

УДК: 531.19, 330.43

Неэкстенсивная статистика Тсаллиса системы контрактов организаций оборонно-промышленного комплекса

А. Б. Попов

Акционерное общество «Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор»,
Государственный научный центр РФ,
Россия, 197046, г. Санкт-Петербург, ул. Малая Посадская, д. 30

E-mail: apopov@eprib.ru

Получено 07.03.2022, после доработки — 26.07.2022.

Принято к публикации 09.08.2022.

В работе проведен анализ системы контрактов, заключаемых организациями оборонно-промышленного комплекса России в процессе выполнения государственного оборонного заказа. Сделан вывод, что для описания данной системы может быть использована методология статистической механики. По аналогии с подходом, применяемым при рассмотрении большого канонического ансамбля Гиббса, изучаемый ансамбль сформирован в виде набора мгновенных «картинок», образованных из действующих в каждый момент времени неразличимых контрактов со своими стоимостями. Показано, что ограничения, накладываемые государством на процесс ценообразования, являются причиной того, что совокупность контрактов может быть отнесена к категории так называемых сложных систем, для описания которых используется неэкстенсивная статистика Тсаллиса. Это приводит к тому, что стоимостные распределения контрактов должны соответствовать деформированному распределению Бозе–Эйнштейна, полученному с использованием энтропии Тсаллиса. Данный вывод справедлив как для всей совокупности контрактов, заключаемых участниками выполнения государственного оборонного заказа, так и контрактов, заключаемых отдельной организацией в качестве исполнителя.

Для анализа степени соответствия эмпирических стоимостных распределений модифицированному распределению Бозе–Эйнштейна в настоящей работе использован метод сравнения соответствующих функций распределения вероятностей. В работе делается вывод о том, что для изучения стоимостных распределений контрактов отдельной организации в качестве анализируемых данных можно использовать сформировавшиеся за календарный год распределения выручки по отдельным заказам, соответствующим заключенным контрактам. Получены эмпирические функции распределения вероятностей ранжированных значений выручки от реализации по отдельным заказам АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», одной из ведущих приборостроительных организаций ОПК России, с 2007 по 2021 год. Наблюдается хорошее согласие между эмпирическими и теоретическими функциями распределений вероятностей, рассчитанными с использованием деформированных распределений Бозе–Эйнштейна в пределе «разряженного газа контрактов». Полученные на основе эмпирических данных значения параметров энтропийного индекса для каждого из изученных распределений выручки свидетельствуют о достаточно высокой степени неаддитивности, присущей изучаемой системе. Показано, что для оценки характеристических стоимостей распределений можно использовать величину среднего значения годовой выручки, рассчитанного с помощью нормированного эскортного распределения. Факт наилучшего согласия эмпирических и теоретических функций распределения вероятностей при нулевых значениях химического потенциала позволяет сделать предположение, что изучаемый «газ контрактов» можно сравнить с газом фотонов, в котором число частиц не является постоянным.

Ключевые слова: экономическая физика, статистика Тсаллиса, сложные системы, стоимостные распределения контрактов, деформированное распределение Бозе–Эйнштейна

UDC: 531.19, 330.43

Nonextensive Tsallis statistics of contract system of prime contractors and subcontractors in defense industry

A. B. Popov

Concern CSRI Elektropribor, JSC, State Research Centre of Russian Federation,
30 Malaya Posadskaya st., St. Petersburg, 197046, Russia

E-mail: apopov@eprib.ru

*Received 07.03.2022, after completion – 26.07.2022.
Accepted for publication 09.08.2022.*

In this work, we analyze the system of contracts made by Russian defense enterprises in the process of state defense order execution. We conclude that methods of statistical mechanics can be applied to the description of the given system. Following the original grand-canonical ensemble approach, we can create the statistical ensemble under investigation as a set of instant snapshots of indistinguishable contracts having individual values. We show that due to government regulations of contract prices the contract system can be described in terms of nonextensive Tsallis statistics. We have found that probability distributions of contract prices correspond to deformed Bose–Einstein distributions obtained using nonextensive Tsallis entropy. This conclusion is true both in the case of the whole set of contracts and in the case of the contracts made by an individual defense company as a seller.

In order to analyze how deformed Bose–Einstein distributions fit the empirical contract price distributions we compare the corresponding cumulative distribution functions. We conclude that annual distributions of individual sales which correspond to each company's contract (order) can be used as relevant data for contract price distributions analysis. The empirical cumulative distribution functions for the individual sales ranking of Concern CSRI Elektropribor, one of the leading Russian defense companies, are analyzed for the period 2007–2021. The theoretical cumulative distribution functions, obtained using deformed Bose–Einstein distributions in the case of «rare contract gas» limit, fit well to the empirical cumulative distribution functions. The fitted values for the entropic index show that the degree of nonextensivity of the system under investigations is rather high. It is shown that the characteristic prices of distributions can be estimated by weighing the values of annual individual sales with the escort probabilities. Given that the fitted values of chemical potential are equal to zero, we suggest that «gas of contracts» can be compared to photon gas in which the number of particles is not conserved.

Keywords: econophysics, Tsallis statistics, complex systems, contract price distributions, Bose–Einstein distribution

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 5, pp. 1163–1183 (Russian).

