

УДК: 536.46

Моделирование неравномерного горения и напряженно-деформированного состояния пороховых элементов трубчатого заряда при выстреле

И. Г. Русяк^а, В. А. Тенев^б, В. Г. Суфиянов^с, Д. А. Клюкин^д

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова,
Россия, 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

E-mail: ^а primat@istu.ru, ^б v.tenenev@gmail.com, ^с vsufiy@mail.ru, ^д anatoliikljukin@mail.ru

Получено 25.07.2022, после доработки — 13.09.2022.

Принято к публикации 26.09.2022.

В работе представлена физико-математическая постановка задач внутренней баллистики артиллерийского выстрела для заряда, состоящего из совокупности пороховых трубок, и их напряженно-деформированного состояния. Горение и движение пучка пороховых трубок по каналу ствола моделируются эквивалентным трубчатым зарядом всестороннего горения. Предполагается, что эквивалентная трубка движется по оси канала ствола. Скорость движения эквивалентного трубчатого заряда и его текущее положение определяются из второго закона Ньютона. При расчете параметров течения использованы двумерные осесимметричные уравнения газовой динамики, для решения которых строится осесимметричная ортогонализированная разностная сетка, адаптирующаяся к условиям течения. Для численного решения системы газодинамических уравнений применяется метод контрольного объема. Параметры газа на границах контрольных объемов определяются с использованием автотельного решения задачи о распаде произвольного разрыва С. К. Годунова. Напряженно-деформированное состояние моделируется для отдельной горячей пороховой трубки, находящейся в поле нестационарных газодинамических параметров. Расчет газодинамических параметров выстрела осуществляется без учета деформированного состояния пороховых элементов. При данных условиях рассмотрено поведение пороховых элементов при выстреле. Для решения нестационарной задачи упругости используется метод конечных элементов с разбиением области расчета на треугольные элементы. В процессе выгорания пороховой трубки расчетная сетка на каждом временном слое динамической задачи полностью обновляется в связи с изменением границ порохового элемента за счет горения. Представлены временные зависимости параметров внутрибаллистического процесса и напряженно-деформированного состояния пороховых элементов, а также распределения основных параметров течения продуктов горения в различные моменты времени. Установлено, что трубчатые пороховые элементы в процессе выстрела испытывают существенные деформации, которые необходимо учитывать при решении основной задачи внутренней баллистики. Полученные данные дают представления об уровне эквивалентных напряжений, действующих в различных точках порохового элемента. Представленные результаты говорят об актуальности сопряженной постановки задачи газовой динамики и напряженно-деформированного состояния для зарядов, состоящих из трубчатых порохов, поскольку это позволяет по-новому подойти к проектированию трубчатых зарядов и открывает возможность определения параметров, от которых существенно зависят физика процесса горения пороха и, следовательно, динамика процесса выстрела.

Ключевые слова: артиллерийская система, внутренняя баллистика, математическое моделирование, осесимметричная постановка, уравнения газовой динамики, трубчатые пороховые элементы, уравнения напряженно-деформированного состояния

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00072.

UDC: 536.46

Simulation of uneven combustion and stress-strain state of powder elements of a tubular charge during firing

I. G. Rusyak^a, V. A. Tenenev^b, V. G. Sufiyarov^c, D. A. Klyukin^d

Kalashnikov Izhevsk State Technical University,
7 Studencheskaya st., Izhevsk, 426069, Russia

E-mail: ^a primat@istu.ru, ^b v.tenenev@gmail.com, ^c vsufiy@mail.ru, ^d anatoliikljukin@mail.ru

*Received 25.07.2022, after completion – 13.09.2022.
Accepted for publication 26.09.2022.*

The paper presents the physical and mathematical formulation of the problems of internal ballistics of an artillery shot for a charge consisting of a set of powder tubes and their stress-strain state. Combustion and movement of a bundle of powder tubes along the barrel channel is modeled by an equivalent tubular charge of all-round combustion. It is assumed that the equivalent tube moves along the axis of the bore. The speed of movement of an equivalent tubular charge and its current position are determined from Newton's second law. When calculating the flow parameters, two-dimensional axisymmetric equations of gas dynamics were used, for the solution of which an axisymmetric orthogonalized difference grid is constructed, which adapts to the flow conditions. The control volume method is used to numerically solve the system of gas-dynamic equations. The gas parameters at the boundaries of the control volumes are determined using a self-similar solution to the Godunov's problem of the decay of an arbitrary discontinuity. The stress-strain state is modeled for a separate burning powder tube located in the field of gas-dynamic parameters. The calculation of the gas-dynamic parameters of the shot is carried out without taking into account the deformed state of the powder elements. The behavior of powder elements during firing is considered under these conditions. The finite element method with the division of the calculation area into triangular elements is used to solve the problem of elasticity. In the process of powder tube burnout, the computational grid on each time layer of the dynamic problem is completely updated due to a change in the boundaries of the powder element due to combustion. The paper shows the time dependences of the parameters of the internal ballistics process and the stress-strain state of powder elements, as well as the distribution of the main parameters of the flow of combustion products at different points in time. It has been established that the tubular powder elements during the shot experience significant deformations, which must be taken into account when solving the basic problem of internal ballistics. The data obtained give an idea of the level of equivalent stresses acting at various points of the powder element. The results obtained indicate the relevance of the conjugate formulation of the problem of gas dynamics and the stress-strain state for charges consisting of tubular powders, since this allows a new approach to the design of tubular charges and opens up the possibility of determining the parameters on which the physics of the combustion process of gunpowder significantly depends, therefore, and the dynamics of the shot process.

Keywords: artillery system, internal ballistics, mathematical modeling, axisymmetric setting, gas dynamics equations, tubular powder elements, stress-strain state equations

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 6, pp. 1281–1300 (Russian).

The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00072.

1. Введение

В артиллерийских боеприпасах используются два вида пороховых элементов: трубчатые и зерновые. При этом заряд может состоять только из трубчатых или только из зерновых пороховых элементов. Чаще они используются в комбинации. При выстреле в условиях высоких давлений и значительных перепадов давления может происходить существенное изменение поверхности горения за счет деформации пороховых элементов. Как это отражается на динамике внутрибаллистического процесса — следует подвергнуть изучению. Наиболее актуальным этот вопрос является для трубчатых пороховых элементов, поскольку при выстреле условия горения для внутренних и внешних (образованных соседними элементами) каналов пороховых трубок могут существенно различаться между собой. Отличие условий горения внутри и вне каналов пороховых трубок в баллистике принято обозначать термином «неравномерное горение», впервые введенным Ю. А. Победоносцевым [Серебряков, 1962; Соркин, 1967]. Задача о неравномерном горении трубчатого заряда тесно переплетается с задачей о напряженно-деформированном состоянии (НДС) пороховых элементов, поскольку при неравномерном поле давления может происходить существенное изменение поверхности горения за счет деформации, а в некоторых случаях и разрушение пороховых элементов, в том числе и на начальной стадии процесса выстрела. В ствольных системах подобным исследованиям до настоящего времени не уделялось должного внимания, хотя ясно, что многие аномальные явления, возникающие при выстреле, могут быть объяснены преждевременным разрушением (дроблением) пороховых элементов в стволе. В этой связи необходимо рассмотреть пространственную сопряженную нестационарную задачу газовой динамики и напряженно-деформированного состояния пороховых трубок. Решение такой задачи предполагает параллельное решение газодинамических уравнений для каналов пороховых трубок и кольцевого зазора, а также уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние материала пороха, участвующего в горении. Используемые в настоящее время математические модели процесса выстрела не рассматривают данные эффекты, хотя в ряде исследований указывается на необходимость их учета.

В работе [Trębiński et al., 2020] были проведены экспериментальные исследования, которые показали, что отклонения от геометрического закона горения, наблюдаемые при горении порохов в закрытых сосудах, могут быть связаны с разрушением пороховых элементов. Полученные результаты позволили сделать вывод, что реологические свойства материала пороха важны для контролируемого процесса горения пороховых элементов при выстреле. В работе [Zhang et al., 2015] исследовалось влияние температуры на динамические характеристики механических свойств пороховых элементов. Результаты исследования показали, что изменение кривых напряжения пороховых элементов при разных температурах существенно различаются. Например, при температурах ниже -20°C преобладает хрупкое разрушение пороховых элементов, а при температурах выше 0°C разрушение протекает в результате пластических деформаций. В работе [Zhang et al., 2020] методом дискретных элементов проводится расчет внутрибаллистического процесса с учетом разрушения части зернового порохового заряда при его уплотнении в процессе воспламенения и увеличения интенсивности газообразования, что приводит к аномальному повышению давления в камере артиллерийской установки. Идея разработанного алгоритма состоит в определении критерия разрушения упругих зерновых пороховых элементов в начале процесса горения и проведении расчета внутренней баллистики с двухкомпонентным пороховым составом, состоящим из фракций неразрушенных и разрушенных пороховых элементов.

