

УДК: 519.6:531.33

Об одной модификации узлового метода характеристик

В. С. Суров

Южно-Уральский государственный университет (нац. исследовательский университет),
Россия, 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, д. 76

E-mail: surovvictor@gmail.com

*Получено 17.01.2022, после доработки — 14.10.2022.
Принято к публикации 13.12.2022.*

Представлен вариант обратного метода характеристик (МОМХ), в алгоритм которого введен дополнительный дробный временной шаг, что позволяет повысить точность вычислений за счет более точной аппроксимации характеристик. Приведены расчетные формулы модифицированного метода для уравнений односкоростной модели газожидкостной смеси, с помощью которого рассчитаны одномерные, а также плоские тестовые задачи, имеющие автомобильные решения. При решении многомерных задач исходная система уравнений расщепляется на ряд одномерных подсистем, для расчета которых применяется обратный метод характеристик с дробным временным шагом. С использованием предложенного метода рассчитаны: одномерная задача распада произвольного разрыва в дисперсной среде; двумерная задача взаимодействия однородного газожидкостного потока с препятствием с присоединенным ударным скачком, а также течение с центрированной волной разрежения. Результаты численных расчетов этих задач сопоставлены с автомобильными решениями и отмечено их удовлетворительное совпадение. На примере задачи Римана с ударным скачком приведено сравнение с рядом консервативных, неконсервативных первого и повышенного порядков точности схем, из которого, в частности, следует, что представленный метод расчета вполне конкурентоспособен. Несмотря на то что применение МОМХ требует в разы больших временных затрат по сравнению с оригинальным обратным методом характеристик (ОМХ), вычисления можно проводить с увеличенным временным шагом и в ряде случаев получать более точные результаты. Отмечено, что метод с дробным временным шагом имеет преимущества в случаях, когда характеристики системы криволинейные. По этой причине для уравнений Эйлера целесообразно использовать ОМХ вместо МОМХ, поскольку в этом случае характеристики в пределах временного шага мало отличаются от прямых линий.

Ключевые слова: гиперболические модели, обратный метод характеристик, многомерный узловой метод характеристик

UDC: 519.6:531.33

About one version of the nodal method of characteristics

V. S. Surov

South Ural State University (National Research University),
76 pr. Lenina, Chelyabinsk, 454080, Russia

E-mail: surovvictor@gmail.com

*Received 17.01.2022, after completion — 14.10.2022.
Accepted for publication 13.12.2022.*

A variant of the inverse method of characteristics (IMH) is presented, in whose algorithm an additional fractional time step is introduced, which makes it possible to increase the accuracy of calculations due to a more accurate approximation of the characteristics. The calculation formulas of the modified method for the equations of the one-velocity model of a gas-liquid mixture are given, with the help of which one-dimensional and also flat test problems with self-similar solutions are calculated. When solving multidimensional problems, the original system of equations is split into a number of one-dimensional subsystems, for the calculation of which the inverse method of characteristics with a fractional time step is used. Using the proposed method, the following were calculated: the one-dimensional problem of the decay of an arbitrary discontinuity in a dispersed medium; a two-dimensional problem of the interaction of a homogeneous gas-liquid flow with an obstacle with an attached shock wave, as well as a flow with a centered rarefaction wave. The results of numerical calculations of these problems are compared with self-similar solutions and their satisfactory agreement is noted. On the example of the Riemann problem with a shock wave, a comparison is made with a number of conservative, non-conservative, first and higher orders of accuracy schemes, from which, in particular, it follows that the presented calculation method, i. e. MIMC, quite competitive. Despite the fact that the application of MIMC requires many times more time than the original inverse method of characteristics (IMC), calculations can be carried out with an increased time step and, in some cases, more accurate results can be obtained. It is noted that the method with a fractional time step has advantages over the IMC in cases where the characteristics of the system are significantly curvilinear. For this reason, the use of MIMC, for example, for the Euler equations is inappropriate, since for the latter the characteristics within the time step differ little from straight lines.

Keywords: hyperbolic models, reverse characteristic method, multidimensional nodal characteristic method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 1, pp. 29–44 (Russian).

1. Введение

Метод характеристик (МХ) широко используется в вычислительной практике при численном решении задач из таких предметных областей, как газовая динамика [Parpia, Kentzer, Williams, 1988], электромагнетизм [Sanchez-Alegria, Moreno, Loo-Yau, 2019], динамика популяций [Pilon, Viskanta, 2003], ядерная энергетика [Eklund et al., 2015], термоупругость [Мартыненко, Босьяков, 2002] и др., которые описываются гиперболическими системами уравнений. Суть МХ состоит в переходе от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые записываются вдоль характеристических направлений [Русанов, 1963]. Из литературы известны различные варианты МХ, описанные в монографии [Магомедов, Холодов, 1988]. В работе [Сузов, 2021b] предложен вариант многомерного узлового метода характеристик (МУМХ), основанный на расщеплении исходной системы уравнений по пространственным направлениям на ряд одномерных подсистем с их последующим интегрированием с помощью обратного МХ (ОМХ). В данной работе в расчетах также используется развитый в [Сузов, 2021b] подход, но вместо оригинального ОМХ применяется описанный ниже модифицированный ОМХ (МОМХ) с дополнительным дробным временным шагом, использование которого проиллюстрируем на примере гиперболической модели односкоростной бинарной смеси идеального газа со второй несжимаемой фракцией, предназначенной для описания течений запыленного газа или пузырьковой жидкости [Сузов, 1998]. Эта модель также применяется в многожидкостной гидродинамике для совместного расчета движения жидкости и газа с автоматической локализацией контактных поверхностей [Сузов, 2022b]. Двумерные уравнения этой модели смеси имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= g_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= g_y, & \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где p — давление; u , v и g_x , g_y — проекции вектора скорости и ускорения свободного падения в направлении осей Ox и Oy ; α — объемная доля несжимаемой фракции в смеси; $\rho = (1 - \alpha)\rho_g^0 + \alpha\rho_s^0$ — плотность смеси; ρ_g^0 и ρ_s^0 — истинные (физические) плотности газа и жидкости; $c^2 = \frac{\gamma p}{(1-\alpha)\rho}$ — квадрат скорости звука в смеси; γ — показатель адиабаты газа. Отметим также, что применение использованного подхода не ограничено рамками рассматриваемой в работе модели. Он может быть применен, например, в расчетах течений гетерогенных сред с фазовыми превращениями [Сузов, 2022a], при вычислении упругопластических деформаций твердого тела в рамках модели Прандтля–Рейса [Сузов, 2021a] и в других задачах.

2. Алгоритм МУМХ

При интегрировании системы (1) использовался МУМХ, основанный на расщеплении исходной системы уравнений на ряд одномерных подсистем [Сузов, 2021b]. Рассмотрим малый временной интервал, а именно шаг интегрирования по времени системы (1). Изменения параметров, которые происходят за этот малый промежуток времени, можно найти, суммируя локальные изменения, которые происходят по отдельным координатным направлениям. Иными словами,

для нахождения приближенного решения системы (1) за указанный промежуток времени сначала решается подсистема

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= g_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = g_y, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

получающаяся из (1), в которой оставлены слагаемые, изменяющие параметры течения только в направлении оси Ox . После интегрирования (2) с использованием МОМХ, базируясь на найденном распределении определяющих переменных, решается следующая подсистема:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= g_y, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} + v \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

в которой учитываются изменения только вдоль координатного направления Oy .

