модель получается, если положить, что ε_i — независимые одинаково распределенные по Гумбелю величины с нулевым средним и одинаковой дисперсией. Тогда вероятность выбрать альтернативу i дается формулой

$$p_i = \frac{e^{\alpha V_i}}{\sum\limits_{j \in I} e^{\alpha V_j}}, \tag{2}$$

где параметр α может быть выражен через среднеквадратическое отклонение σ как $\frac{\pi}{\sigma\sqrt{6}}$ и отражает соотношение наблюдаемой и скрытой полезности. Например, если $\alpha = 0$, что соответствует $\sigma = \infty$, вероятности p_i будут одинаковыми. Это означает, что наблюдаемая полезность не вносит вклад в принимаемое решение, которое определяется только на основе скрытой полезности.

Отметим, что модели дискретного выбора не могут быть откалиброваны стандартными методами [Ortúzar, Willumsen, 2011], такими как, например, метод наименьших квадратов, потому что зависимая переменная p_i — ненаблюдаемая вероятность из отрезка [0, 1], а располагаемые данные — индивидуальный выбор агента (либо 0, либо 1). Поэтому коэффициенты часто определяются в ходе калибровки модели.

МДВ в применении к модальному выбору

В транспортной модели оценкой привлекательности путей и способов передвижения служит обобщенная цена передвижения (в дальнейшем — просто цена). Поэтому в задаче модального выбора естественно считать полезность пропорциональной цене, точнее говоря, представить полезность в виде линейной функции переменной c_i следующего вида:

$$V_i = -\alpha_i c_i + \beta_i. \tag{3}$$

Здесь константы α_i отражают чувствительность агентов в дорожно-транспортной сети к фактору цены для того или иного способа передвижения. Если для всех видов транспорта цена измеряется в одних единицах, то можно считать чувствительности одинаковыми и равными некоторой константе: $\alpha_i = \alpha = \text{const}$.

Константы β_i, в свою очередь, отражают асимметрию выбора, то есть при одинаковых ценах может быть разная вероятность. Примером, когда это проявляется на практике, может служить ситуация с выбором между общественным и личным транспортом. Если даже цены на перемещения общественным и личным транспортом равны, то владельцы автомобилей с высокой вероятностью не откажутся от комфорта личного транспорта. Значения β_i зависят от единиц измерения и определяются обычно на основании социологических исследований. Таким образом, параметр β_i позволяет учесть в модели транспорт разной природы, а также различные типы пассажиров, например владеющих и не владеющих личным автомобилем.

Учитывая вышесказанное, преобразовывая выражение (2), получаем следующую формулу:

$$p_i = \frac{e^{-\alpha_i c_i + \beta_i}}{\sum\limits_{j \in I} e^{-\alpha_j c_j + \beta_j}}. \tag{4}$$

Отметим, что коэффициенты чувствительности α_i и общий дисперсионный коэффициент α из формулы (2) имеют фактически одинаковый содержательный смысл, поэтому в (4) этот коэффициент опущен, то есть мы предполагаем, что α_i и β_i неявно включают в себя коэффициент α. Также очевидно, что коэффициенты β_i в формуле (4) определены с точностью до аддитивной постоянной.

Вывод формулы для усредненной цены $\overline{c}$

На практике часто рассматриваются иерархические МДВ, в которых альтернативы сгруппированы в иерархическом порядке, и выбор происходит последовательно из групп альтернатив. Иерархическую модель удобно представлять в виде некоторого дерева, где конечные листовые вершины соответствуют альтернативам выбора, а каждая промежуточная вершина соответствует «композитному» выбору, то есть выбору одной из альтернатив, исходящих из данной вершины. Полезность композитной цели — это, по определению, усредненная полезность составляющих ее альтернатив. В рамках теории она вычисляется как математическое ожидание максимума из полезностей составляющих ее альтернатив. В случае когда полезности альтернатив распределены по Гумбелю, получается следующая формула для усредненной полезности $\overline{V}$:

$$e^{\alpha\overline{V}} = \sum_i e^{\alpha V_i}. \tag{5}$$

В контексте транспортного моделирования необходимо использовать выражения (3) полезностей через цены передвижений.