Большое количество работ посвящено решению пространственных сопряженных нестационарных задач, связанных с горением заряда в ракетных двигателях на твердом топливе (РДТТ) (ссылки можно найти в статье [Русяк, Тененев, 2021]). При этом используются различные приближения при моделировании — от нульмерного до трехмерного. Анализ влияния напряженно-деформированного состояния заряда ракетного твердого топлива на внутрибаллистические

параметры двигателя посвящены работы [Яковина, Малинин, 2017; Руденко и др., 2018]. Отличие рассматриваемого процесса состоит в том, что заряд в РДТТ является неподвижным, в то время как пороховые трубки в процессе выстрела перемещаются по каналу ствола под действием перепада давления. Это создает дополнительные трудности при численной реализации уравнений на подвижных сетках при изменении расчетных областей, зависящих от текущего состояния параметров физических процессов в условиях артиллерийского выстрела.

Одна из проблем учета НДС пороховых элементов — это расчет газодинамики течения в области трубчатого заряда. Эта проблема рассматривалась в работе [Русяк, Тененев, 2021], где построена и реализована математическая модель внутренней баллистики выстрела для заряда, состоящего из пучка пороховых трубок. Горение и движение пучка пороховых трубок по каналу ствола моделируются эквивалентным трубчатым зарядом всестороннего горения. Предполагается, что эквивалентная трубка движется по оси канала ствола. Скорость движения эквивалентного трубчатого заряда и его текущее положение определяются из второго закона Ньютона. Для расчета параметров течения использованы двумерные осесимметричные уравнения газовой динамики, для решения которых строится осесимметричная ортогонализированная разностная сетка, адаптирующаяся к условиям течения. Для численного решения системы газодинамических уравнений применяется метод контрольного объема. Параметры газа на границах контрольных объемов определяются на основе автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва С. К. Годунова. Разработанная методика использована для расчета внутриваллистических параметров артиллерийского выстрела с учетом неравномерного горения. При этом вопросы напряженно-деформированного состояния пороховых элементов остались в стороне. Решение сопряженной задачи газовой динамики и напряженно-деформированного состояния пороховых элементов еще ждет своих исследователей. Результаты, приведенные ниже, получены при одном важном упрощении: они представляют собой оценку динамики напряженно-деформированного состояния трубчатых пороховых элементов без учета влияния этого состояния на внутриваллистический процесс. В этой связи данная работа является промежуточным этапом на пути реализации сопряженной нестационарной газодинамической задачи внутренней баллистики и напряженно-деформированного состояния трубчатых пороховых элементов.

Целью данного исследования являются разработка методики решения задачи и оценка влияния условий неравномерного горения на напряженно-деформированное состояние трубчатых пороховых элементов в процессе выстрела.

2. Математическая модель газовой динамики при горении заряда, состоящего из пучка пороховых трубок

Следуя [Русяк, Тененев, 2021] будем полагать, что все пороховые трубки находятся в одинаковых условиях. Тогда с точки зрения газодинамической задачи пучок из n трубок можно заменить эквивалентным трубчатым зарядом всестороннего горения с переменными как по времени, так и по координате, внутренним r_3 и внешним R_3 радиусами, движущимся по оси канала ствола со скоростью $w(t)$ (рис. 1).

В качестве допущений полагается также, что воспламенитель сгорает мгновенно и создает начальное давление p_v . При этом теплофизические параметры продуктов горения воспламенителя совпадают с параметрами основного заряда. Массой воздуха в камере сгорания пренебрегается. Основной заряд воспламеняется сразу по всей поверхности в момент сгорания воспламенителя. Снаряд начинает двигаться после достижения в камере давления форсирования p_ϕ ($p_\phi > p_v$). Теплообменом с горячей поверхностью заряда пренебрегается (скорость тепловой волны близка к скорости горения). Трение и теплообмен продуктов горения с поверхностью канала ствола не учитываются.

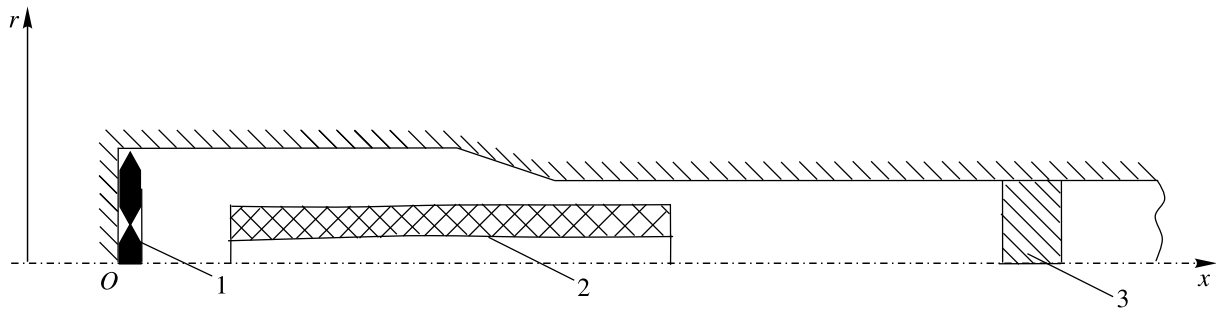


Рис. 1. К задаче внутренней баллистики для заряда из трубчатого пороха: 1 — торцевой воспламенитель, 2 — эквивалентный трубчатый заряд всестороннего горения, 3 — снаряд

При сформулированных допущениях соответствующая система уравнений, описывающая поведение газовой фазы в заснарядном пространстве в невязкой осесимметричной постановке, имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r\rho}{\partial t} + \frac{\partial r\rho v_r}{\partial r} + \frac{\partial r\rho v_x}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial r\rho v_r}{\partial t} + \frac{\partial r(\rho v_r^2 + p)}{\partial r} + \frac{\partial r\rho v_r v_x}{\partial x} &= p, \\
 \frac{\partial r\rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial r\rho v_r v_x}{\partial r} + \frac{\partial r(\rho v_x^2 + p)}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial re}{\partial t} + \frac{\partial r(e+p)v_r}{\partial r} + \frac{\partial r(e+p)v_x}{\partial x} &= 0, \\
 p(1-\alpha\rho) &= (k-1)\rho\varepsilon, \quad e = \rho[\varepsilon + 0,5(v_r^2 + v_x^2)].
 \end{aligned} \tag{1}$$

В приведенных выше уравнениях t — время; r , x — радиальная и продольная координаты соответственно (см. рис. 1); ρ — плотность продуктов горения; v_r , v_x — проекции скорости движения газа на оси цилиндрической системы координат; p — давление; $\varepsilon = c_v T$ — внутренняя энергия единицы массы пороховых газов; T — температура продуктов горения; c_v — удельная теплоемкость продуктов горения при постоянном объеме; α — коэфф. порох. газов; k — показатель адиабаты пороховых газов.

Поскольку принимается, что заряд движется единым пакетом, тогда уравнения для скорости движения трубчатого заряда $w(t)$ и перемещения шашки x_L записываются в виде

$$\delta W \frac{dw}{dt} = F_w = \int_S p ds, \tag{2}$$

$$\frac{dx_L}{dt} = w. \tag{3}$$

Изменение радиусов пороховых элементов и шашки определяются уравнениями

$$\frac{dr_1(t, x)}{dt} = u_k(t, r_1, x), \tag{4}$$

$$\frac{dr_2(t, x)}{dt} = -u_k(t, r_2, x), \tag{5}$$

$$r_3(t, x) = \sqrt{nr_1(t, x)}, \quad R_3(t, x) = \sqrt{nr_2(t, x)}, \tag{6}$$

где δ — плотность пороха; $W(t) = \pi \int_{x_L}^{x_L+L} [R_3^2(t, x) - r_3^2(t, x)] dx$ — текущий объем шашки с длиной L ; $r_3(t, x)$, $R_3(t, x)$ — текущие внутренний и внешний радиусы шашки соответственно; F_w — газодинамическая сила, действующая на шашку; S — поверхность шашки; x_L — координата левой границы шашки; $r_1(t, x)$, $r_2(t, x)$ — текущие внутренний и внешний радиусы трубчатого порохового элемента соответственно; $u_k = u_k(p) = u_1 p^\gamma$ — скорость горения пороха, определяемая давлением в каждой точке поверхности горения; u_1 , γ — экспериментальные константы закона скорости горения.

Уравнения для скорости движения $v_{сн}$ и перемещения $x_{сн}$ снаряда имеют вид

$$\frac{dv_{сн}}{dt} = \left(2\pi \int_0^{d_{кн}/2} p(t, r, x_{сн}) r dr \right) \eta(p_{сн} - p_\phi), \quad (7)$$

$$\frac{dx_{сн}}{dt} = v_{сн}, \quad (8)$$

где $x_{сн}$ — координата положения снаряда в стволе, $p_{сн}$ — усредненное давление на торец снаряда, $d_{кн}$ — диаметр канала ствола; $\eta(\xi)$ — функция Хэвисайда.

Систему уравнений (1)–(8) необходимо дополнить начальными и граничными условиями. В качестве начальных условий задаются условия покоя и условия, отвечающие состоянию продуктов горения в момент полного сгорания воспламенителя массой ω_B в замкнутом объеме. Она решается в области $t > 0$, $0 \leq r \leq R_{ст}(x)$, $0 < x < x_{сн}(t)$, где $R_{ст}(x)$ — переменный радиус камеры и канала ствола.