Характеристическое уравнение системы (2) имеет корни $\xi_1 = u - c$, $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = u$, $\xi_5 = u + c$. Соотношения совместности вдоль характеристических направлений $\frac{dx}{dt} = u \pm c$ имеют вид

$$\rho c du \pm dp = \frac{\rho c g_x}{u \pm c} dt, \quad (4)$$

а на траекторной характеристике $\frac{dx}{dt} = u$ выполняются равенства

$$dp - c^2 d\rho = 0, \quad dv - g_y dt = 0, \quad d\alpha - \frac{\alpha}{\rho} d\rho = 0, \quad (5)$$

которые непосредственно следуют из подсистемы (2).

Характеристическое уравнение подсистемы (3) имеет корни $\zeta_1 = v - c$, $\zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = v$, $\zeta_5 = v + c$. Соотношения совместности вдоль характеристических направлений $\frac{dy}{dt} = v \pm c$ имеют вид

$$\rho c dv \pm dp = \frac{\rho c g_y}{v \pm c} dt, \quad (6)$$

а на траекторной характеристике $\frac{dy}{dt} = v$ выполняются равенства

$$dp - c^2 d\rho = 0, \quad du - g_x dt = 0, \quad d\alpha - \frac{\alpha}{\rho} d\rho = 0. \quad (7)$$

Для двумерного варианта МУМХ процесс вычислений при переходе с временного шага t^n на t^{n+1} состоит из двух тактов. На первом узлы расчетной области перебираются вдоль оси Ox и в них по процедуре МОМХ определяются промежуточные значения параметров $(\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\rho}, \bar{\alpha})^{n+1}$. На втором такте на основе данных первого такта определяются окончательные величины $(p, u, v, \rho, \alpha)^{n+1}$ путем применения процедуры МОМХ в направлении оси Oy .

3. Схема MOMX с дробным временным шагом

Опишем процедуру MOMX для первого промежуточного такта. Расчет параметров смеси на втором такте проводится аналогично. Для численного интегрирования системы (2) достаточно определить значения искомых величин $(\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\rho}, \bar{\alpha})$ в узле A (рис. 1) по их известным значениям в узлах, находящихся на n -м временном слое. В отличие от ранее использованного способа расчета из работы [Сузов, 2021b], вводится дополнительный полуцелый временной слой. Для решения задачи применяется ниже описанная итерационная процедура. Предполагается, что на нулевой внешней итерации ($\sigma = 0$) искомые переменные в точке (x_k, t^{n+1}) совпадают с их значениями в узле (x_k, t^n) . В этом случае прямые линии с характеристическими направлениями $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dx}{dt} = u \pm c$ аппроксимируются выражениями

$$x_k - x_C^{(\sigma)} = u^{(\sigma)} \frac{\Delta t}{2}, \quad x_k - x_B^{(\sigma)} = (u + c)^{(\sigma)} \frac{\Delta t}{2}, \quad x_k - x_D^{(\sigma)} = (u - c)^{(\sigma)} \frac{\Delta t}{2}.$$

Точки пересечения этих прямых с полуцелым временным слоем определяются равенствами

$$x_B^{(\sigma)} = x_k - (u + c)^{(\sigma)} \frac{\Delta t}{2}, \quad x_C^{(\sigma)} = x_k - u^{(\sigma)} \frac{\Delta t}{2}, \quad x_D^{(\sigma)} = x_k - (u - c)^{(\sigma)} \frac{\Delta t}{2}. \quad (8)$$

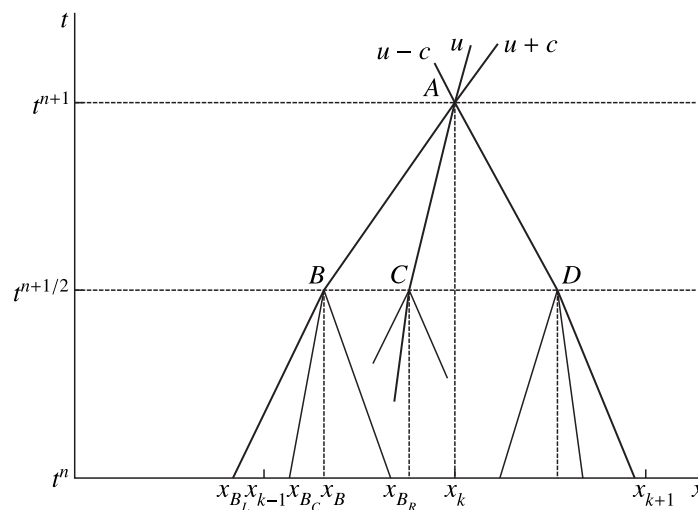


Рис. 1. Схема расчета параметров в точке A на первом такте по данным с t^n -го временного слоя

Рассмотрим схему расчета параметров в точке r , где через r обозначены точки B , C и D . На нулевой внутренней итерации ($\tau_r = 0$) считаем, что искомые переменные в точке $(x_r, t^{n+1/2})$ совпадают с их значениями в точке (x_r, t^n) . Значения переменных в этих точках определяются линейной интерполяцией по известным значениям из ближайших к ним узлов на t^n -м временном слое. Из точки r , выпустив из них характеристики, найдем точки их пересечения с t^n -м временным слоем, которые определяются равенствами

$$x_{r_L}^{(\tau_r)} = x_r - (u + c)_r^{(\tau_r)} \frac{\Delta t}{2}, \quad x_{r_C}^{(\tau_r)} = x_r - u_r^{(\tau_r)} \frac{\Delta t}{2}, \quad x_{r_R}^{(\tau_r)} = x_r - (u - c)_r^{(\tau_r)} \frac{\Delta t}{2}. \quad (9)$$

Значения переменных (ρ, u, v, p, α) в точках $(x_{r_L}, x_{r_C}, x_{r_R})^{(0)}$ находятся линейной интерполяцией по известным значениям из ближайших к ним узлов на t^n -м временном слое. Перепишем

дифференциальные соотношения (4) и (5) в конечноразностном виде как

$$\begin{aligned}
(\rho c)_{r_L}^{(\tau_r)} (\tilde{u}_r^{(\tau_r+1)} - u_{r_L}^{(\tau_r)}) + \tilde{p}_r^{(\tau_r+1)} - p_{r_L}^{(\tau_r)} &= \left(\frac{\rho c}{u+c} \right)_{r_L}^{(\tau_r)} \frac{g_x \Delta t}{2}, \\
(\rho c)_{r_R}^{(\tau_r)} (\tilde{u}_r^{(\tau_r+1)} - u_{r_R}^{(\tau_r)}) - (\tilde{p}_r^{(\tau_r+1)} - p_{r_R}^{(\tau_r)}) &= \left(\frac{\rho c}{u-c} \right)_{r_R}^{(\tau_r)} \frac{g_x \Delta t}{2}, \\
\tilde{v}_r^{(\tau_r+1)} - v_{r_C}^{(\tau_r)} - \frac{g_y \Delta t}{2} &= 0, \\
\tilde{p}_r^{(\tau_r+1)} - p_{r_C}^{(\tau_r)} - (c_{r_C}^{(\tau_r)})^2 (\tilde{\rho}_r^{(\tau_r+1)} - \rho_{r_C}^{(\tau_r)}) &= 0, \\
\rho_{r_C}^{(\tau_r)} (\tilde{\alpha}_r^{(\tau_r+1)} - \alpha_{r_C}^{(\tau_r)}) - \alpha_{r_C}^{(\tau_r)} (\tilde{\rho}_r^{(\tau_r+1)} - \rho_{r_C}^{(\tau_r)}) &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Решая подсистемы (10) при $\tau_r = 0$ относительно переменных $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\alpha})_r^{(1)}$, найдем уточненные значения искомым функций в точках B, C и D . Затем по этим данным из выражений (9) вычисляются новые координаты $(x_{r_L}, x_{r_C}, x_{r_R})^{(1)}$, которые в свою очередь используются для определения переменных $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\alpha})_r^{(2)}$ из (10), где необходимо положить $\tau_r = 1$. Описанные итерационные процессы для точек B, C и D продолжаются вплоть до сходимости. При невязке 10^{-7} требуется, как правило, 5–7 итераций. Затем на основе данных, полученных для точек B, C и D , из подсистемы