Для применения полученной формулы усреднения к гравитационной модели мы сделаем предположение, что сам факт совершения передвижения (любым способом) можно трактовать как выбор композитной цели, включающей вообще все рассматриваемые альтернативы, то есть все способы передвижения, и использовать формулу (3) для оценки полезности такого выбора. При этом нам необходимо перейти от величины усредненной полезности $\overline{V}$ к усредненной цене передвижения $\overline{c}$, поскольку именно эта величина используется явно в гравитационных и энтропийных моделях. В этой связи возникает вопрос о правильном определении значений соответствующих коэффициентов $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ для композитной цели.

Если предполагать, что все цены c_i измеряются в одинаковых единицах, а коэффициенты α_i представляют собой поведенческие коэффициенты, выражающие чувствительность агентов к повышению цены на одну единицу, можно без большого ограничения общности принять, что все эти коэффициенты одинаковы. Тогда естественно положить $\overline{\alpha} = \alpha_i = \alpha = \text{const}$. С учетом сказанного формула усреднения (5) принимает вид

$$e^{-\alpha\overline{c}+\overline{\beta}} = \sum_i e^{-\alpha c_i+\beta_i}. \tag{6}$$

Из (6) получается следующее выражение для усредненной цены:

$$\overline{c} = -\frac{1}{\alpha}\left(\ln \sum_i e^{-\alpha c_i+\beta_i} - \overline{\beta}\right), \tag{7}$$

которое часто называется формулой logsum. Для применения формулы осталось выяснить, как следует выбирать коэффициент $\overline{\beta}$. Отметим, что даже при произвольном выборе этого коэффициента величина $\overline{c}$, полученная по формуле (7), может быть использована в гравитационной модели, при этом выбор конкретного значения становится вопросом калибровки. Однако можно предъявить разумное требование, состоящее в том, что при всех значениях цен c_i усредненная цена должна принимать неотрицательное значение: $\overline{c} \geqslant 0$. Покажем, что данное требование приводит к следующему ограничению на возможное значение параметра $\overline{\beta}$:

$$\overline{\beta} \geqslant \ln k + \max\{\beta_i\}, \tag{8}$$

где k — количество рассматриваемых в модели альтернативных способов передвижения.

Лемма 1. *При всех $\overline{\beta}$, удовлетворяющих неравенству* (8)*, величина $\overline{c}$, даваемая формулой* (7)*, где $\alpha \geqslant 0$, будет неотрицательной для любых $c_i \geqslant 0$. Приведенная оценка не улучшаема в том смысле, что при меньших значениях $\overline{\beta}$ всегда найдутся такие $c_i \geqslant 0$, что $\overline{c} < 0$.*

Доказательство. Мы получаем ограничения на $\overline{\beta}$, исходя из неотрицательности $\overline{c}$ в выражении

$$e^{-\overline{\alpha}\overline{c}+\overline{\beta}} = \sum_i e^{-\overline{\alpha}c_i+\beta_i}.$$

Выразим отсюда само $\overline{c}$:

$$\overline{c} = \frac{\ln\left(\sum\limits_i e^{-\overline{\alpha}c_i+\beta_i}\right) - \overline{\beta}}{-\overline{\alpha}}.$$

Для того чтобы выполнялось требуемое условие на $\overline{c}$, необходимо, чтобы

$$\ln\left(\sum_i e^{-\overline{\alpha}c_i+\beta_i}\right) - \overline{\beta} \leqslant 0.$$

Подставим найденную нами оценку на $\overline{\beta}$ в выражение, полученное выше:

$$\ln\left(\frac{1}{k}\sum_i e^{-\overline{\alpha}c_i+\beta_i-\max\{\beta_i\}}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{k}\sum_i e^{-\overline{\alpha}c_i+(\beta_i-\max\{\beta_i\})}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \ln\left(\frac{1}{k}\sum_i e^{-\overline{\alpha}c_i}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{k}\sum_i e^{0}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{k}\sum_i 1\right) = \ln\left(\frac{1}{k}k\right) = 0.$$

Из чего следует, что при полученном ограничении на $\overline{\beta}$ выполнены условия неотрицательности усредненного значения стоимости перемещений по альтернативным путям, что доказывает достаточность найденных ограничений.