Начальные условия:

при $t = 0$, $0 \leq x \leq L_{км}$, $0 \leq r \leq R_{ст}(x)$

$$v_x = 0, \quad v_r = 0, \quad p = p_B, \quad \rho = \Delta_B, \quad T = T_v, \quad w = 0, \quad x_L = l_n, \quad v_{сн} = 0, \quad x_{сн} = L_{км}. \quad (9)$$

Здесь T_v — температура продуктов горения пороха в замкнутом объеме; $p_B = \frac{\Delta_B f}{1 - \alpha \Delta_B}$ — давление, развиваемое воспламенителем; $f = RT_v$ — сила пороха; R — удельная газовая постоянная продуктов горения; $\Delta_B = \frac{\omega_B}{W_{км} - \frac{\omega}{\delta}}$ — плотность заряжения воспламенителя; $W_{км}$ — объем камеры; ω — масса заряда.

Граничные условия на непроницаемых границах:

при $t > 0$, $0 \leq r \leq R_{ст}(x)$, $x = 0$

$$v_n = 0; \quad (10)$$

при $t > 0$, $0 \leq r \leq R_{ст}(x)$, $x = x_{сн}(t)$

$$v_n = v_{сн}; \quad (11)$$

при $t > 0$, $r = R_{ст}(x)$, $0 \leq x \leq x_{сн}(t)$

$$v_n = 0. \quad (12)$$

Граничные условия на оси канала:

при $t > 0$, $r = 0$, $0 \leq x \leq x_{сн}(t)$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad f = (p, \rho, T, v_x), \quad v_r = 0. \quad (13)$$

Граничные условия на горящих поверхностях:

при $t > 0$, $r = r_3(t, x)$, $x_L(t) \leq x \leq x_L(t) + L(t)$

$$v_n = u_k(p) \frac{\delta}{\rho} \sqrt{n}, \quad \varepsilon = \frac{f}{k-1}; \quad (14)$$

при $t > 0, r = R_3(t, x), x_L(t) \leq x \leq x_L(t) + L(t)$

$$v_n = u_k(p) \frac{\delta}{\rho} \sqrt{n}, \quad \varepsilon = \frac{f}{k-1}; \tag{15}$$

при $t > 0, r_3(t, x_L) < r < R_3(t, x_L), x = x_L(t)$

$$v_n = u_k(p) \frac{\delta}{\rho}, \quad \varepsilon = \frac{f}{k-1}; \tag{16}$$

при $t > 0, r_3(t, x_L + L) < r < R_3(t, x_L + L), x = x_L(t) + L(t)$

$$v_n = u_k(p) \frac{\delta}{\rho}, \quad \varepsilon = \frac{f}{k-1}. \tag{17}$$

Здесь v_n — модуль нормальной к границе составляющей скорости газа.

Алгоритм решения системы уравнений (1)–(17) подробно рассмотрен в работе [Русяк, Тененев, 2021]. Здесь лишь отметим, что для численного решения системы газодинамических уравнений применяется метод контрольного объема. Параметры газа на границах контрольных объемов определяются с использованием автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва С. К. Годунова [Годунов и др., 1976; Сафронов, Фомин, 2010; Прокопов, Северин, 2009].

3. Математическая модель НДС порохового элемента, входящего в пучок пороховых трубок

В качестве допущений полагается, что трубка находится при постоянной температуре (скорость тепловой волны в материале трубки равна скорости горения); объемные силы пренебрежимо малы; трубка имеет строго осесимметричную форму; материал пороховой трубки представляет собой линейную изотропную упругую среду.

Задачу напряженно-деформированного состояния рассмотрим в осесимметричной постановке в координатах $Or\theta x$ (рис. 2).

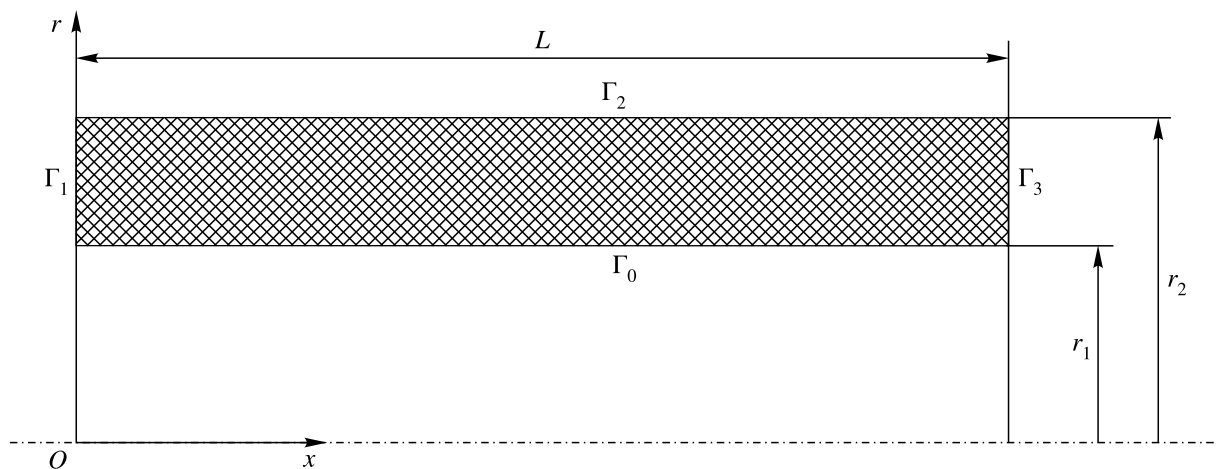


Рис. 2. Начальная форма пороховой трубки

Нестационарное осесимметричное напряженно-деформированное состояние пороховой трубки описывается следующей системой уравнений [Лурье, 1970]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{rx}}{r} &= \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (18)$$

где v , u — радиальное и осевое перемещение элемента пороховой трубки соответственно.

Связь между деформациями ε_{ik} и напряжениями σ_{ik} ($i, k = r, \theta, x$) определяется законом Гука:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{E}[\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{\theta\theta})], \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{v}{r} = \frac{1}{E}[\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{xx})], \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})], \\ \varepsilon_{rx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{rx},\end{aligned}\quad (19)$$

где ν — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости.

Начальные условия:

при $t = 0$, $r_1(0, x) \leq r \leq r_2(0, x)$, $0 \leq x \leq L(0)$

$$v(0, r, x) = v_0(r, x), \quad u(0, r, x) = u_0(r, x), \quad (20)$$

$$\frac{\partial v(0, r, x)}{\partial t} = \frac{\partial u(0, r, x)}{\partial t} = 0; \quad (21)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(0, r, x) &= \sigma_{rr0}(r, x), & \sigma_{\theta\theta}(0, r, x) &= \sigma_{\theta\theta0}(r, x), \\ \sigma_{xx}(0, r, x) &= \sigma_{xx0}(r, x), & \sigma_{rx}(0, r, x) &= \sigma_{rx0}(r, x).\end{aligned}\quad (22)$$

Граничные условия:

на границах Γ_0 , Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 (см. рис. 2) задается распределение давления, действующего по нормали \mathbf{n} к границам области:

$$\sigma_n|_{\Gamma_i} = -p(t, r, x)|_{\Gamma_i}, \quad i = \overline{0, 3}, \quad (23)$$

где $\sigma_n|_{\Gamma_i}$ — напряжение по нормали на границе области, $p(t, r, x)|_{\Gamma_i}$ — давление на границе, которое определяется из решения задачи внутренней баллистики в осесимметричной постановке.

Решение задачи (18) осуществляется при допущении, что границы Γ_1 и Γ_3 не выгорают.

Начальные перемещения и напряжения $v_0(r, x)$, $u_0(r, x)$, $\sigma_{rr0}(r, x)$, $\sigma_{\theta\theta0}(r, x)$, $\sigma_{xx0}(r, x)$, $\sigma_{rx0}(r, x)$ приближенно определяли из решения стационарной задачи напряженно-деформированного состояния пороховой трубки, находящейся под действием давления p_b , описываемой системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{rx}}{r} &= 0\end{aligned}\quad (24)$$

с граничными условиями

$$\sigma_n|_{\Gamma_i} = -p_b, \quad i = \overline{0, 3}. \quad (25)$$

4. Численное решение динамической задачи НДС твердого тела МКЭ с учетом изменения границ

Для решения нестационарной осесимметричной задачи упругости используется метод конечных элементов (МКЭ). В начальный момент времени $t = 0$ проводится триангуляция исходной расчетной области. Регулярная расчетная сетка состоит из треугольных конечных элементов (рис. 3).