$$\begin{aligned}
(\rho c)_B^{(\sigma)} (\tilde{u}_A^{(\sigma+1)} - u_B^{(\sigma)}) + \tilde{p}_A^{(\sigma+1)} - p_B^{(\sigma)} &= \left(\frac{\rho c}{u+c} \right)_B^{(\sigma)} \frac{g_x \Delta t}{2}, \\
(\rho c)_D^{(\sigma)} (\tilde{u}_A^{(\sigma+1)} - u_D^{(\sigma)}) - (\tilde{p}_A^{(\sigma+1)} - p_D^{(\sigma)}) &= \left(\frac{\rho c}{u-c} \right)_D^{(\sigma)} \frac{g_x \Delta t}{2}, \\
\tilde{v}_A^{(\sigma+1)} - v_C^{(\sigma)} - \frac{g_y \Delta t}{2} &= 0, \\
\tilde{p}_A^{(\sigma+1)} - p_C^{(\sigma)} - (c_C^{(\sigma)})^2 (\tilde{\rho}_A^{(\sigma+1)} - \rho_C^{(\sigma)}) &= 0, \\
\rho_C^{(\sigma)} (\tilde{\alpha}_A^{(\sigma+1)} - \alpha_C^{(\sigma)}) - \alpha_C^{(\sigma)} (\tilde{\rho}_A^{(\sigma+1)} - \rho_C^{(\sigma)}) &= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

находим уточненные значения параметров $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\alpha})_r^{(1)}$ в точке A . Далее вычисления повторяются. Из точки A на основе новых данных в этом узле выпускаются характеристики до их пересечения с прямой $t = t^{n+1/2}$, что дает возможность определить новые положения точек B, C и D . Затем из подсистем (10) находят уточненные значения параметров в этих точках, а по ним из (11) определяются новые значения определяющих величин смеси $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\alpha})_r^{(2)}$ в точке A . И так далее. Итерации продолжаются до сходимости.

Аналогичные формулы используются и на втором такте в направлении координатной оси Oy , позволяющие определить окончательные значения искомым параметров $(\rho, u, v, p, \alpha)^{n+1}$ в узлах расчетной области, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
(\tilde{\rho} \tilde{c})_B^{(\omega)} (\tilde{v}_A^{(\omega+1)} - \tilde{v}_B^{(\omega)}) + p_A^{(\omega+1)} - \tilde{p}_B^{(\omega)} &= \left(\frac{\tilde{\rho} \tilde{c}}{\tilde{v} + \tilde{c}} \right)_B^{(\omega)} \frac{g_y \Delta t}{2}, \\
(\tilde{\rho} \tilde{c})_D^{(\omega)} (\tilde{v}_A^{(\omega+1)} - \tilde{v}_D^{(\omega)}) - (p_A^{(\omega+1)} - \tilde{p}_D^{(\omega)}) &= \left(\frac{\tilde{\rho} \tilde{c}}{\tilde{v} - \tilde{c}} \right)_D^{(\omega)} \frac{g_y \Delta t}{2}, \\
u_A^{(\omega+1)} - \tilde{u}_C^{(\omega)} - \frac{g_x \Delta t}{2} &= 0, \\
p_A^{(\omega+1)} - \tilde{p}_C^{(\omega)} - (\tilde{c}_C^{(\omega)})^2 [p_A^{(\omega+1)} - \tilde{\rho}_C^{(\omega)}] &= 0, \\
\tilde{\rho}_C^{(\omega)} (\alpha_A^{(\omega+1)} - \tilde{\alpha}_C^{(\omega)}) - \alpha_C^{(\omega)} (p_A^{(\omega+1)} - \tilde{\rho}_C^{(\omega)}) &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

и

$$\begin{aligned}
y_{s_L}^{(\mu_s)} &= y_s - (\bar{v} + \bar{c})_s^{(\mu_s)} \frac{\Delta t}{2}, & y_{s_C}^{(\mu_s)} &= y_s - \bar{v}_s^{(\mu_s)} \frac{\Delta t}{2}, & y_{s_R}^{(\mu_s)} &= y_s - (\bar{v} - \bar{c})_s^{(\mu_s)} \frac{\Delta t}{2}, \\
(\bar{\rho} \bar{c})_{s_L}^{(\mu_s)} (v_s^{(\mu_{s+1})} - \bar{v}_{s_L}^{(\mu_s)}) + p_s^{(\mu_{s+1})} - \bar{p}_{s_L}^{(\mu_s)} &= \left(\frac{\bar{\rho} \bar{c}}{\bar{v} + \bar{c}} \right)_{s_L}^{(\mu_s)} \frac{g_y \Delta t}{2}, \\
(\bar{\rho} \bar{c})_{s_R}^{(\mu_s)} (v_s^{(\mu_{s+1})} - \bar{v}_{s_R}^{(\mu_s)}) - (p_s^{(\mu_{s+1})} - \bar{p}_{s_R}^{(\mu_s)}) &= \left(\frac{\bar{\rho} \bar{c}}{\bar{v} - \bar{c}} \right)_{s_R}^{(\mu_s)} \frac{g_y \Delta t}{2}, \\
u_s^{(\mu_{s+1})} - \bar{u}_{s_C}^{(\mu_s)} - \frac{g_x \Delta t}{2} = 0, & p_s^{(\mu_{s+1})} - \bar{p}_{s_C}^{(\mu_s)} - (\bar{c}_{s_C}^{(\mu_s)})^2 (p_s^{(\mu_{s+1})} - \bar{p}_{s_C}^{(\mu_s)}) = 0, \\
\bar{\rho}_{s_C}^{(\mu_s)} (\alpha_s^{(\mu_{s+1})} - \bar{\alpha}_{s_C}^{(\mu_s)}) - \bar{\alpha}_{s_C}^{(\mu_s)} (\rho_s^{(\mu_{s+1})} - \bar{\rho}_{s_C}^{(\mu_s)}) &= 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

где μ и ω — внутренние и внешние номера итераций, а индекс s принимает значения B , C и D (см. рис. 1, в котором необходимо заменить ось Ox на ось Oy). Выписанные выше соотношения (12)–(13) есть конечноразностные представления формул (6)–(7).

Отметим, что для нелинейных задач характеристики имеют криволинейный вид. Повышение точности вычислений при использовании МОМХ обусловлено тем, что интегрирование соотношений совместности проводится не по прямой линии, как в оригинальном ОМХ, а вдоль ломаной линии, более точно аппроксимирующей характеристику (рис. 2).