1. Введение

В середине 90-х годов прошлого столетия вместе с рождением термина «эконофизика» стало окончательно понятно, что методология статистической физики может с успехом применяться при изучении отдельных характеристик различных финансовых и экономических систем [Yakovenko, Rosser, 2009]. Начав с анализа финансовых рынков, исследователи вскоре всё большее внимание стали уделять изучению экономических объектов. Это связано с тем, что статистическая механика и экономика изучают свойства больших статистических ансамблей: с одной стороны, атомов (молекул), а с другой — отдельных экономических агентов или иных объектов, отражающих характер экономических отношений. Кроме того, в экономической системе могут существовать сохраняющиеся во времени параметры, характеризующие ее макроскопические свойства.

Фундаментальным законом равновесной статистической механики является распределение Гиббса (Больцмана–Гиббса — в зарубежной научной литературе). Оно определяет статистическое распределение $P(\varepsilon)$ любого макроскопического тела, являющегося малой частью большой замкнутой системы, по состояниям с энергией ε и имеет вид экспоненциальной функции:

$$P(\varepsilon) = A \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right),$$

где A — нормировочная константа, T — температура¹. Главными условиями вывода распределения Гиббса являются условие сохранения энергии в большой системе и ее статистический характер. Опираясь на этот фундаментальный постулат, в работе [Dragulescu, Yakovenko, 2000] было сделано предположение, что распределение Гиббса может быть применено для описания других статистических систем, имеющих сохраняющиеся величины. Такими свойствами обладают, в частности, изолированные экономические системы, поскольку их можно рассматривать как большой статистический ансамбль, и по аналогии с законом сохранения энергии в физике в данных системах должны сохраняться деньги. Действительно, экономические агенты, являющиеся субъектами экономических отношений и при этом количество которых можно считать неизменным, в процессе хозяйственной деятельности могут только обмениваться деньгами с другими агентами, они не могут их «производить». Когда агент i , имеющий в своем распоряжении денежные средства в размере m_i , передает сумму в размере Δm_{ij} за товары или услуги агенту j , обладающему средствами m_j , их денежный баланс изменяется следующим образом:

$$m'_i = m_i - \Delta m_{ij}, \quad m'_j = m_j + \Delta m_{ij}. \quad (1)$$

При этом остается неизменным как суммарное количество денег M в системе, так и общее количество денег у данных агентов до и после транзакции:

$$M = \sum_i m_i = \text{const}, \quad m_i + m_j = m'_i + m'_j. \quad (2)$$

Общую денежную массу может изменить только центральный банк при проведении соответствующей эмиссии. Однако до тех пор, пока скорость изменения денежной массы невелика, а релаксационные процессы, протекающие в экономике конкретной страны, отрабатывают вызванные дополнительной эмиссией изменения, систему можно рассматривать как находящуюся в равновесном квазистационарном состоянии с медленно меняющимися параметрами. В работе [Yakovenko, Rosser, 2009] было показано, что компьютерное моделирование процесса обмена

¹ В данном выражении постоянная Больцмана k принята равной единице, что дает возможность выражать температуру в единицах измерения энергии.

денежных средств между экономическими агентами при выполнении условий (1) и (2) в результате приводит к установлению равновесного распределения $P(m)$ денежных средств m у субъектов экономических отношений, совпадающего по своему виду с распределением Гиббса:

$$P(m) = A \exp\left(-\frac{m}{T}\right), \quad (3)$$

где T — так называемая денежная температура, равная среднему количеству денег, приходящихся на одного экономического агента, A — нормировочная константа.

Работа [Dragulescu, Yakovenko, 2000] дала серьезный толчок к началу активных исследований распределений денег, доходов и имущества, возникающих у субъектов экономических отношений в результате их хозяйственной деятельности. Процесс передачи денег, описываемый выражением (1), эквивалентен обмену энергии в процессе столкновений частиц в идеальном газе, а условия (2) — закону сохранения энергии. Данные аналогии между поведением экономических агентов, с одной стороны, и независимых друг от друга атомов или молекул в идеальном газе, с другой, стали платформой, на которой были построены так называемые кинетические модели обмена денег, доходов и накопленного имущества (см., например, обзоры [Chatterjee, Chakrabarti, 2007; Patriarca, Heinsalu, Chakraborti, 2010; Patriarca, Chakraborti, 2013; Yakovenko, Rosser, 2009]). Данные модели, несмотря на свою относительную простоту, позволяют достаточно хорошо описать эмпирические данные [Banerjee, Yakovenko, Matteo, 2006; Chatterjee, Chakrabarti, 2007; Dragulescu, Yakovenko, 2001a; Dragulescu, Yakovenko, 2001b], свидетельствующие о том, что большая часть распределения доходов населения в различных странах имеет экспоненциальный характер (3). В то же время часть распределения, соответствующая расходам и доходам небольшой (2 ÷ 3 %) наиболее обеспеченной части населения, представляет собой степенное распределение, часто называемое распределением Парето.

Обобщение указанного выше подхода на случай, когда в рассматриваемой экономической системе общее количество экономических агентов и находящихся у них денег может изменяться, было предложено Кусмарцевым [Kusmartsev, 2011]. В данной работе по аналогии с описанием в статистической механике систем, в котором число частиц и их энергия не являются постоянными величинами [Ландау, Лившиц, 2002], было предположено, что если эти изменения происходят медленно, а средние значения рассматриваемых величин на достаточно длительном интервале времени можно считать постоянными, то к описанию классического конкурентного рынка может быть применена методология большого канонического ансамбля. Рынок труда был представлен в виде большого канонического ансамбля неразличимых между собой индивидуальных экономических агентов. Как результат, равновесные статистические распределения капиталов, денег и доходов описываются распределением Бозе – Эйнштейна.