Покажем теперь необходимость этого ограничения на $\overline{\beta}$. Так как при найденных ограничениях на $\overline{\beta}$ для любых значений c_i и β_i должна выполняться неотрицательность $\overline{c}$, то покажем, что при значениях $\overline{\beta}$, не удовлетворяющих ограничению, найдутся такие c_i и β_i, что требование на $\overline{c}$ будет нарушено.

Пусть неравенство на $\overline{\beta}$ не выполняется. Иными словами, пусть найдется некоторый $\widetilde{\beta}$ такой, что $\widetilde{\beta} = \overline{\beta} - \delta < \ln k + \max\{\beta_i\}$, где $\delta > 0$. Тогда получаем следующее выражение для $\overline{c}$:

$$\overline{c} = \frac{\ln\left(\sum\limits_i e^{-\overline{\alpha}c_i+\beta_i}\right) - \widetilde{\beta}}{-\overline{\alpha}} = \frac{\ln\left(\sum\limits_i e^{-\overline{\alpha}c_i+\beta_i}\right) - \ln k - \max\{\beta_i\} + \delta}{-\overline{\alpha}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{k}\sum\limits_i e^{-\overline{\alpha}c_i+\beta_i-\max\{\beta_i\}+\delta}\right)}{-\overline{\alpha}}.$$

Пусть значения β_i очень близки, $\max\{\beta_i\} - \min\{\beta_i\} < \frac{\delta}{2k}$. Возьмем такие c_i, что $c_i = \frac{\beta_i-\max\{\beta_i\}+\frac{\delta}{2}}{\overline{\alpha}} > \frac{-\frac{\delta}{2k}+\frac{\delta}{2}}{\overline{\alpha}} \geqslant 0$, тогда выражение для $\overline{c}$ будет следующим:

$$\overline{c} = \frac{\ln\left(\frac{1}{k}\sum\limits_i e^{-\overline{\alpha}c_i+\beta_i-\max\{\beta_i\}+\delta}\right)}{-\overline{\alpha}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{k}\sum\limits_i e^{-\overline{\alpha}\frac{\beta_i-\max\{\beta_i\}+\frac{\delta}{2}}{\overline{\alpha}}+\beta_i-\max\{\beta_i\}+\delta}\right)}{-\overline{\alpha}} =$$
$$= \frac{\ln\left(\frac{1}{k}\sum\limits_i e^{-\frac{\delta}{2}+\delta}\right)}{-\overline{\alpha}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{k}ke^{\frac{\delta}{2}}\right)}{-\overline{\alpha}} = \frac{\delta}{-2\overline{\alpha}} < 0,$$

что нарушает требование неотрицательности $\overline{c}$.

Тем самым мы показали, что требуемое ограничение на $\overline{\beta}$ является необходимым. □

Калибровка гравитационной функции

При переносе понятия усредненной полезности из модели модального расщепления в модель расчета корреспонденций возникает необходимость перекалибровки гравитационной функции. В общем случае калибровка модели требует проведения социологических исследований и анализа статистических данных. Однако во многих практических случаях можно предполагать, что в нашем распоряжении имеются гравитационные функции, откалиброванные под средневзвешенные цены различных способов передвижения. Можно предложить процедуру перекалибровки этих функций при переходе на усреднение методом logsum, примерно сохраняющее прежние коэффициенты расщепления при типовых значениях цен, то есть в основной «рабочей области» применения функций. Мы покажем эту процедуру на примере системы с двумя видами используемого транспорта, например легковой автомобиль и транспорт общего пользования.

Можно заметить, что усреднение методом logsum дает систематическое смещение оценки цены в сторону занижения по сравнению с усреднением весами. В последнем случае усредненная цена всегда лежит между ценами разных способов, и, в частности, при равенстве обобщенных цен усредненная цена будет им равна. Этим свойствам не удовлетворяет формула logsum. Средняя цена в этом случае будет несколько отставать от цен на каждый вид транспорта.