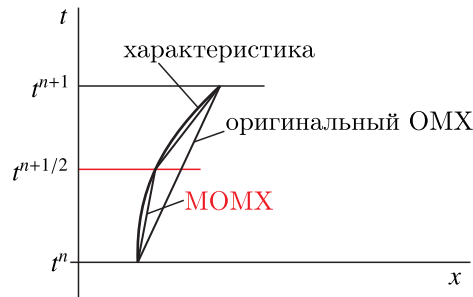


Рис. 2. Аппроксимация характеристики в рамках ОМХ и МОМХ

4. Результаты численного моделирования

В качестве первого примера применения описанного выше алгоритма МОМХ в сравнении с ОМХ рассчитана одномерная задача распада произвольного разрыва в газожидкостной смеси с двумя волнами разрежения (ВР). Параметры смеси до распада следующие. Слева от диафрагмы при $x < 0$ параметры смеси следующие: $p_0 = 0,1$ МПа, $u_0 = -60$ м/с, $\alpha_0 = 0,1$. Справа от диафрагмы, т.е. при $x > 0$, параметры среды те же, что и слева, за исключением скорости, которая равна $u_0 = 60$ м/с. Характеристики составляющих смесь фракций следующие: $\gamma = 1,4$, $\rho_{g0}^0 = 1,19$ кг/м³, $\rho_s^0 = 1000$ кг/м³. Гравитационные силы не учитывались. В момент времени $t = 0$ диафрагма мгновенно удаляется, при этом реализуется режим течения с двумя волнами ВР, перемещающимися вправо и влево от контактной границы.

На рис. 3 приведены данные расчетов распада на момент времени 15 мс, полученные с использованием ОМХ и МОМХ на сетке из 400 узлов с шагом $\Delta x = 0,01$ м. Графики, рассчитанные с помощью МОМХ на такой сетке, с точностью графического представления совпадают с точным решением [Суров, 2008]. Временной шаг для МОМХ выбирался равным $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-4}$ с, расчет же с использованием ОМХ выполнен с шагом $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-4}$ с, поскольку вычисления с бóльшим шагом не дают устойчивых решений. Время счета в рамках ОМХ составило 1,6 с, а с использованием МОМХ — 4,9 с. Из представленных данных видно, что ОМХ дает большую

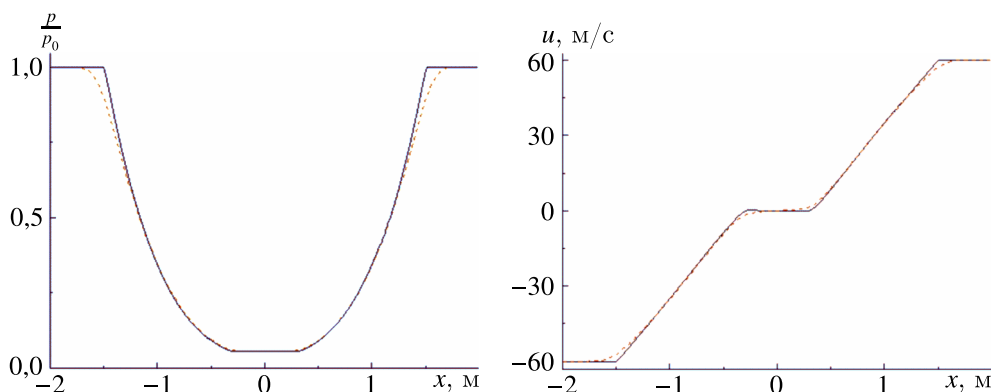


Рис. 3. Распределение параметров к моменту $t = 15$ мс для тестовой одномерной задачи с двумя ВР в газожидкостной смеси: сплошные кривые – MOMX (400 узлов), штриховые – OMX (400 узлов)

погрешность по сравнению с MOMX. Расхождения в результатах вычислений, выполненных с использованием OMX и MOMX, обусловлены криволинейностью характеристик, что связано с нелинейной зависимостью скорости звука от α . Если рассчитать эту же задачу распада разрыва, но в газе, положив $\alpha_0 = 10^{-12}$, то расхождений в данных расчетов, полученных с помощью OMX и MOMX, практически нет, поскольку в этом случае характеристики в пределах временного шага мало отличаются от прямых линий.

Сопоставим данные расчетов предыдущей задачи с полученными результатами по схеме Куранта – Иаксона – Рис (КИР) [Куликовский, Погорелов, Семёнов, 2012], имеющей первый порядок точности по времени и по пространственной переменным, детали которой применительно к системе (1) приведены ниже:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} + A_i^n \frac{\mathbf{U}_{i+1/2}^n - \mathbf{U}_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0,$$

где

$$\mathbf{U}_{m+1/2}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_m^n + \mathbf{U}_{m+1}^n) + \frac{1}{2} \{ \Omega^{-1} [\text{sign}(\Lambda)] \Omega \}_m^n (\mathbf{U}_m^n - \mathbf{U}_{m+1}^n), \quad m = i, i - 1.$$

Здесь

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \rho c^2 & u & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Матрицы Ω , Λ , Ω^{-1} определяются в соответствии с выражениями

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\rho c & 1 & 0 \\ -c^2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha} \\ 0 & \rho c & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} u - c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u + c \end{pmatrix}, \quad \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c^2} & -\frac{1}{c^2} & 0 & \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{1}{2\rho c} & 0 & 0 & \frac{1}{2\rho c} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha-1}{2\rho c^2} & \frac{1-\alpha}{\rho c^2} & 1-\alpha & \frac{\alpha-1}{2\rho c^2} \end{pmatrix}.$$

Соответствующие результаты вычислений по распределению давления и скорости показаны на рис. 4. При использовании КИР устойчивый счет возможен лишь при временном шаге, не превышающем $\Delta t = 0,4 \cdot 10^{-4}$ с, что даже меньше, чем в случае применения OMX. Представленные на рис. 4 данные, выполненные с временным шагом $\Delta t = 0,4 \cdot 10^{-4}$ с, свидетельствуют о том, что точность алгоритма MOMX на гладких решениях выше, чем у схемы КИР.

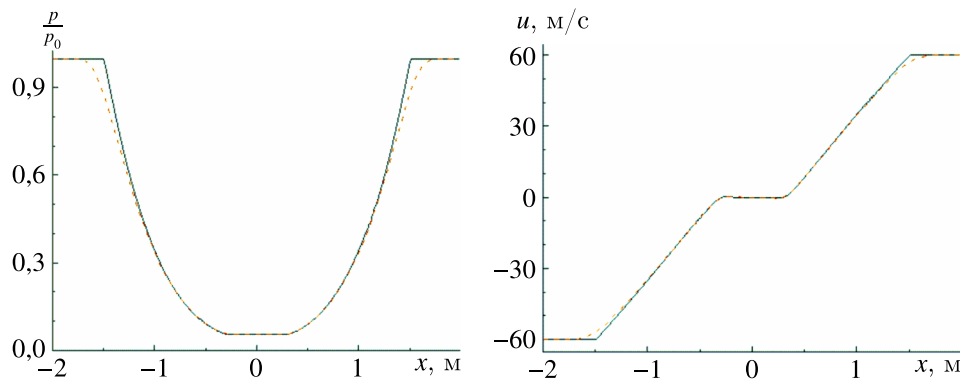


Рис. 4. Распределение параметров к моменту $t = 15$ мс для тестовой задачи с двумя ВР в газожидкостной смеси: сплошные кривые — MOMX (400 узлов), штриховые — КИР (400 узлов)

В качестве следующего теста рассмотрим одномерную задачу о распаде произвольного разрыва в газожидкостной смеси с ВР и ударной волной (УВ). Параметры смеси до распада разрыва следующие: слева от диафрагмы при $x < 0$ давление полагалось равным 0,5 МПа, $u_0 = 0$, $\alpha_0 = 0,1$; справа от диафрагмы, т.е. при $x > 0$, параметры среды те же, что и слева, за исключением давления, которое равнялось $p_0 = 0,1$ МПа. Характеристики составляющих смесь фракций те же, что и в предыдущих тестах. Силы гравитации не учитывались. В момент времени $t = 0$ диафрагма мгновенно удаляется, при этом реализуется течение с УВ, движущейся вправо от контактной границы и ВР, перемещающейся влево.