Статистика Бозе – Эйнштейна может быть использована для описания и других закономерностей в экономических системах. Так, в работе [Hernández-Pérez, 2010] было предположено, что существует аналогия между рядом упорядоченных по размеру получаемых доходов бизнес-компаний (фирм) и идеальным газом бозе-частиц. Было показано, что эмпирические кумулятивные функции распределения фирм в разных странах, ранжированных по уровню годовой выручки от реализации продукции, могут быть также описаны распределением Бозе – Эйнштейна.

Согласно [Тао, 2010] распределение количества фирм по различным отраслям производства, для каждого из уровней предложений рынка, на длительном временном интервале подчиняется законам, вытекающим из классической статистической механики: статистика Бозе – Эйнштейна описывает совершенные конкурентные рынки, в то время как статистика Больцмана подходит для случая монополистически-конкурентного рынка.

Статистики, используемые при описании поведения квантовых частиц с разными значениями спинов, могут быть применены для описания экономических и социальных систем с иерар-

хической структурой. В работе [Rashkovskiy, 2019] было показано, что в таких системах присутствуют элементы, подчиняющиеся как статистике Бозе – Эйнштейна, так и статистике Ферми – Дирака. Кроме того, по мнению автора, предложенный подход позволяет, по крайней мере на качественном уровне, объяснить отмеченные выше отличия в законах распределения населения с низкими и высокими доходами.

В проведенных ранее теоретических работах, направленных на изучение образующихся у экономических агентов распределений денег и доходов, предполагалось, что в отдельном акте экономических отношений агент i случайным образом передает другому агенту j некоторую величину денежных средств или имущества Δm_{ij} . В каждом отдельном случае величина Δm_{ij} имеет свой функциональный вид и определяет динамические характеристики соответствующей теоретической модели (см., например, [Patriarca, Heinsalu, Chakraborti, 2010]). При этом, как правило, не учитывалось следующее обстоятельство. В процессе осуществления хозяйственной деятельности экономические субъекты обмениваются товарами и услугами в различных количествах и по различной стоимости. Например, люди в своей повседневной жизни покупают повседневные дешевые товары намного чаще, чем эксклюзивные и дорогие. Это должно приводить к возникновению вероятностных распределений величин Δm_{ij} . Однако, несмотря на эту достаточно очевидную характерную особенность процесса обмена, целенаправленных теоретических и эмпирических исследований по изучению распределений величин Δm_{ij} , возникающих в процессе отношений между экономическими агентами (физическими или юридическими лицами), до настоящего времени не проводилось. Изучение таких распределений представляет большой самостоятельный интерес, поскольку позволяет лучше понять не только механизмы формирования данных распределений, но и природу рассматриваемой экономической системы в целом. Кроме того, характер обмена денежными средствами в решающей степени влияет на формирование конечных распределений доходов субъектов экономических отношений.

Если в какой-либо выделенной системе экономическими агентами являются не отдельные граждане, а организации, то тогда в качестве величины Δm_{ij} естественно принять значение стоимости контрактов, заключаемых между хозяйствующими субъектами, поскольку контракт является основным и, как правило, единственным документом, фиксирующим правовые и хозяйственно-экономические отношения между организациями. Как следствие, исследование распределений величин передаваемых денежных средств Δm_{ij} в таких системах сведется к нахождению вероятности обнаружить в системе заключенный контракт с заданной стоимостью ε .

Целью настоящей работы является исследование методами статистической механики стоимостных распределений контрактов, формирующихся в процессе хозяйственной деятельности юридических лиц. В качестве изучаемой выбрана система, образованная государственным заказчиком и организациями оборонно-промышленного комплекса (ОПК) России, участвующими в выполнении государственного оборонного заказа (ГОЗ). Выбор данной системы в качестве объекта исследования обусловлен, во-первых, ее изолированным характером, что позволяет при ее изучении применять методы статистической механики, а во-вторых — возможностью на примере одной из организаций ОПК получить прямые эмпирические данные по стоимостным распределениям контрактов. Последнее обстоятельство достаточно важно, поскольку в случае изучения распределений доходов отдельных физических лиц источниками информации служат только косвенные данные: сведения налоговых и статистических органов различных стран [Dragulescu, Yakovenko, 2001a; Dragulescu, Yakovenko, 2001b] или данные о расходах населения на покупку товара определенного вида [Галкин и др., 2009; Гаранина, Романовский, 2012].

2. Моделирование стоимостных распределений контрактов

Рассмотрим сначала характерные черты системы ОПК России, которые позволяют при исследовании ее свойств использовать методы статистической механики¹. Одна из наиболее

¹ Все нижесказанное, скорее всего, применимо и к системам ОПК других стран.

существенных особенностей — возможность выделить в системе несколько величин, сохраняющих свои значения в течение достаточно длительного интервала времени, что дает основания отнести ее к категории изолированных. Во-первых, это количество организаций, участвующих в выполнении ГОЗ. В Российской Федерации их состав очень стабилен. Это связано главным образом с тем, что абсолютное большинство существующих предприятий ОПК России были созданы во времена СССР для разработки и производства тех или иных конкретных конечных образцов вооружения и военной техники или их составных частей и до настоящего времени во многом сохраняют соответствующую функциональную направленность. Не изменил ситуацию и процесс создания интегрированных структур в системе ОПК. Формирование крупных вертикальных холдингов фактически закрепило количественный состав крупных и средних компаний, участвующих в выполнении ГОЗ. Безусловно, к реализации ГОЗ привлекаются и небольшие по размеру компании. Однако в силу специфики деятельности их состав также достаточно стабилен.