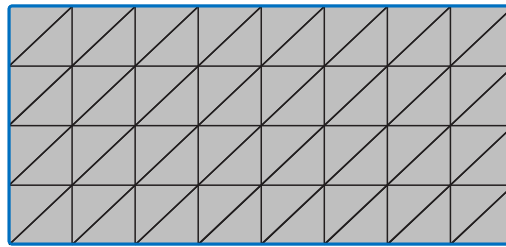


Рис. 3. Начальная расчетная область пороховой трубки, разбитая на треугольные конечные элементы

В процессе выгорания на каждом временном шаге расчетная конечноэлементная сетка перестраивалась с учетом изменения границ расчетной области (рис. 4) (расчетная область и конечноэлементная сетка представлены схематично; несгоревшая часть порохового элемента (рис. 4, а) выделена серым цветом). Текущие границы расчетной области, а именно внутренние и внешние радиусы порохового элемента, определялись из решения газодинамической задачи по формулам (4) и (5).

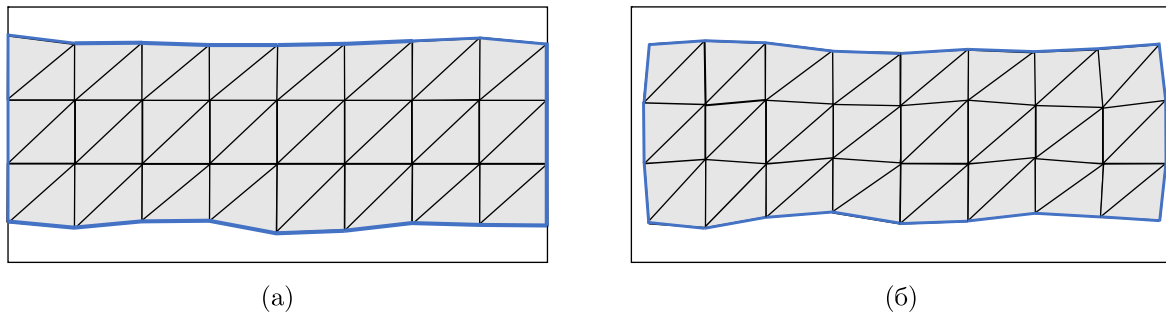


Рис. 4. Перестроение расчетной сетки при выгорании порохового элемента

В результате решения задачи НДС в узлах расчетной области определялись перемещения. Конфигурация расчетной области и конечноэлементной сетки с учетом перемещений представлена на рис. 4, б.

Динамическая задача НДС твердого тела сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида [Секулович, 1993]

$$\mathbf{K}_t \mathbf{d} + \mathbf{F}_t + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{0}, \tag{26}$$

где \mathbf{K}_t — матрица жесткости, \mathbf{F}_t — вектор сил, \mathbf{M}_t — матрица масс, $\ddot{\mathbf{d}} = \frac{d^2 \mathbf{d}}{dt^2}$ — вектор ускорений.

Процедуры вычисления матрицы жесткости \mathbf{K}_t , вектора сил \mathbf{F}_t и вектора масс \mathbf{M}_t определены в работах [Зенкевич, 1975; Секулович, 1993].

Численная аппроксимация уравнения (26) на каждом временном слое $t_n = t_{n-1} + \Delta t$, $n = \overline{1, N}$, проводится с постоянным шагом Δt методом конечных разностей. Обозначим вектор

перемещений \mathbf{d}^n в момент времени t_n , тогда конечно-разностная аппроксимация вектора ускорений $\ddot{\mathbf{d}}^n$ записывается в виде [Секулович, 1993]

$$\ddot{\mathbf{d}}^n = \frac{\mathbf{d}^n - 2\mathbf{d}^{n-1} + \mathbf{d}^{n-2}}{\Delta t^2}. \quad (27)$$

После подстановки выражения (27) в (26) получаем конечно-разностную аппроксимацию уравнения равновесия:

$$\left(\mathbf{K} + \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2}\right)\mathbf{d}^n = -\mathbf{F}_t + \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2}(2\mathbf{d}^{n-1} - \mathbf{d}^{n-2}), \quad n = \overline{1, N}. \quad (28)$$

В начальный момент времени задается распределение перемещений:

$$\mathbf{d}^0 = (u_{01}, v_{01}, u_{02}, v_{02}, \dots, u_{0m}, v_{0m})^T, \quad (29)$$

где m — количество узлов конечноэлементной сетки.

Система уравнений (28) сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A}^n \mathbf{d}^n = \mathbf{b}^n, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (30)$$

где матрица $\mathbf{A}^n = \mathbf{K} + \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2}$, вектор $\mathbf{b}^n = -\mathbf{F}_t + \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2}(2\mathbf{d}^{n-1} - \mathbf{d}^{n-2})$.

Система уравнение (30) на каждом шаге по времени решается методом бисопряженных градиентов с диагональным предобуславливанием [Fujino, 2002], реализованным в библиотеке численных вычислений [MathNet.Numerics, 2022].

Базовый алгоритм, представленный выше, позволяет решать динамическую задачу без учета изменения границ за счет выгорания порохового элемента. В нашем случае данный алгоритм был модифицирован — добавлен блок, связанный с перестроением сетки с учетом изменения расчетной области. Блок-схема алгоритма решения в данном случае представлена на рис. 5.

Отметим, что при отсутствии изменения границ за счет горения расчетная область не меняется, и в этом случае отсутствует необходимость в перестроении сетки.

5. Тестирование численного метода решения статической и динамической задач НДС твердого тела МКЭ

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии пороховой трубки (рис. 2), на внутренней и внешней поверхностях которой заданы постоянные давления. Таким образом, можно записать:

$$\text{при } r = r_1, 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \quad \sigma_n = -p_k, \quad (31)$$

$$\text{при } r = r_2, 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \quad \sigma_n = -p_3, \quad (32)$$

где p_k, p_3 — давления на внутренней (в канале) и внешней (в зазоре) поверхностях пороховой трубки соответственно.

На левой и правой границах, при $r_1 \leq r \leq r_2$, $x = 0$ и $x = L$, $t \geq 0$, задаются условия закрепления:

$$u|_{x=0} = u|_{x=L} = 0. \quad (33)$$

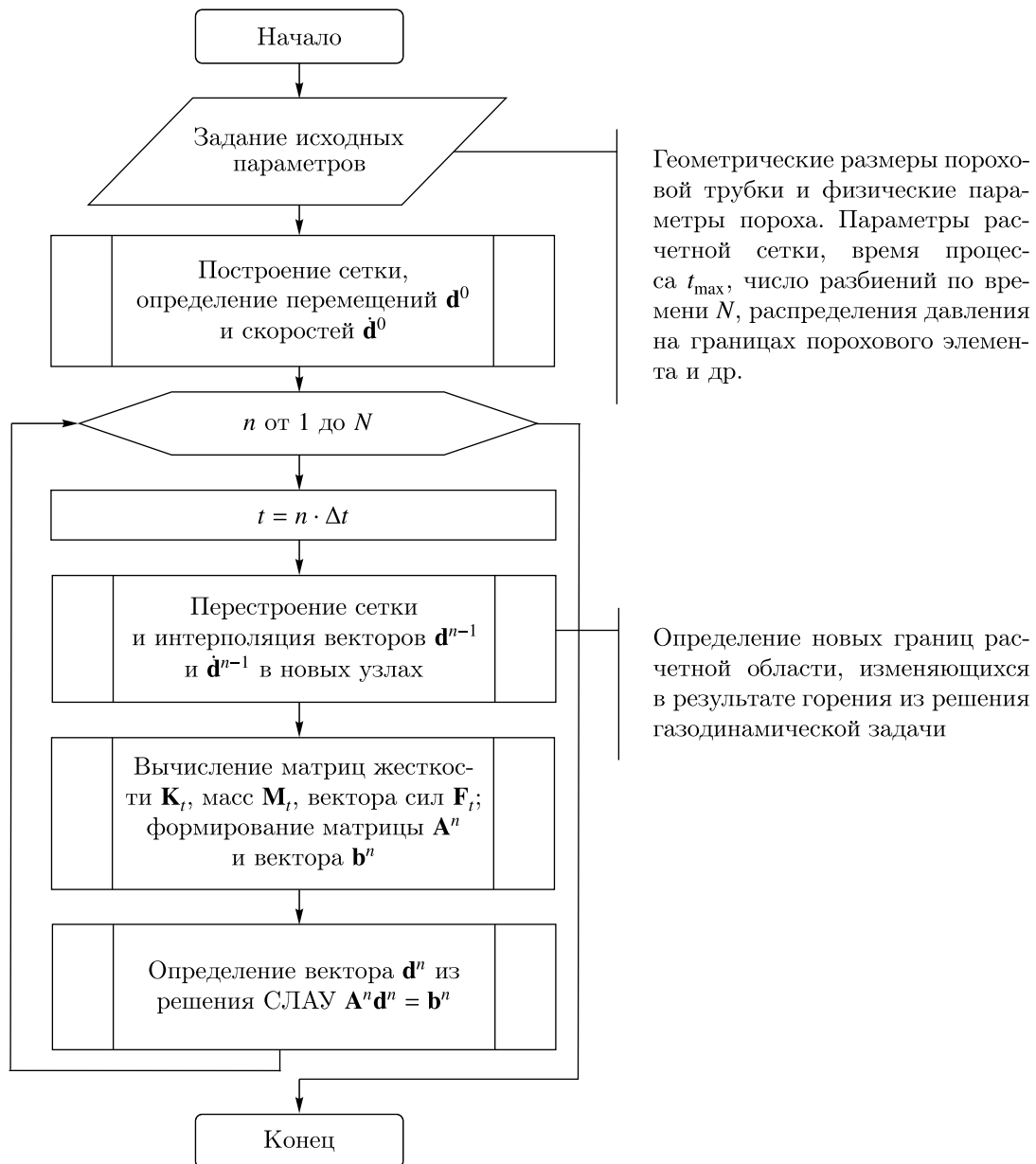


Рис. 5. Блок-схема алгоритма решения задачи напряженно-деформированного состояния порохового элемента с подвижными за счет горения границами

Механические свойства порохов можно найти в работах [Косточко, Казбан, 2014; Рогов, Груздев, 2004]. Тестирование алгоритма расчета напряженно-деформированного состояния пироксилинового порохового элемента проводилось при следующих параметрах: плотность материала — $\rho = 1600 \text{ кг/м}^3$, модуль упругости — $E = 800 \text{ МПа}$ (при 20°C), коэффициент Пуассона — $\nu = 0,4$ (при 20°C), предел прочности на сжатие — $\sigma_{\text{сж}}^n = 80 \text{ МПа}$ (при 20°C).