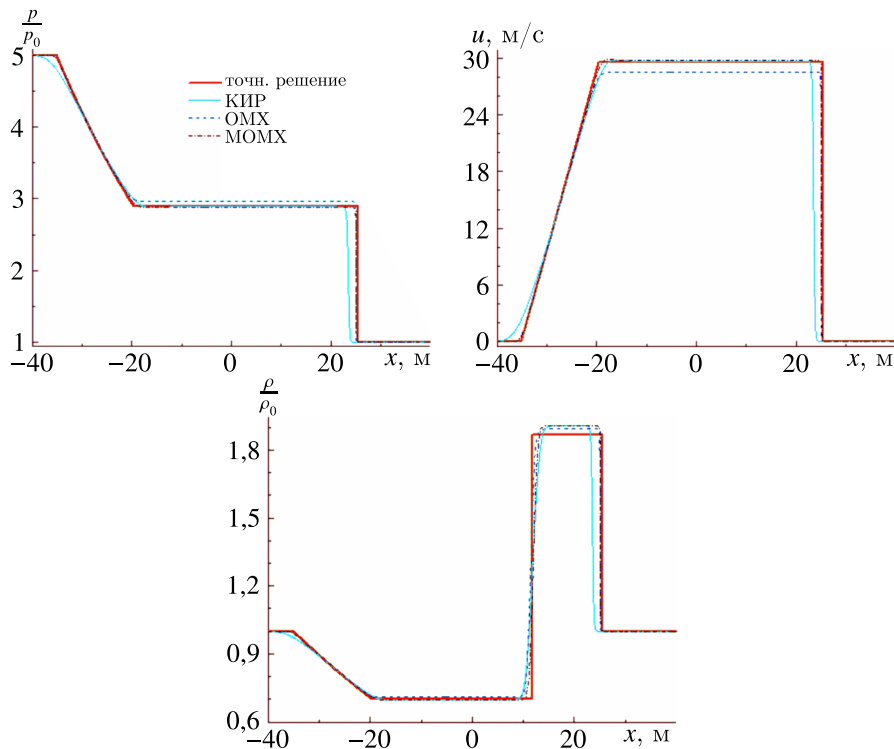


Рис. 5. Распределение параметров к моменту времени $t = 0,4$ с для тестовой одномерной задачи с УВ и ВР в газожидкостной смеси при использовании различных схем

На рис. 5 результаты расчетов к моменту времени $t = 0,4$ с, полученные с использованием OMX и MOMX, сопоставлены с точным решением задачи Римана из [Суров, 2008], а также

с данными, рассчитанными с помощью неконсервативного метода КИР [Суков, 2009]. Во всех расчетах использовалась равномерная сетка из 2000 узловых точек, шаг по времени полагался постоянным и равным $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-4}$ с. Из данных на рис. 5 видно, что при использовании неконсервативной схемы КИР скорость перемещения ударного скачка оказывается меньше «точного» значения. Заметим, что этого недостатка лишены ОМХ и МОМХ, несмотря на то что их алгоритмы также построены на уравнениях недивергентного вида. Из этого же рисунка также видно, что МОМХ дает более точные результаты по уровню давления и скорости смеси за фронтом ударного скачка по сравнению с оригинальным ОМХ. Возможность расчета ударных скачков в рамках характеристического подхода, по-видимому, обеспечивается схемной вязкостью метода.

Известно, что при использовании консервативных методов расчета отмеченный выше недостаток, связанный с заниженной скоростью ударного скачка, может быть исправлен. Так, если ввести вектор $\mathbf{V} = (\rho, \rho u, \rho e, \alpha_g)^T$, где T – оператор транспонирования, $\alpha_g = 1 - \alpha$ – объемная доля газовой фракции, то определяющая одномерная система уравнений (1) с учетом уравнения состояния примет дивергентный вид:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{\Pi}(\mathbf{V})}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (p + \rho e)u \\ -(1 - \alpha_g)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ \frac{\gamma-1}{V_4} \left[V_3 - (1 - V_4)Z - \frac{V_2^2}{2V_1} \right] + \frac{V_2^2}{V_1} \\ \frac{V_2}{V_1} \left\{ V_3 + \frac{\gamma-1}{V_4} \left[V_3 - (1 - V_4)Z - \frac{V_2^2}{2V_1} \right] \right\} \\ -\frac{V_2(1-V_4)}{V_1} \end{pmatrix}, \quad Z = \rho_s^0 \varepsilon_s = \text{const.}$$

Здесь ε_s – удельная внутренняя энергия несжимаемой фракции смеси, которая полагается неизменной, поскольку в модели не учитывается межфракционный теплообмен. Конечно-объемная схема первого порядка точности типа Годунова для системы в дивергентной форме (14) имеет вид

$$\frac{\mathbf{V}_i^{k+1} - \mathbf{V}_i^k}{\Delta t} + \frac{\mathbf{\Pi}_{i+1/2}^k - \mathbf{\Pi}_{i-1/2}^k}{\Delta x} = 0. \quad (15)$$

При расчете потоков через грани ячеек использовался римановский решатель Лакса – Фридрихса:

$$\mathbf{\Pi}_{l-1/2}^k = \frac{1}{2} (\mathbf{\Pi}_{l-1}^k + \mathbf{\Pi}_l^k) + \frac{1}{2} \left(\max_p(|\lambda_p|) \right)_{l-1/2}^k (\mathbf{V}_{l-1}^k - \mathbf{V}_l^k) = 0 \quad (l = i, i + 1),$$

где λ_p – собственные значения системы. Из данных на рис. 6 видно, что при использовании схемы (15) скорость перемещения УВ в точности соответствует «точному» значению. Контактный же разрыв «размазывается» на большее число счетных интервалов по сравнению с тем, что дают ОМХ и МОМХ.

На рис. 7 представлены результаты расчетов рассмотренной выше задачи, полученные с помощью консервативной схемы второго порядка точности Лакса – Вендроффа [Суков, 2009]:

$$\mathbf{V}_i^{k+1} = \mathbf{V}_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\mathbf{\Pi}_{i+1}^k - \mathbf{\Pi}_{i-1}^k}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[H_{i+1/2}^k (\mathbf{\Pi}_{i+1}^k - \mathbf{\Pi}_i^k) - H_{i-1/2}^k (\mathbf{\Pi}_i^k - \mathbf{\Pi}_{i-1}^k) \right], \quad (16)$$

где H – матрица Якоби $\left(H_{ij} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial V_j} \right)$. Обращает на себя внимание почти полное совпадение численного решения с точным, за исключением наличия в численном расчете пульсаций значений параметров перед контактными разрывом и ударным фронтом. Заметим, что для подавления