Во-вторых, можно считать, что на достаточно длительном интервале времени суммарная величина денежных средств, выделенная предприятиям ОПК на выполнение ГОЗ, остается практически неизменной. Номенклатуру и объемы закупаемых видов вооружений, а также распределение по годам величин финансовых средств, выделяемых на мероприятия по созданию и производству вооружений и военной техники (ВиВТ) в среднесрочном периоде, определяет государственная программа вооружений. Реализация данной программы осуществляется главным образом через ГОЗ, величина которого в денежном выражении закреплена бюджетом страны. Фактический объем ГОЗ может корректироваться по отношению к плановым значениям. Однако такая корректировка производится, как правило, не чаще одного раза в год. Кроме того, если страна не переживает острой кризисной ситуации или не происходит каких-нибудь форс-мажорных обстоятельств, величина изменений в относительном выражении невелика.

Суммарный объем ГОЗ распределяется между организациями ОПК следующим образом. На начальной стадии государственный заказчик в соответствии с выделенными объемами финансирования заключает государственные контракты на производство и/или разработку соответствующих видов ВиВТ с предприятиями ОПК, выполняющими роль головных исполнителей. Очевидно, что суммарная стоимость всех государственных контрактов равна величине средств, выделенных на выполнение ГОЗ. Далее в ходе выполнения каждого государственного контракта между организациями ОПК формируются кооперационные цепочки, образованные в соответствии с производственно-технологическими особенностями предприятий и формализованные в виде контрактных отношений между всеми участниками выполнения ГОЗ.

Вся совокупность участников выполнения ГОЗ и заключенных в ходе его выполнения контрактов может быть представлена в виде ориентированного взвешенного мультиграфа. Граф имеет сложную, но при этом достаточно четко выраженную иерархическую структуру. Корневая вершина (нулевой уровень структуры) соответствует государственному заказчику, остальные вершины графа — организациям ОПК. Головные исполнители ГОЗ являются соисполнителями первого уровня иерархической структуры. Далее идет процесс заключения договоров по всей цепочке кооперации. Отметим, что вследствие специфики отрасли организация ОПК может выполнять функцию как головного исполнителя ГОЗ, так соисполнителя любого другого уровня. Ребра графа E_{ij}^{kp} с весом ε_{ij}^{kp} , направленные от вершины V_i к вершине V_j , соответствуют передаче денежных средств между двумя организациями в размере стоимости заключенного контракта ε_{ij}^{kp} . Верхний индекс $k = (1 \dots K)$ идентифицирует соответствующий государственный контракт, число контрактов равно K , а индекс $p = (1 \dots P)$ отображает порядковый номер договора в случае заключения нескольких контрактов между государственным заказчиком и организацией ОПК или двумя организациями ОПК в рамках выполнения одного госконтракта. Значение веса каждого ребра (стоимости контракта) формируется следующим образом. Стоимость любого контракта, заключенного организацией V_j с организацией V_i (V_j — заказчик, V_i — исполнитель) в обеспече-

нии выполнения госконтракта k , складывается из двух составляющих: стоимости ε_i^{kp} , созданной непосредственно организацией V_i при выполнении контракта p госконтракта k , а также стоимости, привнесенной всеми соисполнителями организации V_i , задействованными в выполнении данного госконтракта k :

$$\varepsilon_{ij}^{kp} = \varepsilon_i^{kp} + \sum_{p', j'} \varepsilon_{ij'}^{kp'} \quad (4)$$

Стоимость контрактов соисполнителей самого низшего уровня в иерархической структуре выполнения госконтракта равна только стоимости собственных работ данной организации. С другой стороны, чем выше уровень соисполнителя (чем ниже порядковый номер его уровня в иерархической структуре), тем большее влияние на стоимость контракта оказывают соисполнители более низких уровней. Соответственно, стоимость государственных контрактов полностью складывается из стоимости работ всех организаций, участвующих в его выполнении. Следует отметить, что при производстве отдельных наиболее сложных образцов ВиВТ возникающие цепочки имеют очень разветвленную и достаточно сложную структуру, а общее число заключаемых контрактов может достигать 10^4 ед. Очевидно, что суммарное количество заключенных контрактов всеми организациями ОПК за время выполнения ГОЗ (общее число ребер графа) существенно больше.

Однако процесс оформления договорных отношений носит динамический характер, поскольку как государственные контракты, так и договоры между организациями по всей цепочке кооперации заключаются не одновременно. Кроме того, каждый контракт имеет индивидуальную длительность исполнения. После выполнения сторонами всех обязательств он перестает действовать. Как следствие, число действующих в каждый момент времени контрактов не является постоянной величиной. Это означает, что реальная картина, моделирующая контрактные отношения между участниками выполнения ГОЗ, становится зависящей от времени и может быть представлена в виде изменяющейся последовательности обычных «классических» графов, переход между которыми описывается операциями добавления/удаления ребер и вершин. Подобные ситуации рассматриваются в зарождающейся в настоящее время динамической теории графов [Кочкаров, Кочкаров, Малинецкий, 2015]. Основным объектом теории является динамический граф, представляющий собой последовательность конечных невзвешенных (не всегда связанных) графов $G_1, G_2, \dots, G_l, \dots$, в которой переход от графа G_l к последующему графу G_{l+1} осуществляется с помощью операции $\varphi(G_l) = G_{l+1}$. В настоящей работе, в отличие от [Кочкаров, Кочкаров, Малинецкий, 2015], мы имеем дело со взвешенным динамическим графом, в котором вес ребер соответствует стоимостям контрактов.