Геометрические характеристики порохового элемента: длина порохового элемента — $L = 50 \text{ мм}$, внутренний радиус — $r_1 = 5 \text{ мм}$, внешний радиус — $r_2 = 10 \text{ мм}$.

Граничные условия для статической задачи: давление на внешней поверхности пороховых трубок постоянно и равно $p_3 = 0,1 \text{ МПа}$, давление на внутренней поверхности пороховых трубок постоянно и равно $p_k = 10 \text{ МПа}$.

Граничные условия для динамической задачи: давление на внешней поверхности пороховых трубок постоянно и равно $p_3 = 0,1$ МПа, давление на внутренней поверхности пороховых трубок изменяется по закону $p_k = p_3 + \frac{p_M - p_3}{10}t$, $0 \leq t \leq 10$ мс, где $p_M = 10$ МПа.

Исследование сходимости расчетного алгоритма решения стационарной задачи НДС пороховой трубки проводилось на различных сетках с числом конечных элементов M от 250 до 4000. На рис. 6 представлен график отклонения эквивалентных напряжений от «эталонного» решения (при числе конечных элементов, равным 4000) в зависимости от числа конечных элементов согласно норме

$$\delta = \|\sigma_3 - \sigma_3^*\| = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{|\sigma_{3i} - \sigma_{3i}^*|}{|\sigma_{3i}^*|}, \quad (34)$$

где σ_3 — вектор эквивалентных напряжений при числе конечных элементов M ; σ_3^* — вектор эквивалентных напряжений «эталонного» решения в тех же узловых точках.

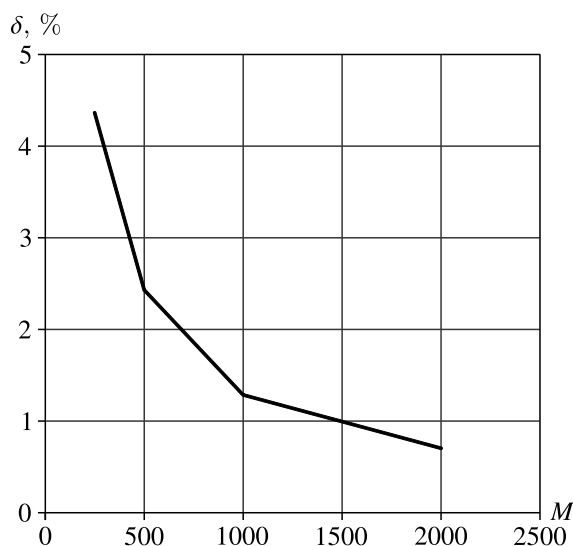


Рис. 6. Зависимость погрешности расчета эквивалентных напряжений от числа конечных элементов

Как видно из графика, представленного на рис. 6, наблюдается сходимость решения в норме (34) при измельчении сетки. При M более 1500 отклонение результатов расчета от эталонного решения не превышает 1 %.

Тестирование численного метода и алгоритма проводилось на задаче Ламе. Распределения напряжений для статической задачи определяются по формулам [Лурье, 1970]:

$$\sigma_{rr}(x_r) = -\frac{p_k(x_r^2 - 1) + p_3(x_1^2 - x_r^2)}{x_1^2 - 1},$$

$$\sigma_{\theta\theta}(x_r) = \frac{p_k(x_r^2 + 1) - p_3(x_1^2 + x_r^2)}{x_1^2 - 1},$$

$$\sigma_{xx} = 2\nu \frac{p_k - p_3 x_1^2}{x_1^2 - 1},$$

$$\sigma_{rx} = 0,$$

где $x_r = \frac{r_2}{r}$, $x_1 = \frac{r_2}{r_1}$.

График сравнения численного решения стационарной задачи НДС трубчатого порохового элемента с аналитическим решением по эквивалентным напряжениям σ_3 —

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{\theta\theta})^2) + 3\sigma_{rx}^2} \quad (35)$$

— представлен на рис. 7.

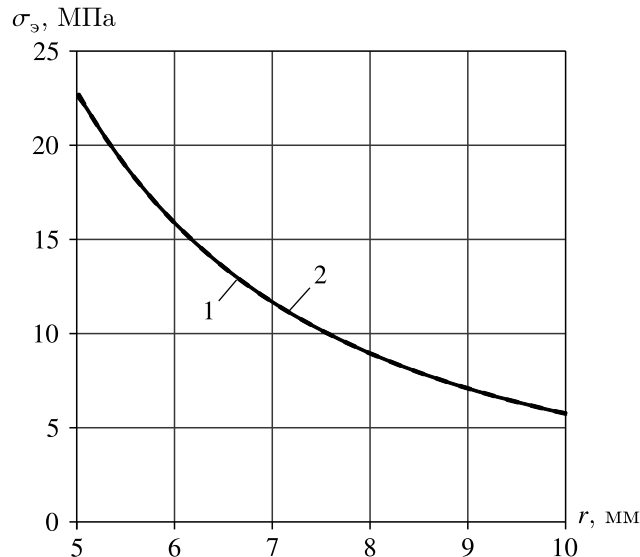


Рис. 7. Сравнение эквивалентных напряжений численного (1) и аналитического (2) решений для стационарной задачи Ламе

Сравнение результатов расчета эквивалентных напряжений для внутренней точки поверхности канала пороховой трубки с использованием разработанного численного метода с аналитическим решением показало, что решения практически совпадают: среднее отклонение расчетных параметров от аналитических не превышает 0,1 %.

Тестирование численной реализации динамической модели напряженно-деформированного состояния порохового элемента проводилось на основе сравнения с результатами расчета в программе Ansys. Результаты сравнения эквивалентных напряжений для внутренней точки поверхности канала пороховой трубки представлены на рис. 8. В данном случае среднее отклонение расчетных параметров не превышает 0,5 %.

6. Результаты расчетов

Численные исследования проводились для артиллерийской системы со следующими геометрическими характеристиками: диаметр камеры — $d_{км} = 0,13$ м, диаметр канала — ствола $d_{кн} = 0,1$ м, длина камеры — $L_{км} = 0,8$ м, расстояние от дна камеры до начала трубчатого заряда — $l_{нз} = 0,05$ м, начало уширения камеры — $l_{ну} = 0,4$ м, конец уширения камеры — $l_{ку} = 0,7$ м, длина ствола — $L_{д} = 5$ м.

Теплофизические характеристики продуктов горения пороха принимали следующие значения: $f = 1 \cdot 10^6$ Дж/кг, $k = 1,25$, $R = 300$ Дж/кг К, $\alpha = 0,001$ м³/кг.

Механические характеристики материала пороха: $E = 800$ МПа, $\nu = 0,4$, $\sigma_{сж}^п = 80$ МПа.

Геометрические характеристики трубчатых пороховых элементов были равны: $d_0 = 0,004$ м, $D_0 = 0,012$ м, $L = 0,5$ м. Плотность пороха — $\delta = 1600$ кг/м³. Масса заряда — $\omega = 4,5$ кг. При этом количество трубок — $n = 56$. Масса снаряда — $q = 25$ кг.