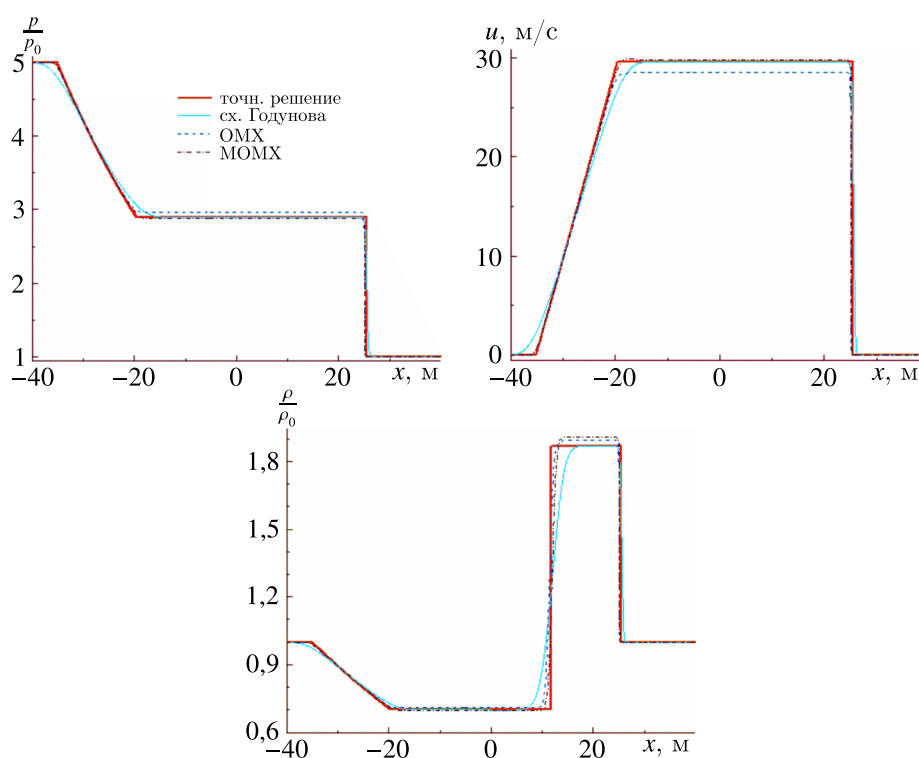


Рис. 6. Распределение параметров к моменту $t = 0,4$ с для тестовой одномерной задачи с УВ и ВР в газожидкостной смеси при использовании различных схем

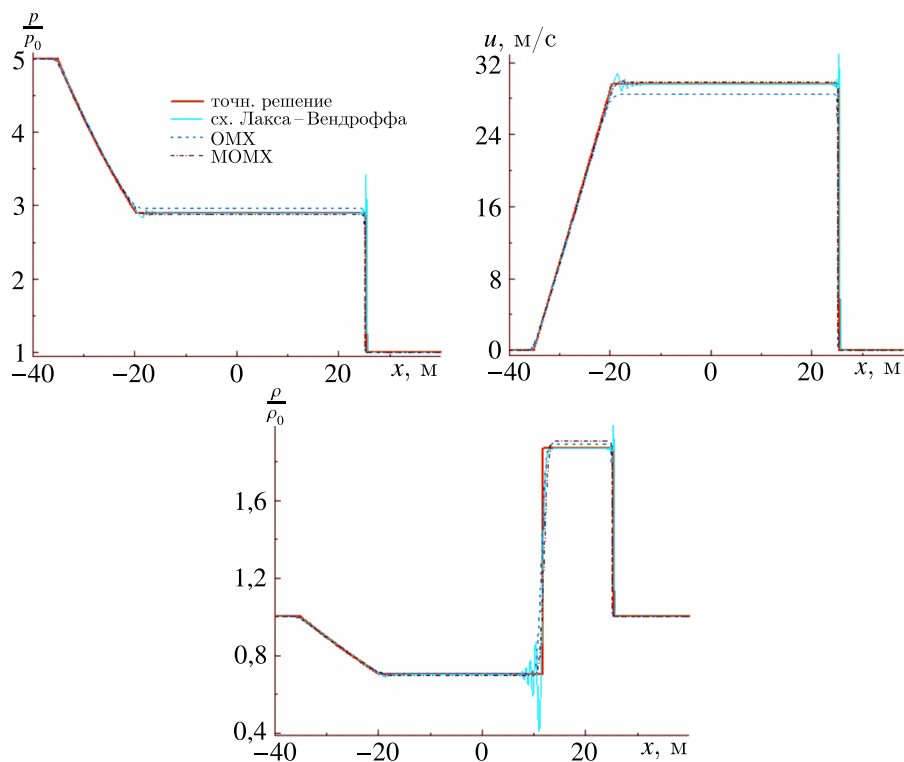


Рис. 7. Распределение параметров к моменту $t = 0,4$ с для тестовой одномерной задачи с УВ и ВР в газожидкостной смеси

«паразитных» высокочастотных осцилляций в решении при использовании схемы (16) в алгоритм расчета могут быть введены различного рода ограничители, или «лимитеры» [Куликовский, Погорелов, Семёнов, 2012], или «сглаживающие» операторы [Головизнин, Жмакин, Фурсенко, 1982].

В качестве следующей автомодельной задачи рассмотрено сверхзвуковое натекание под углом δ к горизонту однородного дисперсного потока на твердую стенку BC (рис. 8, *a*). На остальных границах расчетной области AB , CD , DE и EA ставились мягкие граничные условия, через которые смесь может свободно втекать или вытекать.

В случае когда угол $\delta > 0$, реализуется течение с центрированной ВР, параметры которой могут быть найдены из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\xi} &= -\frac{\rho [u(v - u\xi) + c^2\xi]}{(v - u\xi)^2 + \frac{c^2(1+\xi^2)}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\rho c^2}{p} - 1 \right)} \equiv \Omega, \\ \frac{dp}{d\xi} &= c^2\Omega, \quad \frac{du}{d\xi} = \frac{(v - u\xi)\xi}{\rho(1 + \xi^2)}\Omega, \\ \frac{dv}{d\xi} &= -\frac{(v - u\xi)}{\rho(1 + \xi^2)}\Omega, \quad \frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{\alpha}{\rho}\Omega, \end{aligned} \quad (17)$$

получающейся из системы (1) без учета сил гравитации, после введения автомодельной переменной $\xi = \frac{y}{x}$ [Сузов, 2007]. Система (17) интегрировалась от $\xi = \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}}$ до такого значения $\xi = \xi_1$, при котором поток направлен под углом $\delta = \arctg\left(\frac{|v|}{u}\right)$ к оси Ox . Здесь $M_0 = \frac{u_0}{c_0}$ — число Маха в невозмущенном потоке, $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{(1-\alpha_0)\rho_0}}$ — скорость звука в невозмущенной смеси.

На рис. 8, *b* сплошной кривой отмечена зависимость относительного давления, полученная из системы (17) при $p_0 = 0,1$ МПа, $\alpha = 0,02$, $\delta = 3^\circ$ для водно-воздушной смеси. Точками на этом рисунке отмечены относительные давления вблизи твердой стенки, рассчитанные описанным выше методом МУМХ по достижении режима установившегося течения на сетке из 500×500 узлов при числе Куранта 1,19, которые, как видно из рисунка, совпадают с автомодельным решением.