Для того чтобы понять, насколько идеология и методы динамической теории графов применимы при изучении систем, подобных рассматриваемой в настоящей работе, необходимы дополнительные исследования. Для целей же настоящей работы важным является следующее обстоятельство. В силу того, что основные макропроцессы, протекающие в ОПК, достаточно длительны (технологические циклы изготовления большей части продукции, производимой организациями ОПК, и сроки действия контрактов имеют продолжительность от нескольких месяцев до нескольких лет), динамика изменения общего количества действующих контрактов достаточно медленная. Это обстоятельство дает основание сделать следующее предположение. В то время как общее число контрактов и их суммарная стоимость не являются постоянными во времени величинами, их средние значения в большинстве случаев изменяются, но изменяются достаточно медленно, так что на длительном интервале времени Δt этими изменениями можно пренебречь и считать данные средние значения постоянными. В статистической механике система, в которой может изменяться не только энергия, но и число частиц, ассоциируется с большим каноническим ансамблем (см., например, [Ландау, Лившиц, 2002]). Как следствие, если продолжить аналогию со статистической механикой, то всю совокупность контрактов можно

попытаться представить в виде большого канонического ансамбля, в котором роль частиц, находящихся в системе в различных энергетических состояниях, играют контракты со своими стоимостями. При этом необходимо принять во внимание еще одно обстоятельство. Любой контракт, заключаемый двумя юридическими лицами в процессе хозяйственной деятельности, содержит большое количество условий и обязательств. Однако для случая изучения стоимостных распределений необходимо учитывать только один существенный атрибут контракта — его стоимость (цену). При этом совершенно неважно, какие организации и на какой предмет заключают между собой контракт. Имеет значение только цена договора. Перестановка местами двух контрактов не приведет ни к каким изменениям в стоимостных распределениях. Как следствие, контракты с одинаковой стоимостью должны считаться неразличимыми. Данное утверждение вытекает, вообще говоря, из свойства тождественности денежных знаков одинакового достоинства [Маслов, 2006]. Более того, нет никаких априорных ограничений, препятствующих реализации ситуации, когда разные контракты будут иметь одинаковые стоимости. Иными словами, если продолжить аналогии с физическими объектами, отсутствует предел на число контрактов (частиц) с определенной стоимостью (энергией): $0 \leq n_i < \infty$. Следовательно, можно предположить, что изучаемый в настоящей работе статистический ансамбль должен вести себя подобно идеальному газу бозе-частиц.

Поскольку число действующих контрактов не является постоянной величиной, можно говорить, что в различные моменты времени система будет находиться в различных микросостояниях α , каждое из которых полностью определяется набором $\alpha \equiv \{n_i\}$ действующих в конкретный момент времени неразличимых контрактов n_i , имеющих одинаковые стоимости ε_i . Тогда в каждом микросостоянии общее число контрактов N_α и их суммарная стоимость E_α определяются как

$$N_\alpha = \sum_i n_i \quad \text{и} \quad E_\alpha = \sum_i n_i \varepsilon_i. \quad (5)$$

Изучаемый ансамбль представляет собой совокупность мгновенных (сформированных в конкретный момент времени) «картинок» α действующих контрактов со своими стоимостями. В то время как величины N_α и E_α изменяются во времени, их средние значения \bar{N} и \bar{E} , соответственно, остаются неизменными, по крайней мере на достаточно длительном интервале времени. При этом

$$\sum_\alpha N_\alpha = \bar{N}A \quad \text{и} \quad \sum_\alpha E_\alpha = \bar{E}A,$$

где A — общее число мгновенных «картинок»¹. Отметим, что аналогичный подход определения микросостояний системы был использован в работе [Kusmartsev, 2011] при рассмотрении распределений индивидуальных доходов неразличимых с точки зрения рынка экономических агентов.

Далее для нахождения распределений контрактов по состояниям с различными стоимостями применим общепринятый подход нахождения равновесных распределений бозе-частиц [Ландау, Лившиц, 2002]. Для этого воспользуемся определениями термодинамического потенциала Ω и статистической суммы Z большого канонического ансамбля:

$$\Omega = -T \ln Z \quad \text{и} \quad Z = \sum_\alpha \exp \left[-\frac{E_\alpha - \mu N_\alpha}{T} \right], \quad (6)$$

где T — температура, μ — химический потенциал. Образующийся после подстановки (5) в (6) ряд представляет собой геометрическую прогрессию и для бозе-частиц должен сходиться при

¹ В рамках представления всех участников выполнения ГОЗ и заключенных контрактов в виде взвешенного динамического графа мгновенные «картинки» формируются из ребер графов G_t с соответствующими весами.