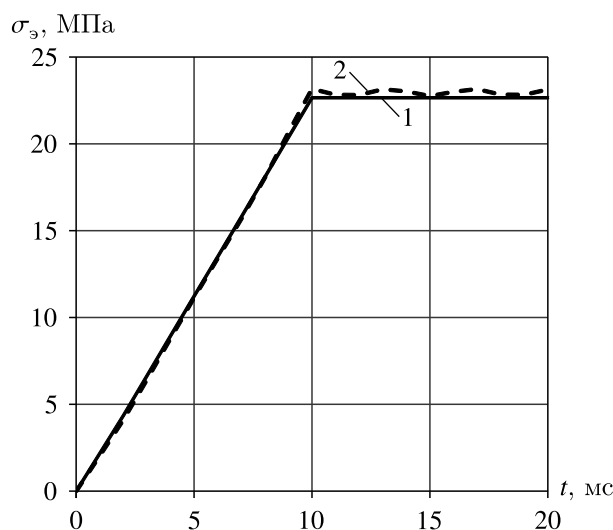


Рис. 8. Сравнение эквивалентных напряжений численного решения, полученного по разработанной программе (1), с решением, полученным в системе Ansys (2) для нестационарной задачи Ламе

На рис. 9 представлены кривые изменения давлений продуктов горения в различных точках заснарядного пространства и скорости снаряда от времени. По кривой $p_{\text{кн}}(t)$ можно определить момент полного сгорания шашки. После окончания ее горения $t > 13,8$ мс давление в области камеры резко падает и становится меньше давления у дна снаряда.

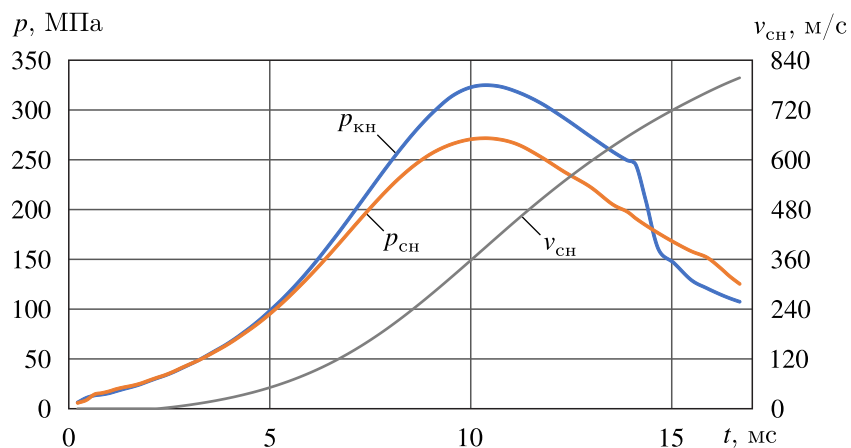


Рис. 9. Зависимости давления на дно канала $p_{\text{кн}}$, на дно снаряда $p_{\text{сн}}$ и скорости снаряда $v_{\text{сн}}$ от времени выстрела, полученные по газодинамической модели

Расчеты показывают, что трубчатый заряд не испытывает значительных перемещений в процессе выстрела и его горение практически заканчивается в камере. Как и предполагалось, имеют место существенные локальные продольные скорости течения продуктов горения внутри и снаружи пороховых трубок, которые значительно превосходят скорости снаряда в соответствующие моменты времени. При этом точки разделения потоков в начале процесса выстрела находятся внутри и вне канала шашки. При развитии процесса точка разделения потоков внутри канала смещается ближе ко дну камеры. По мере ускорения движения снаряда на внешней стороне пороховых трубок граница разделения потоков также смещается влево, а после времени $t > 8$ мс вне трубок поток всегда направлен в сторону снаряда (рис. 10).

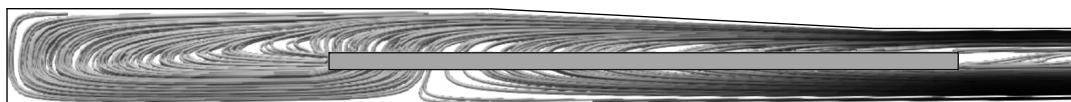


Рис. 10. Линии тока газа при горении шашки в момент процесса выстрела, близкий к достижению максимального давления в камере ($t = 10$ мс)

На рис. 11 представлены графики изменения перепада давления $\Delta p = p_k - p_3$ между внутренней (канал) и внешней (зазор) областями горения шашки по ее длине. Область избыточного давления устойчиво находится внутри пороховых трубок, поскольку напряженность горения, определяемая через параметр Ю. А. Победоносцева, там выше. Отношение параметров Ю. А. Победоносцева канала κ_k и зазора κ_3 в данном примере составляет $\frac{\kappa_k}{\kappa_3} = \frac{500}{150}$ в начале горения и $\frac{\kappa_k}{\kappa_3} = \frac{125}{67}$ в конце горения.

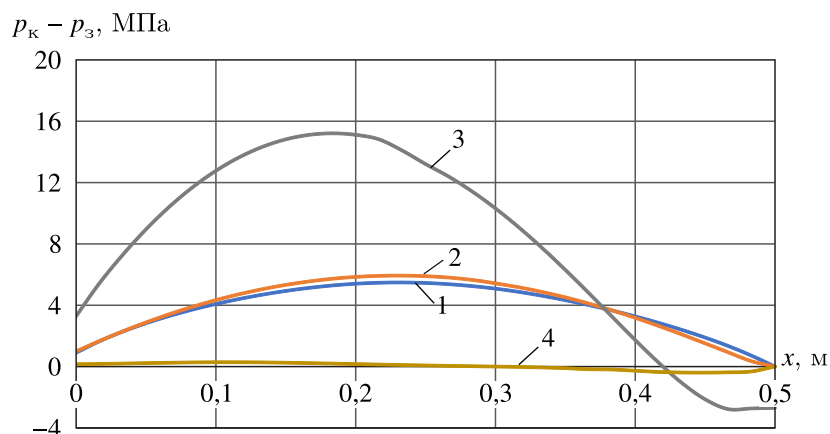


Рис. 11. Распределение перепада давления между внутренней и внешней областями горения шашки по длине шашки в различные моменты времени процесса выстрела: 1 – 0,2 мс, 2 – 4,0 мс, 3 – 8,0 мс, 4 – 14,1 мс

На рис. 12 представлена динамика перепада давления между каналом и зазором в среднем сечении пороховой трубки. Видно, что перепад давления может достигать 20 МПа. Вопрос о разрушении трубки, толщина которой составляет несколько мм, остается открытым.

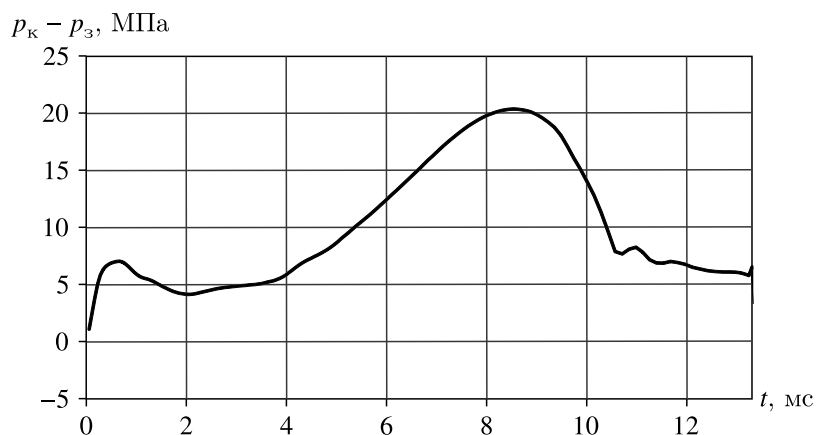


Рис. 12. Динамика перепада давления между каналом и зазором в среднем сечении трубчатого порохового элемента

На рис. 13–16 приведены изменения геометрических характеристик трубчатого порохового элемента за счет горения и деформации в процессе выстрела. Можно констатировать, что деформации являются существенными, например, длина порохового элемента изменилась на 14% (см. рис. 13). При этом поперечные деформации порохового элемента неравномерны по его длине (см. рис. 14–16). Все это приводит к изменению геометрии горячей поверхности пороха.

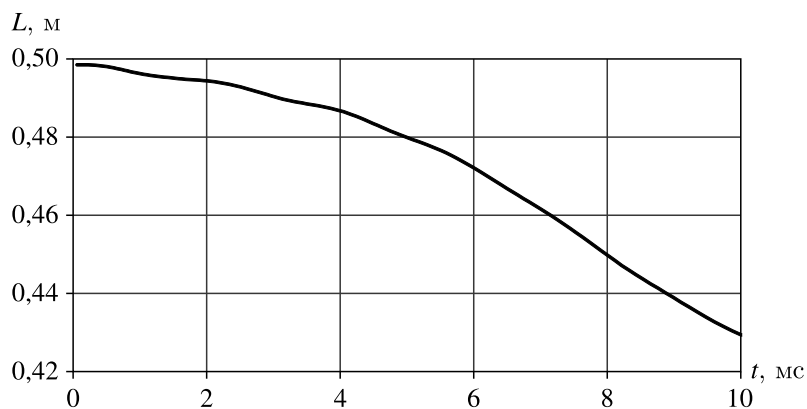


Рис. 13. Динамика изменения длины трубчатого порохового элемента в процессе выстрела