Пусть $c_i = c = \mathrm{const}$. Тогда

$$\overline{c} = \frac{\ln\left(\frac{1}{k}\sum\limits_i e^{-\overline{\alpha}c+(\beta_i-\max\{\beta_i\})}\right)}{-\overline{\alpha}} \leqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{k}\sum\limits_i e^{-\overline{\alpha}c}\right)}{-\overline{\alpha}} = \frac{\ln e^{-\overline{\alpha}c}}{-\overline{\alpha}} = c. \tag{9}$$

Это показывает, что при переходе к новому способу следует ввести поправки к гравитационной функции. Рассмотрим для примера гравитационную функцию следующего простого вида:

$$g(t) = e^{-\gamma C(t)}, \tag{10}$$

где $C(t)$ — некоторая функция цены от времени. В нашем случае будем полагать, что $C(t) = t$. Рассмотрим сеть с двумя видами транспорта — личным и общественным. Положим, что цены (времена) пути из одного района в другой на общественном и легковом транспорте равны. Обозначим t_{car} — время на личном транспорте, t_{pub} — время на общественном транспорте, t_s — средневзвешенное усредненное время, t_l — logsum усредненное время.

Пусть $t_{\mathrm{car}} = t_{\mathrm{pub}}$, тогда

$$t_s = \frac{1}{2}t_{\mathrm{car}} + \frac{1}{2}t_{\mathrm{pub}} = t_{\mathrm{car}}.$$

Отсюда

$$g(t_s) = e^{-\gamma t_{\mathrm{car}}}. \tag{11}$$

В свою очередь, из (6) и (8) имеем

$$t_l = \frac{\ln\left(e^{-\overline{\alpha}t_{\mathrm{car}}} + e^{-\overline{\alpha}t_{\mathrm{pub}}-\beta_{\mathrm{car}}}\right)}{-\overline{\alpha}} = \frac{\ln\left(e^{-\overline{\alpha}t_{\mathrm{car}}} + e^{-\overline{\alpha}t_{\mathrm{car}}-\beta_{\mathrm{car}}}\right)}{-\overline{\alpha}} =$$
$$= \frac{\ln\left[\left(e^{-\overline{\alpha}t_{\mathrm{car}}}\right)\left(1 + e^{-\beta_{\mathrm{car}}}\right)\right]}{-\overline{\alpha}} = \frac{\ln\left(e^{-\overline{\alpha}t_{\mathrm{car}}}\right) + \ln\left(1 + e^{-\beta_{\mathrm{car}}}\right)}{-\overline{\alpha}} = t_{\mathrm{car}} + \frac{\ln\left(1 + e^{-\beta_{\mathrm{car}}}\right)}{-\overline{\alpha}}.$$

Как было сказано выше, коэффициенты β_i определены с точностью до аддитивной постоянной, поэтому при выводе формулы выше принимаем $\beta_{\mathrm{pub}} = 0$. Тогда

$$g(t_l) = e^{-\gamma t_l} = e^{\left(-\gamma t_{\mathrm{car}} + \frac{\gamma \ln\left(1+e^{-\beta_{\mathrm{car}}}\right)}{\overline{\alpha}}\right)} = e^{-\gamma t_{\mathrm{car}}} \cdot e^{\frac{\gamma \ln\left(1+e^{-\beta_{\mathrm{car}}}\right)}{\overline{\alpha}}}. \tag{12}$$

Заметим, что мы можем выразить (12) через (11):

$$g(t_l) = g(t_s) \cdot e^{\frac{\gamma \ln\left(1+e^{-\beta_{\text{car}}}\right)}{\overline{\alpha}}}. \tag{13}$$

Тогда из (13) получаем, что при переносе понятия усредненной полезности из модели модального расщепления в гравитационную модель следует применять калибровочный коэффициент, равный $e^{\frac{\gamma \ln\left(1+e^{-\beta_{\text{car}}}\right)}{-\overline{\alpha}}}$.