условии отрицательных значений химического потенциала. Принимая во внимание данное обстоятельство и учитывая также, что в статистической физике $\bar{n}_i = -\frac{\partial \Omega_i}{\partial \mu}$, где Ω_i — термодинамический потенциал подсистемы в состоянии i , а \bar{n}_i — среднее число частиц в данном состоянии i , окончательно для случая статического равновесия получаем следующее выражение для среднего числа контрактов со стоимостями ε_i :

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{T}\right) - 1}. \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой распределение Бозе – Эйнштейна.

Классическая статистическая механика (статистика Больцмана – Гиббса), на основании основных принципов которой выводится, в частности, распределение (7), с успехом используется при изучении широкого круга так называемых простых систем. Этим системам присущи малый диапазон пространственно-временных корреляций, марковость случайных процессов (короткая память), евклидовость геометрии фазового пространства, локальность взаимодействия между элементами системы, эргодичность динамических процессов. При этом традиционная статистическая механика строится на следующем фундаментальном принципе: если система находится в равновесии, то ее можно обнаружить с равной вероятностью в любом из доступных состояний (гипотеза молекулярного хаоса). Как следствие, фазовое пространство не содержит запрещенных состояний. Однако к статистической системе контрактов, заключаемых в рамках выполнения ГОЗ, гипотеза молекулярного хаоса, скорее всего, не может быть применена. Для нее характерна низкая хаотизация. Это проявляется в следующем. Во-первых, стоимости договоров в системе складываются не в результате каких-либо стохастических процессов, а формируются в соответствии с четкими правилами. Данные правила, за соблюдением которых строго следит государственный заказчик, направлены прежде всего на ограничение роста цен изготавливаемой продукции и выполняемых работ в рамках ГОЗ. Стоимость контрактов, как правило, не может превышать определенного предельного значения. Тогда, если в качестве фазовой координаты фазового пространства, соответствующего ансамблю действующих контрактов, определить стоимость договора, можно утверждать, что любая система договоров характеризуется существованием запрещенных состояний в фазовом пространстве. Во-вторых, в силу специфики отрасли многие организации ОПК фактически являются монополистами в своей области. Кооперационные связи с точки зрения определения производителей конкретного вида продукции практически всегда строго детерминированы. В результате даже небольшого воздействия на систему достаточно для того, чтобы серьезнейшим образом изменить поведение всей системы в целом. Например, при возникновении по каким-либо причинам непреодолимых условий, препятствующих возможности одной из организаций ОПК изготовить продукцию, единственным разработчиком и поставщиком которой она является, риск невыполнения ГОЗ многократно повышается, а для исправления ситуации необходимо принятие экстраординарных мер со стороны государства. В чисто рыночных отношениях ситуация иная. Так, в теории классического конкурентного рынка предполагается, что каждая фирма может без ограничений менять ассортимент выпускаемой продукции, свободно переходя из одной отрасли производства в другую. Это означает, что поведение конкурентного рынка может рассматриваться как стохастический процесс [Тао, 2010].

Рассматриваемому в настоящей работе статистическому ансамблю заключаемых в процессе выполнения ГОЗ контрактов присуща еще одна особенность, наличие которой не позволяет отнести ее к категории простых систем. Как отмечалось выше, цепочки кооперационных связей в пределах одного государственного контракта имеют сложную и ярко выраженную иерархическую структуру. Для системы контрактов характерна последовательная соподчиненность: контракты, заключаемые исполнителями более низкого уровня, обусловлены контрактными обязательствами исполнителей более высокого уровня. Как следствие, контракты в пределах одного

государственного контракта обладают свойством длинной памяти в значениях стоимостей контрактов. При этом чем соисполнитель «ближе» расположен к государственному заказчику, тем ярче выражен данный эффект.

Вышеперечисленные особенности изучаемого статистического ансамбля дают основания отнести его к классу так называемых сложных систем. Эти системы не могут быть описаны в рамках статистики Больцмана–Гиббса, поскольку характеризуются нелокальными корреляциями между отдельными элементами системы (помнят свое прошлое), эффектами отдаленного и сильного взаимодействия между элементами, неэргодичностью динамических процессов, иерархичностью (обычно мультифрактальностью) геометрии фазового пространства и существованием в нем запрещенных состояний, наличием процессов немарковского типа (длинной памятью), асимптотически степенных статистических распределений [Колесниченко, 2019]. Начало систематического изучения таких систем, сложная структура которых приводит к нарушению принципа аддитивности энтропии, связано с работой Тсаллиса [Tsallis, 1988]. Им впервые была введена параметрическая формула для статистической энтропии S_q , обобщающая классическую энтропию Больцмана–Гиббса S_{BG} :

$$S_{BG} = -k \sum_{i=1}^w p_i \ln p_i,$$

где k — постоянная Больцмана, p_i — вероятность нахождения системы в микросостоянии i , w — количество возможных состояний системы. Энтропия Тсаллиса S_q , предназначенная для описания поведения сложных систем, имеет следующий вид:

$$S_q = \frac{k}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^w p_i^q \right),$$

где q — энтропийный индекс (параметр деформации, мера неаддитивности), представляет собой принадлежащее интервалу $(0, \infty)$ вещественное число и в большинстве случаев выступает в качестве подгоночного параметра. В отличие от S_{BG} энтропия S_q не является аддитивной. Если система состоит из двух независимых подсистем A и B , то энтропия всей системы не равна сумме энтропий подсистем:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{1-q}{k} S_q(A) S_q(B).$$