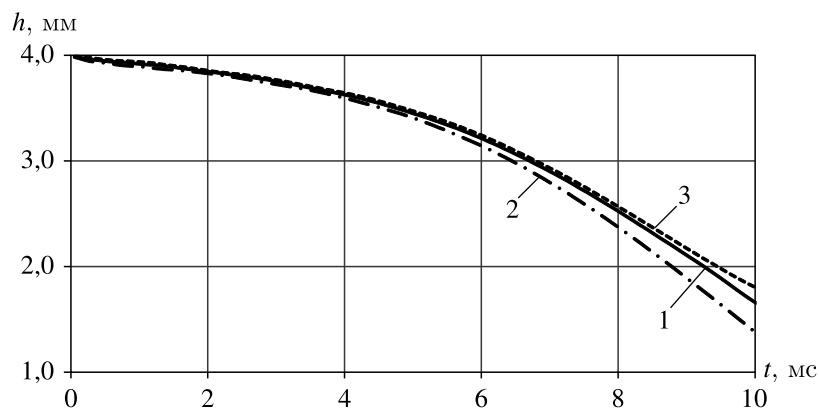


Рис. 14. Динамика изменения толщины свода трубчатого порохового элемента в процессе выстрела: 1 — в среднем сечении трубки, 2 — в точке минимума, 3 — в точке максимума

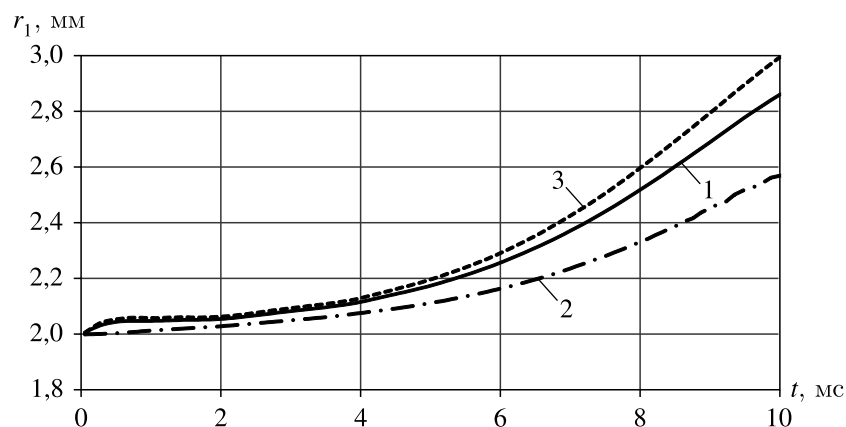


Рис. 15. Динамика изменения внутреннего радиуса трубчатого порохового элемента в процессе выстрела: 1 — в среднем сечении трубки, 2 — в точке минимума, 3 — в точке максимума

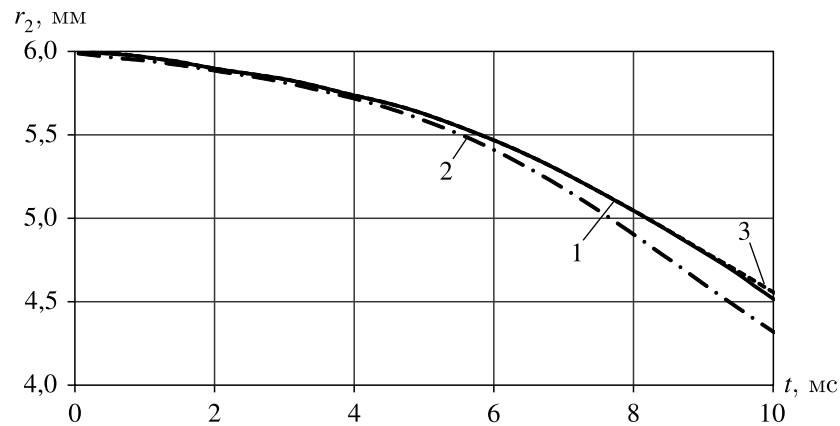


Рис. 16. Динамика внешнего радиуса трубчатого порохового элемента в процессе выстрела: 1 — в среднем сечении трубки, 2 — в точке минимума, 3 — в точке максимума

Распределения эквивалентных напряжений по объему горящего трубчатого порохового элемента в различные моменты времени процесса выстрела даны на рис. 17–19.

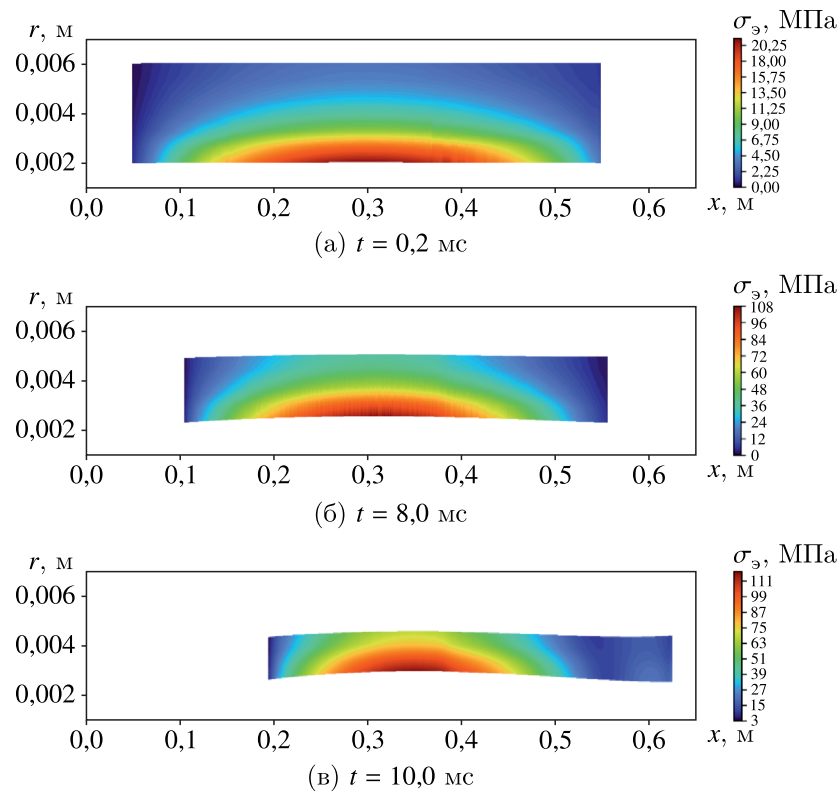


Рис. 17. Распределение эквивалентных напряжений (σ_3 , МПа) внутри горящего трубчатого порохового элемента, перемещающегося по каналу ствола, в различные моменты времени процесса выстрела

Если обратиться к изменению уровня эквивалентных напряжений, действующих на материал пороховой трубки (см. рис. 18 и 19), то следует отметить, что в период выстрела значительная часть пороховой трубки находится в области, где эквивалентные напряжения превосходят предел прочности на сжатие $\sigma_{сж}^п = 80$ МПа, следовательно, это может привести к их разрушению.

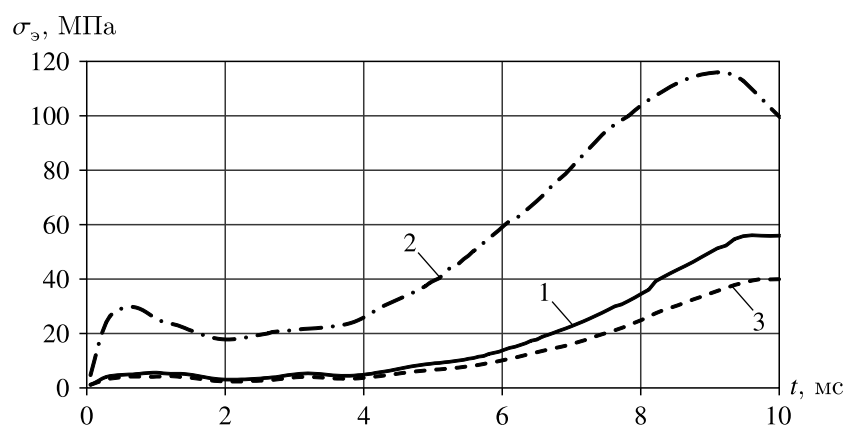


Рис. 18. Динамика эквивалентных напряжений в среднем сечении трубчатого порохового элемента в процессе выстрела при: 1 – $r = r_1 + 0,5r_2$, 2 – $r = r_1$, 3 – $r = r_2$

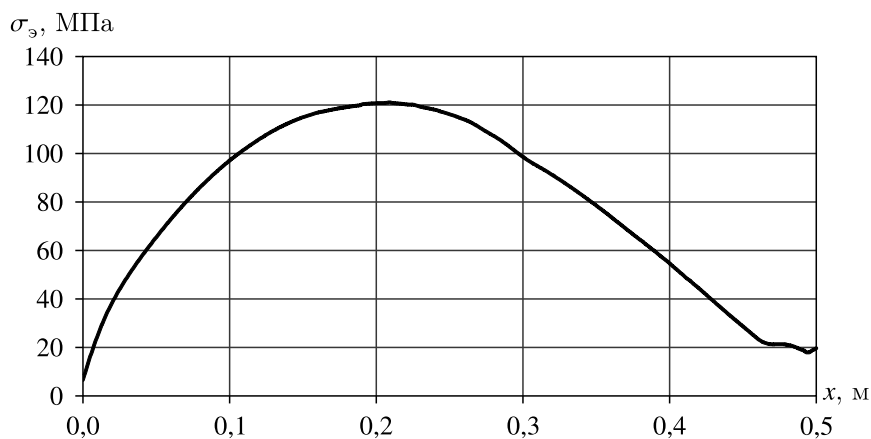


Рис. 19. Эпюра максимальных эквивалентных напряжений по длине трубчатого порохового элемента

7. Заключение

Как следует из представленных материалов, баллистика зарядов, состоящих из трубчатых порохов, во многом определяется условиями неравномерного горения внутри и вне каналов пороховых трубок, при этом учет многомерности газодинамического течения позволяет более детально описать картину течения и открывается возможность решения задачи о напряженно-деформированном состоянии трубчатых пороховых элементов.