Демонстрационные расчеты

Покажем, что переход к методу усреднения logsum дает результаты, более правдоподобно описывающие реальность, чем усреднение с весами, вычисляющимися по формуле

$$s_i = \frac{e^{-\lambda t_i + \mu_i}}{\sum\limits_{j \in I} e^{-\lambda t_j + \mu_j}}. \tag{14}$$

Для этого рассмотрим упрощенную модель федеральной территории Сириуса, где есть вымышленная надземная линия трамвая и одна дорога, по которой могут передвигаться автомобили и автобусы. Схема территории изображена на рис. 1. Корреспонденции представлены в таблице 1. Моделирование осуществляется в программе [TransNet].

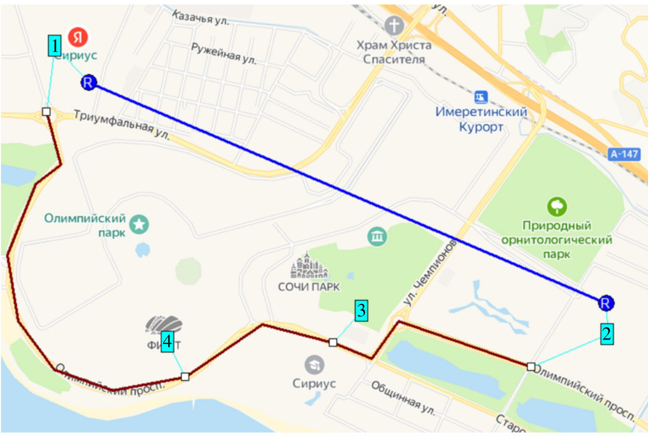

Рис. 1. УДС федеральной территории Сириуса. Синим цветом изображена трамвайная линия, коричневым — автомобильная дорога. Цифрами обозначены центроиды

Таблица 1. Таблица корреспонденций для цели передвижения «дом–работа»

Индекс центроида	1	2	3	4
Дом–работа. Отправление, чел.	3000	3000	6000	6000
Дом–работа. Прибытие, чел.	3000	3000	6000	6000

Исследуется влияние наличия трамвайной линии на среднее время передвижения. Ожидается, что при появлении трамвая средняя скорость должна уменьшиться. При использовании популярных на практике коэффициентов формула для расчета коэффициента отщепления общественного транспорта при «плохом» (t_s^{bad}) и «хорошем» (t_s^{good}) усреднении имеет вид

$$s_{pub} = \frac{\exp\left(-0{,}1t_{pub}\right)}{\exp\left(-0{,}1t_{pub}\right) + \exp\left(-0{,}1t_{car} - 0{,}9\right)}, \tag{15}$$

$$t_s^{bad} = s_{pub} \cdot t_{pub} + \left(1 - s_{pub}\right) \cdot t_{car}, \tag{16}$$

$$t_s^{good} = \frac{\ln\left[\exp\left(-0{,}1t_{pub}\right) + \exp\left(-0{,}1t_{car} - 0{,}9\right) - \ln 2\right]}{-0{,}01}, \tag{17}$$

где t_{pub}, t_{car} — временные затраты на машине и общественном транспорте соответственно.

Таблица 2. Таблица средних времен передвижения

Трамвай	Доступен	Не доступен
t_s^{bad}, с	57,82	56,47
t_s^{good}, с	90,18	90,97

Как следует из таблицы 2, среднее время передвижения при «плохом» усреднении увеличилось, что противоречит интуиции.

Заключение

В данной работе исследовались методы усреднения обобщенных цен передвижений, совершаемых разными способами, в задачах расчета матриц передвижений и в задачах модального выбора. Был предложен способ вычисления обобщенной цены межрайонных передвижений в гравитационной модели с использованием формулы logsum теории дискретного выбора. Были получены оценки на допустимые значения калибровочных параметров модели. Численными расчетами было продемонстрировано, что данный подход имеет преимущества по сравнению с использованием средневзвешенных цен.