В пределе $q \rightarrow 1$ S_q переходит в классическую форму энтропии Больцмана–Гиббса. В случае $q > 1$, чем больше значение параметра q , тем более высокой является степень неаддитивности изучаемой сложной системы. Статистическая механика, основанная на энтропии S_q , получила название неэкстенсивной (деформированной) статистики (q -статистики). Важно отметить, что одним из самых существенных отличий неэкстенсивной статистики от традиционной статистической механики является тот факт, что она при $q > 1$ приводит к асимптотическому степенному закону распределения вероятностей, вместо экспоненциального распределения типа (3). В настоящее время неэкстенсивная статистическая механика находит достаточно широкое применение при описании различных природных, искусственных и социальных систем. В области экономики и финансов она использовалась, в частности, для изучения особенностей поведения финансовых рынков и инструментов, а также неравномерности распределения доходов регионов и внутреннего валового продукта отдельных стран [Tsallis, 2017].

Распределение вероятностей для бозе-частиц (7) в случае неэкстенсивной статистики преобразуется в следующее обобщенное распределение Бозе–Эйнштейна (см., например, [Guha,

Das, 2020; Колесниченко, 2020]):

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\left[1 + (q-1) \frac{\varepsilon_i - \mu}{T}\right]^{1/(q-1)} - 1}. \quad (8)$$

При этом в пределе $q \rightarrow 1$ выражение для обобщенной энтропии Бозе–Эйнштейна преобразуется в выражение для традиционной энтропии неравновесного бозе-газа [Колесниченко, 2020]. Параметр T , имеющий для случая настоящей работы размерность стоимости, будем в дальнейшем называть характеристической стоимостью распределения.

Таким образом, из всего вышесказанного можно сделать вывод, что равновесные стоимостные распределения совокупности контрактов, заключаемых всеми участниками выполнения ГОЗ, должны соответствовать распределению (8). Эмпирически проверить справедливость полученного вывода очень трудно, поскольку доступ к обобщенной информации по всему оборонному заказу имеет только государственный заказчик. Иначе обстоит дело с отдельными организациями ОПК. В этом случае можно провести сравнение распределений, вытекающих из модельных представлений, с эмпирическими распределениями, полученными на основании данных бухгалтерского и аналитического учета конкретной организации.

При изучении стоимостных распределений контрактов отдельной организации ОПК, участвующей в выполнении ГОЗ, надо учитывать следующее обстоятельство. Из (4) следует, что у организации могут быть два типа контрактов. Будем называть их соответственно «входящими» и «выходящими». В первом случае компания выступает в качестве исполнителя контрактов, заказчиком которых являются организации, стоящие на более высоком уровне в иерархической структуре выполнения госконтрактов. «Входящие» договоры формируют суммарный доход организации. Именно «входящие» договоры всех компаний образуют совокупность контрактов, заключенных в ходе выполнения ГОЗ. В случае же «выходящих» контрактов компания уже сама выполняет роль заказчика. Эти договоры формируют одну из затратных составляющих расходов предприятия. «Входящие» контракты имеют все компании, в то время как у организаций, расположенных на последних уровнях иерархической структуры, нет «выходящих» договоров. Как следствие, при изучении стоимостных распределений контрактов отдельных компаний учитывать следует только «входящие» договоры.

Контракты, заключаемые отдельной организацией, участвующей в выполнении ГОЗ, представляют собой часть общего массива контрактов. Тем не менее им в полном объеме присущи те же специфические особенности, что и совокупности контрактов, которые заключаются всеми организациями ОПК. Это дает основания применить рассмотренный выше подход изучения статистического ансамбля, сформированного из всех выполняемых договоров в процессе реализации ГОЗ, на случай контрактов, относящихся только к отдельной организации. Исходя из этого, сформируем изучаемый статистический ансамбль в виде совокупности мгновенных «картинок» α' действующих у отдельной организации «входящих» контрактов n'_i со своими стоимостями ε'_i . Общее число контрактов N'_α отдельной организацией в данном состоянии и их суммарная стоимость E'_α определяются как

$$N'_\alpha = \sum_i n'_i \quad \text{и} \quad E'_\alpha = \sum_i n'_i \varepsilon'_i.$$

Контракты в этом случае также неразличимы. Полагая далее, что на достаточно длительном интервале времени средние значения общего числа контрактов отдельной организации и их суммарной стоимости остаются постоянными, используя выкладки, аналогичные (5)–(6), а также факт принадлежности массива контрактов к категории сложных систем, окончательно получаем, что среднее число контрактов \bar{n}'_i , заключенных конкретной организацией ОПК, должно следовать обобщенному распределению Бозе–Эйнштейна (8).

3. Теоретические и эмпирические функции распределения вероятностей контрактов

Для того чтобы проанализировать степень соответствия эмпирических стоимостных распределений контрактов обобщенному распределению Бозе–Эйнштейна (8), всю стоимостную шкалу следует разделить на достаточно небольшие и равные по размеру интервалы (ячейки) и построить соответствующую гистограмму, высота каждого элемента которой должна соответствовать числу контрактов в стоимостном интервале, равном ширине ячейки. Однако при использовании такого подхода определение ширины ячейки представляет собой нахождение компромисса между выбором количества ячеек, т. е. заданием разрешения анализируемых данных по стоимости и точностью, с которой оценивается каждое значение на исследуемом распределении. Кроме того, при незначительном количестве анализируемых данных (относительно небольшом количестве контрактов) и при больших значениях стоимости с неизбежностью возникает проблема пустых ячеек. Чтобы избежать данных проблем, в настоящей работе выбран метод сравнения эмпирических и теоретических функций распределения вероятностей. Аналогичный подход был применен в работе [Hernández-Pérez, 2010] при изучении распределений фирм по размеру их годового дохода. Отметим при этом, что в зарубежной научной литературе функция распределения вероятностей ассоциируется с кумулятивной функцией распределения.