Полученные результаты дают представления об уровне эквивалентных напряжений, действующих в различных точках порохового элемента, и их динамике, из которых следует, что в процессе выстрела существует интервал времени, когда на значительной части пороховой трубки эквивалентные напряжения могут превосходить предел прочности.

Авторы отдают себе отчет, что настоящая публикация содержит больше вопросов, чем ответов, поскольку проблема напряженно-деформированного состояния и прочности пороховых элементов поднимается впервые. Одним из важных вопросов в данном случае является вопрос об адекватности математического моделирования. Она зависит как от допущений, так и от точности исходных данных, закладываемых в модель. Наиболее сильное допущение, которое использовано в данной работе, — это отсутствие влияния напряженно-деформированного состояния пороховых элементов на решение газодинамической задачи. Следует также отметить, что в настоящий момент отсутствуют данные по механическим характеристикам материала пороховых

элементов для высоких давлений и высоких скоростей нагружения, характерных для условий выстрела. Нет данных по механизму разрушения пороховых элементов и влиянию температуры на этот процесс. При низких температурах материал пороха является хрупким, что может приводить к растрескиванию пороховой трубки на многие осколки. При повышении температуры материал пороха становится вязкопластичным, что может приводить к разрушению порохового элемента вдоль образующей. Понятно, что последствия этих двух типов разрушения различны с точки зрения влияния на баллистику. Немаловажным является также тот факт, когда наступает разрушение — на восходящей ветви кривой «давление–время» или на нисходящей ветви. Чтобы получить ответы на эти и многие другие вопросы, необходимо соответствующее экспериментальное обеспечение в части прочностных характеристик и реологии материала пороховых элементов. Очевидно, что эффекты прочности пороховых элементов наиболее сильно проявятся при увеличении мощности выстрела, когда необходимо увеличивать динамику и уровень давления в камере орудия.

Список литературы (References)

- Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Kraiko A. N., Prokopov G. P. Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. — Moscow: Nauka, 1976. — 400 p. (in Russian).
- Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method in Engineering. — London, New York, McGraw-Hill: Science, 1971. — 521 p. (Original Russian paper: *Zenkevich O.* Metod konechnykh elementov v tekhnike. — Moscow: Mir, 1975. — 541 p.)
- Косточко А. В., Казбан Б. М. Пороха, ракетные твердые топлива и их свойства. — М.: ИНФРА-М, 2014. — 400 с.
Kostochko A. V., Kazban B. M. Poroha, raketnye tverdye topliva i ih svoystva [Gunpowder, rocket solid propellants and their properties]. — Moscow: INFRA-M, 2014. — 400 p. (in Russian).
- Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
Lurie A. I. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. — Moscow: Nauka, 1970. — 940 p. (in Russian).
- Прокопов Г. П., Северин А. В. Экономичная реализация метода Годунова // Препринты ИПМ имени М. В. Келдыша. — Москва, 2009. — № 29. — 24 с. — URL: https://keldysh.ru/papers/2009/prep29/prep2009_29.pdf (дата обращения: 03.07.2020).
Prokopov G. P., Severin A. V. Ekonomichnaya realizatsiya metoda Godunova [Cost-effective implementation of the Godunov method] // KIAM Preprint. — Moscow, 2009. — No. 29. — 24 p. (in Russian). — Available at: https://keldysh.ru/papers/2009/prep29/prep2009_29.pdf (accessed: 03.07.2020).
- Рогов Н. Г., Груздев Ю. А. Физико-химические свойства порохов и твердых топлив. — СПб.: СПбГТИ (ТУ), 2004. — 200 с.
Rogov N. G., Gruzdev Yu. A. Fiziko-himicheskie svoystva porohov i tverdykh topliv [Physical and chemical properties of gunpowders and solid propellants]. — St. Petersburg: SPbGTI (TU), 2004. — 200 p. (in Russian).
- Руденко М. С., Быстров Д. И., Лукишин М. Г., Тихоненко Е. С. Расчет напряжения заряда твердого топлива в модельном ракетном двигателе // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. — 2018. — Т. 1, № 14. — С. 133–135.
Rudenko M. S., Bystrov D. I., Lukishin M. G., Tikhonenko E. S. Calculation of voltage charge of solid fuel in model rocket engines // Aktual'nye problemy aviacii i kosmonavтики [Actual problems of aviation and astronautics]. — 2018. — Vol. 1, No. 14. — P. 133–135 (in Russian).
- Русяк И. Г., Тенев В. А. К вопросу о численном моделировании внутренней баллистики для трубчатого заряда в пространственной постановке // Компьютерные исследования и моделирование. — 2021. — Т. 13, № 5. — С. 993–1010. — DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-5-993-1010
Rusyak I. G., Tenenev V. A. K voprosu o chislennom modelirovanii vnutrennei ballistiki dlya trubchatogo zaryada v prostranstvennoi postanovke [On the issue of numerical modeling of internal ballistics for a tubular charge in a spatial setting] // Computer Research and Modeling. — 2021. — Vol. 13, No. 5. — P. 993–1010 (in Russian). — DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-5-993-1010

- Сафронов А. В., Фомин Ю. В.* Метод численного решения уравнений газодинамики с помощью соотношения на разрывах // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 2. — С. 137–148.
Safronov A. V., Fomin Yu. V. Metod chislennogo resheniya uravnenii gazodinamiki s pomoshch'yu sootnosheniya na razryvakh [A method for the numerical solution of gas dynamics equations using a discontinuity relation] // Proceedings of the Moscow Institute of Physics and Technology. — 2010. — Vol. 2, No. 2. — P. 137–148 (in Russian).
- Секулович М.* Метод конечных элементов. — М.: Стройиздат, 1993. — 664 с.
Sekulovich M. Metod konechnykh elementov [The Finite Element Method]. — Moscow: Stroyizdat, 1993. — 664 p. (in Russian).
- Серебряков М. Е.* Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. — М.: Оборонгиз, 1962. — 703 с.
Serebryakov M. E. Vnutrennyaya ballistika stvol'nykh sistem i porokhovykh raket [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. — Moscow: Oborongiz, 1949. — 703 p. (in Russian).
- Соркин Р. Е.* Газотермодинамика ракетных двигателей на твердом топливе. — М.: Наука, 1967. — 368 с.
Sorkin R. E. Gazotermodinamika raketnykh dvigatelei na tverdom toplive [Gas-thermodynamics of solid-propellant rocket engines]. — Moscow: Nauka, 1967. — 368 p. (in Russian).
- Яковина В. В., Малинин В. И.* Учет деформации заряда твердого топлива при расчете внутрибаллистических параметров // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. — 2017. — № 48. — С. 16–25. — DOI: 10.15593/2224-9982/2017.48.02
Yakovina V. V., Malinin V. I. Calculation of internal ballistics parameters with consideration of the solid propellant grain deformation // PNRPU Aerospace Engineering Bulletin. — 2017. — No. 48. — P. 16–25 (in Russian). — DOI: 10.15593/2224-9982/2017.48.02
- Fujino S.* GPBiCG(m, ℓ). A hybrid of BiCGSTAB and GPBiCG methods with efficiency and robustness // Applied Numerical Mathematics. — 2002. — Vol. 41, Issue 1. — P. 107–117. — DOI: 10.1016/S0168-9274(01)00113-1.
- MathNet.Numerics. A Generalized Product Bi-Conjugate Gradient iterative matrix solver. — Available at: <https://numerics.mathdotnet.com/api/MathNet.Numerics.LinearAlgebra.Single.Solvers/GpBiCg.htm> (accessed: 14.07.2022).
- Trębiński R., Janiszewski J., Leciejewski Z., Surma Z., Kamińska K.* On influence of mechanical properties of gun propellants on their ballistic characteristics determined in closed vessel tests // Materials (Basel). — 2020. — Vol. 13, No. 14. — P. 3243. — DOI: 10.3390/ma13143243
- Zhang R., Rui X., Li Ch., Wang Y., Zhao X., Dong X.* A calculation method of interior ballistic two-phase flow considering the compression and fracture process of propellant bed // International Communications in Heat and Mass Transfer. — 2020 — Vol. 115, No. 4. — P. 104601. — DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104601
- Zhang H., Zhou J., Yang L., Zhao B., Liu L.* Effects of temperature on the dynamic mechanical properties of granular gun propellant // Chin. J. Explos. Propellants. — 2015. — Vol. 38. — P. 86–88.