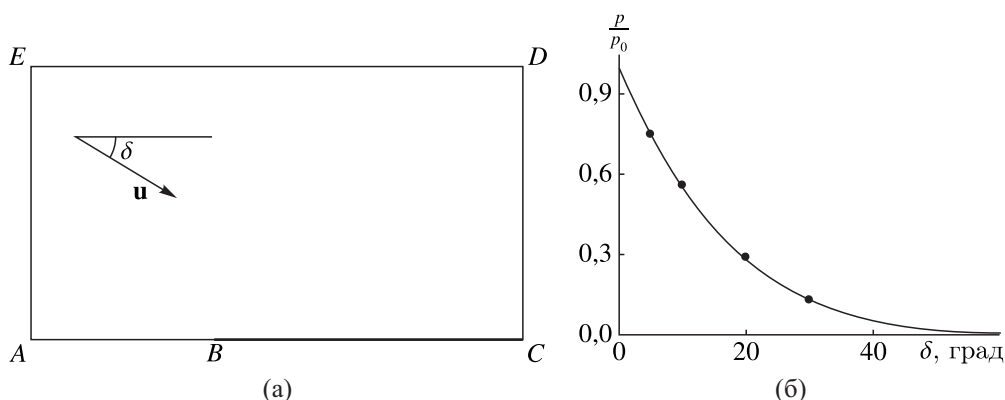


Рис. 8. Расчетная область (а). Зависимость $\frac{p}{p_0}$ у преграды от δ к моменту времени $t = 0,03$ с для течения с центрированной волной разрежения (б). Точки — данные численных расчетов

При угле $\delta < 0$ реализуется режим с присоединенным ударным скачком (с углом наклона β), параметры течения за которым, как и сам угол β , могут быть найдены из системы нелинейных

алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \rho_{sh} &= \rho_0 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta - \delta)}, & \frac{\alpha_{sh}}{\alpha_0} &= \frac{\rho_{sh}}{\rho_0}, \\ p_{sh} &= p_0 + \rho_0 c_0^2 M_0^2 \sin^2 \beta \left[1 - \frac{\operatorname{tg}(\beta - \delta)}{\operatorname{tg} \beta} \right], \\ \frac{\rho_0}{\rho_{sh}} &= 1 - \frac{2\alpha_{g0}(p_{sh} - p_0)}{p_0(\gamma - 1) + p_{sh}(\gamma + 1)}, \end{aligned} \quad (18)$$

которые представляют собой соотношения Ренкина–Гюгонио, выписанные в направлении, ортогональном к фронту присоединенного ударного скачка, рассматриваемые совместно с выражением для ударной адиабаты смеси [Суров, 2006].

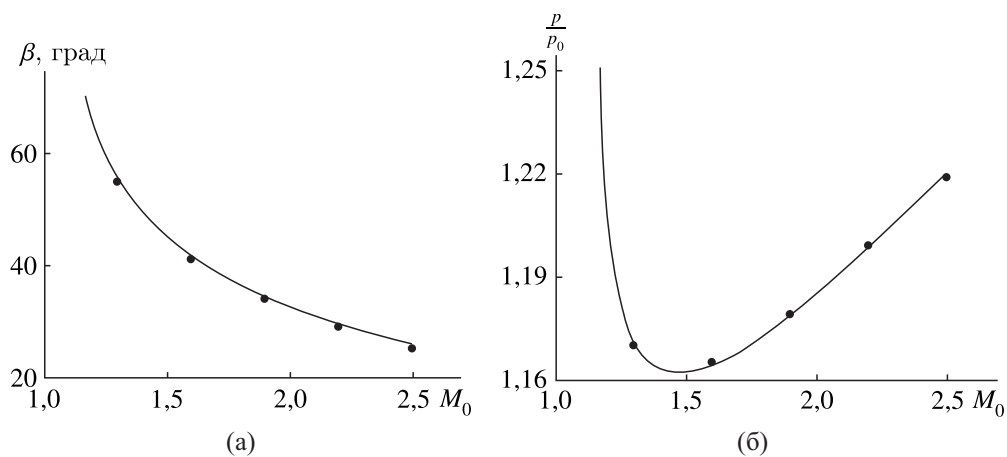


Рис. 9. Зависимости $\beta(M_0)$ (а) и относительного давления от M_0 (б) для режима течения с присоединенным ударным скачком. Точки — данные численных расчетов

На рис. 9, а, б сплошными кривыми изображены зависимости $\beta(M_0)$ и относительного давления от M_0 , полученные из системы уравнений (18) при $p_0 = 0,1$ МПа, $\alpha_0 = 0,02$, $\delta = -3^\circ$ для водно-воздушной смеси с параметрами $\gamma = 1,4$, $\rho_{g0}^0 = 1,16$ кг/м³, $\rho_s^0 = 1000$ кг/м³. На этих же графиках точками отмечены результаты численного моделирования, рассчитанные с использованием МУМХ на сетке из 500×500 узлов при числе Куранта 1,19. Начальные данные во всей расчетной области задавались равными: $p = p_0$; $u = c_0 M_0 \cos \delta$; $v = c_0 M_0 \sin \delta$; $\alpha = \alpha_0$. Вычисления проводились до тех пор, пока течение не станет установившимся.

5. Заключение

Представлен вариант обратного метода характеристик МОМХ, в алгоритм которого введен дополнительный дробный временной шаг, что позволяет повысить точность вычислений, а также проводить расчеты с большим временным шагом. Приведены расчетные формулы модифицированного метода для односкоростной модели газожидкостной смеси. При расчете многомерных задач исходная система уравнений расщепляется на ряд одномерных подсистем, для решения которых используется обратный метод характеристик с дробным временным шагом. С использованием предложенного подхода рассчитаны одномерные задачи распада произвольного разрыва в дисперсной среде с двумя волнами разрежения, а также с волной разгрузки и ударным скачком, двумерная задача о взаимодействии однородного газожидкостного потока с препятствием при наличии присоединенного ударного скачка, а также течение с центрированной волной разрежения.

Результаты численных расчетов этих задач сопоставлены с имеющимися автотомельными решениями и отмечено их удовлетворительное совпадение. На примере задачи Римана с ударным скачком проведен сравнительный анализ с рядом консервативных, неконсервативных, первого и повышенного порядков точности схем, из которого, в частности, следует, что представленный метод расчета, т.е. MOMX, вполне конкурентоспособен. Несмотря на то что применение MOMX требует в разы больших временных затрат по сравнению с оригинальным обратным методом характеристик (ОМХ), вычисления можно проводить с увеличенным временным шагом и в ряде случаев получать более точные результаты. Отметим также, что временные затраты при использовании MOMX можно существенно сократить, распараллелив алгоритм, для чего расчет значений параметров в точках B , C и D необходимо проводить одновременно на разных процессорах (ядрах). Из представленных в работе данных следует, что предложенный метод расчета дает особенно хорошие результаты в областях, в которых отсутствуют ударные скачки. В связи с этим отметим перспективность использования предложенного метода для расчета течений вязких теплопроводных смесей, поскольку в подобных средах ударные скачки представляют собой непрерывные функции, а именно, в этих случаях предложенный метод наиболее эффективен. При введении в модель диссипативных процессов для сохранения гиперболичности модифицированных уравнений вместо оригинальных законов Фурье и Стокса необходимо использовать их релаксационные аналоги [Сузов, 2019; Сузов, 2022с].