Рассмотренная в статье логит-модель неявно подразумевает, что среди путей нет пересечений. Это предположение может быть не выполнено для больших сетей. Более реалистичные допущения рассмотрены в статьях: *C*-логит [Cascetta et al., 1996], логит по размеру пути [Ben-Akiva, Bierlaire, 1999], логит на основе попарных комбинаций [Bekhor, Prashker, 1999; Pravinvongvuth, Chen, 2005], перекрестно-вложенный логит [Bekhor, Prashker, 1999] и обощенный вложенный логит [Bekhor, Prashker, 2001]. Данные модели, насколько известно авторам, не имеют оценок на параметры для интерпретируемости весов, что может быть проделано по аналогии с данной статьей.

Также в статье рассмотрено достаточно сильное предположение для перекалибровки гравитационный функции, поэтому данная процедура требует более общего рассмотрения в дальнейшем.

Список литературы (References)

Вильсон А. Энтропийные методы моделирования сложных систем. — М.: Мир, 1978. — 248 с.

Wilson A. G. Entropy in urban and regional modelling. — Pion Limited, 1970. (Russ. ed.: *Wilson A.* Entropijnye metody modelirovaniya slozhnyx sistem. — Moscow: Mir, 1978. — 248 p.)

Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 11. — С. 3–46.

Shvetsov V. I. Matematicheskoe modelirovanie transportnyx potokov [Mathematical modelling of Transport Flows] // Avtomatika i telemexanika. — 2003. — No. 11. — P. 3–46.

Anderson S. P., Palma A. D., Thisse J.-F. Discrete choice theory of product differentiation. — MIT Press, 1992. — 454 p.

Bekhor S., Prashker J. N. Formulations of extended logit stochastic user equilibrium assignments // Proc. 14th Int. Symp. on Transportation and Traffic Theory, Elsevier, Pergamon. — 1999. — P. 351–372.

Bekhor S., Prashker J. N. Stochastic user equilibrium formulation for generalized nested logit model // Transportation Research Record. — 2001. — Vol. 1752, No. 1. — P. 84–90.

Ben-Akiva M. E., Lerman S. R. Discrete choice analysis: theory and application to travel demand. — MIT Press, 1985. — 424 p.

Ben-Akiva M., Bierlaire M. Discrete choice methods and their applications to short term travel decisions // Handbook of Transportation Science International Series in Operations Research & Management Science / ed. R. W. Hall. — Boston, MA: Springer US, 1999. — P. 5–33.

Boyles S. D., Lownes N. E., Unnikrishnan A. Transportation network analysis // 2022. — Vol. I. — Version 0.90.

Cascetta E., Nuzzolo A., Russo F., Vitetta A. A modified logit route choice model overcoming path overlapping problems. Specification and some calibration results for interurban networks // Proc. Int. Symp. on Transportation and Traffic Theory / ed. J. B. Lesort. — Oxford, UK: Elsevier, 1996. — P. 697–711.

Gasnikova E., Gasnikov A., Kholodov Y., Zukhba A. An evolutionary view on equilibrium models of transport flows // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, No. 4. — P. 858.

Mahajan S., van Ryzin G. J. Retail inventories and consumer choice // Quantitative Models for Supply Chain Management International Series in Operations Research & Management Science. — Boston, MA: Springer US, 1999. — P. 491–551.

McFadden D. Conditional logit analysis of qualitative choice behaviour. — Frontiers in Econometrics: Academic Press New York, 1973.

Ortúzar J. de D., Willumsen L. G. Modelling transport. — John Wiley & Sons, 2011. — 751 p.

Pravinvongvuth Ph. D. Surachet, Chen A. Adaption of the paired combinatorial logit model to the route choice problem // Transportmetrica. — 2005. — Vol. 1. — P. 223–240.

Sheffi Y. Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods. — Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984. — 399 p.

TransNet — Прогноз автомобильных и пассажирских потоков в транспортных сетях на основе математического моделирования — transnet. — [Электронный ресурс]. — URL: https://www.transnetsoft.ru/ (дата обращения: 13.02.2023).

TransNet — Prognoz avtomobilnyx i passazhirskix potokov v transportnyx setyax na osnove matematicheskogo modelirovaniya [TransNet — Automobile and Passenger Flows Forecast in Transportation Networks Based on Mathematicical Modelling] — transnet. — [Electronic resource]. — URL: https://www.transnetsoft.ru/ (date of application: 13.02.2023).