Список литературы (References)

- Головизнин В. П., Жмакин А. И., Фурсенко А. А. Об одном методе расчета нестационарных взаимодействий ударных волн // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1982. — Т. 22, № 2. — С. 484–488.
- Goloviznin V. P., Zhmakin A. I., Fursenko A. A. Ob odnom metode rascheta nestatsionarnykh vzaimodeistvii udarnykh voln [About one method for calculating unsteady interactions of shock waves] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. — 1982. — Vol. 22, No. 2. — P. 484–488 (in Russian).*
- Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2012.
- Kulikovskiy A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu. Matematicheskiye voprosy chislenogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy [Mathematical issues of numerical solution of hyperbolic systems of equations]. — Moscow: Fizmatlit, 2012 (in Russian).*
- Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988.
- Magomedov K. M., Kholodov A. S. Setochno-kharakteristicheskie hislenye metody [Grid-characteristic numerical methods]. — Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).*
- Мартыненко М. Д., Босяков С. М. Метод характеристик для динамической термоупругой задачи кубически анизотропного тела в напряжениях // Инженерно-физический журнал. — 2002. — Т. 75, № 3. — С. 74–81.
- Martynenko M. D., Bosyakov S. M. Method of characteristics for the dynamic thermoelastic problem of a cubically anisotropic body in stresses // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2002. — Vol. 75, No. 3. — P. 614–623. (Original Russian paper: Martynenko M. D., Bosyakov S. M. Metod kharakteristik dlya dinamicheskoy termouprugoy zadachi kubicheskii anizotropnogo tela v naazheniyakh // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — 2002. — Vol. 75, No. 3. — P. 74–81.)*
- Русанов В. В. Характеристики общих уравнений газовой динамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Т. 3, № 3. — С. 508–527.
- Rusanov V. V. Characteristics of general equations of gas dynamics // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1963. — Vol. 3, No. 3. — P. 674–698. (Original Russian paper: Rusanov V. V. Kharakteristiki obshchikh uravnenii gazovoi dinamiki // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 1963. — Vol. 3, No. 3. — P. 508–527.)*
- Сузов В. С. Задача Римана для односкоростной модели гетерогенной смеси // Инженерно-физический журнал. — 2008. — Т. 81, № 6. — С. 1133–1141.
- Surov V. S. Riemann problem for the one-velocity model of a heterogeneous medium // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2008. — Vol. 81, No. 6. — P. 1176–1184. — <https://doi.org/10.1007/s10891-009-0134-8> (Original Russian paper: Surov V. S. Zadacha Rimana dlya odnoskorostnoi modeli geterogennoi smesi // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — 2008. — Vol. 81, No. 6. — P. 1133–1141.)*

- Суров В. С.* К расчету течений парокапельной смеси с взрывным механизмом вскипания многомерным узловым методом характеристик // Вычислительная механика сплошных сред. — 2022a. — Т. 15, № 1. — С. 115–126. — <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.1.9>
Surov V.S. K raschetu techenii parokapel'noi smesi s vzryvnyim mekhanizmom vskipaniya mnogomernym uzlovym metodom kharakteristik [Calculation of steam drop mixture flows with boiling explosion mechanism using a multidimensional nodal method of characteristics] // Computational continuum mechanics. — 2022a. — Vol. 15, No. 1. — P. 115–126 (in Russian).
- Суров В. С.* К расчету течений тяжелой жидкости многомерным узловым методом характеристик // Вычислительные технологии. — 2022b. — Т. 27, № 2. — С. 62–73. — <https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.2.006>
Surov V.S. K raschetu techenii tyazheloi zhidkosti mnogomernym uzlovym metodom kharakteristik [Calculation of heavy liquid flows by the multidimensional nodal method of characteristics] // Computational Technologies. — 2022b. — Vol. 27, No. 2. — P. 62–73 (in Russian).
- Суров В. С.* К расчету упругопластической деформации твердого тела многомерным узловым методом характеристик // Вычислительные технологии. — 2021a. — Т. 26, № 4. — С. 39–52. — <https://doi.org/10.25743/ICT.2021.26.4.005>
Surov V.S. K raschetu uprugoplasticheskoi deformatsii tverdogo tela mnogomernym uzlovym metodom kharakteristik [Calculation of the elasticplastic deformation of a solid body by multidimensional nodal method of characteristics] // Computational Technologies. — 2021a. — Vol. 26, No. 4. — P. 39–52 (in Russian).
- Суров В. С.* Многомерный узловой метод характеристик для гиперболических систем // Компьютерные исследования и моделирование. — 2021b. — Т. 13, № 1. — С. 19–32. — <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2021-13-1-19-32>
Surov V.S. Mnogomernyi uzlovoi metod kharakteristik dlya giperbolicheskikh sistem [Multidimensional nodal method of characteristics for hyperbolic systems] // Computer Research and Modeling. — 2021b. — Vol. 13, No. 1. — P. 19–32 (in Russian).
- Суров В. С.* О гиперболизации ряда моделей механики сплошной среды // Инженерно-физический журнал. — 2019. — Т. 92, № 5. — С. 2341–2357.
Surov V.S. On hyperbolization of a number of continuum mechanics models // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2019. — Vol. 92, No. 5. — P. 1302–1317. — <https://doi.org/10.1007/s10891-019-02046-x> (Original Russian paper: *Surov V.S.* O giperbolizatsii ryada modelei mekhaniki sploshnoi sredy // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — 2019. — Vol. 92, No. 5. — P. 2341–2357.)
- Суров В. С.* О некоторых автомодельных задачах течения односкоростной гетерогенной среды // Инженерно-физический журнал. — 2007. — Т. 80, № 6. — С. 164–172.
Surov V.S. Certain self-similar problems of flow of a one-velocity heterogeneous medium // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2007. — Vol. 80, No. 6. — P. 1237–1246. — <https://doi.org/10.1007/s10891-007-0160-3> (Original Russian paper: *Surov V.S.* O nekotorykh avtomodel'nykh zadachakh techeniya odnoskorostnoi geterogennoi sredy // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — 2007. — Vol. 80, No. 6. — P. 164–172.)
- Суров В. С.* Об уравнениях односкоростной гетерогенной среды // Инженерно-физический журнал. — 2009. — Т. 82, № 1. — С. 75–84.
Surov V.S. On equations of a one-velocity heterogeneous medium // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2009. — Vol. 82, No. 1. — P. 75–84. — <https://doi.org/10.1007/s10891-009-0163-3> (Original Russian paper: *Surov V.S.* Ob uravneniyakh odnoskorostnoi geterogennoi sredy // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — 2009. — Vol. 82, No. 1. — P. 75–84.)
- Суров В. С.* Релаксационная модель вязкого теплопроводного газа // Компьютерные исследования и моделирование. — 2022c. — Т. 14, № 1. — С. 23–43. — <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-23-43>
Surov V.S. Relaksatsionnaya model' vyazkogo teploprovodnogo gaza [Relaxation model of viscous heat-conducting gas] // Computer Research and Modeling. — 2022c. — Vol. 14, No. 1. — P. 23–43 (in Russian).
- Суров В. С.* Ударная адиабата односкоростной гетерогенной среды // Инженерно-физический журнал. — 2006. — Т. 79, № 5. — С. 46–52.
Surov V.S. Shock adiabat of a one-velocity heterogeneous medium // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2006. — Vol. 79, No. 5. — P. 886–892. — <https://doi.org/10.1007/s10891-006-0179-x> (Original Russian paper: *Surov V.S.* Udar'naya adiabatа odnoskorostnoi geterogennoi sredy // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — 2006. — Vol. 79, No. 5. — P. 46–52.)
- Eklund M., Alamaniotis M., Hernandez H., Jevremovic T.* Method of characteristics — a review with applications to science and nuclear engineering computation // Progress in Nuclear Energy. — 2015. — Vol. 85. — P. 548–567.
- Parpia I.H., Kentzer C.P., Williams M.H.* Multidimensional time dependent method of characteristics // Computers and Fluids. — 1988. — Vol. 16, No. 1. — P. 105–117.

- Pilon L., Viskanta R.* Modified method of characteristics for solving population balance equations // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2003. — Vol. 42, No. 11. — P. 1211–1236.
- Sanchez-Alegria A., Moreno P., Loo-Yau J.R.* An alternative model for aerial multiconductor transmission lines excited by external electromagnetic fields based on the method of characteristics // Electrical Engineering. — 2019. — Vol. 101, No. 1. — P. 719–731.
- Surov V.S.* Analysis of wave phenomena in gas-liquid media // High Temperature. — 1998. — Vol. 36, No. 4. — P. 600–606.