Теоретическую функцию распределения вероятностей контрактов $f_{th}(\varepsilon)$ можно получить, вычислив интеграл от функции плотности вероятности обобщенного распределения Бозе–Эйнштейна (8):

$$f_{th}(\varepsilon) = c \int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon} \frac{1}{\left[1 + (q-1)\frac{\varepsilon-\mu}{T}\right]^{1/(q-1)} - 1} d\varepsilon. \quad (9)$$

При этом c — константа, определяемая из условия нормировки:

$$c \int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} \frac{1}{\left[1 + (q-1)\frac{\varepsilon-\mu}{T}\right]^{1/(q-1)} - 1} d\varepsilon_i = 1, \quad (10)$$

а ε_{\min} и ε_{\max} — минимальное и максимальное значения стоимости контрактов в изучаемом распределении соответственно. Для вычисления интегралов в выражениях (9) и (10) сделаем следующие подстановки [Колесниченко, 2020]:

$$x = \frac{\varepsilon - \mu}{T} \quad \text{и} \quad \frac{1}{z} = \left[1 + (q-1)x\right]^{1/(q-1)}.$$

В результате неопределенный интеграл

$$I = \int \frac{1}{\left[1 + (q-1)\frac{\varepsilon-\mu}{T}\right]^{1/(q-1)} - 1} d\varepsilon$$

преобразуется к виду

$$I = \int \frac{z^{1-q}}{z-1} dz. \quad (11)$$

В общем случае данный интеграл не может быть вычислен аналитически, поэтому сделаем его оценку. Для этого перепишем (11) в следующем виде:

$$I = \int \frac{1}{z^q - z^{q-1}} dz. \quad (12)$$

Предположим, что и в рассматриваемом в настоящей работе случае $q > 1$. Это оправдано, поскольку значения параметра деформации $q > 1$ соответствуют наличию в реальных сложных системах коллективных степеней свободы [Колесниченко, 2019], ответственных за неэкстенсивный характер поведения системы. Поскольку при изменении x в интервале $(0, \infty)$ переменная z будет меняться от 1 до 0, а $\frac{z^q}{z^{q-1}} = z$, при вычислении интеграла (11) в его подынтегральном выражении пренебрежем членом z^q и получим

$$I \approx \frac{z^{2-q}}{q-2} = \frac{1}{q-2} \left[1 + (q-1) \frac{\varepsilon - \mu}{T} \right]^{(2-q)/(1-q)}. \quad (13)$$

В результате, используя (13) для вычислений интегралов (9) и (10), окончательно получаем следующее приближенное выражение для теоретической функции распределения вероятностей:

$$f_{th}(\varepsilon) \approx \frac{\left[1 + (q-1) \frac{\varepsilon - \mu}{T} \right]^{(2-q)/(1-q)} - \left[1 + (q-1) \frac{\varepsilon_{\min} - \mu}{T} \right]^{(2-q)/(1-q)}}{\left[1 + (q-1) \frac{\varepsilon_{\max} - \mu}{T} \right]^{(2-q)/(1-q)} - \left[1 + (q-1) \frac{\varepsilon_{\min} - \mu}{T} \right]^{(2-q)/(1-q)}}. \quad (14)$$

Для нахождения эмпирических функций распределения вероятностей $f_{emp}(\varepsilon_i)$ сначала необходимо упорядочить набор рассматриваемых эмпирических данных (стоимостей контрактов), начиная с минимального значения стоимости контракта ε_{\min} и заканчивая максимальным ε_{\max} , а затем осуществить процедуру ранжирования, присвоив каждому значению стоимости ε_i ранг (порядковый номер) $R(\varepsilon_i)$, начиная с единицы и заканчивая общим числом заключенных контрактов N . В силу своего определения функция распределения вероятностей (кумулятивная вероятность K_l) контрактов по их стоимости представляет собой сумму первых l вероятностей появления значений стоимости в упорядоченной последовательности контрактов:

$$K_l = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^l p_i, \quad (15)$$

где p_i — число контрактов со значением стоимости ε_i . При этом

$$P = \sum_i p_i = N,$$

поскольку проведение процедуры ранжирования сводит все значения p_i в выражении (15) к единице. Таким образом, $f_{emp}(\varepsilon)$ получается построением графика, на котором по оси абсцисс отложены значения стоимости контрактов, ε_i , а по оси ординат — соответствующие им значения ранга $R(\varepsilon_i)$, поделенные на величину общего числа заключенных контрактов N .

Как отмечалось ранее, одним из условий, позволившим использовать в настоящей работе приближение большого канонического ансамбля, явилось допущение, что число контрактов и их суммарная стоимость на рассматриваемом достаточно длительном интервале времени Δt не являются постоянными величинами, изменяются медленно, так что их средние значения можно считать постоянными во времени величинами. Если рассматриваемый интервал времени Δt сопоставим по величине со средним временем исполнения договорных обязательств и при этом в соответствии с учетной политикой организации учет выручки от реализации фиксируется по факту отгрузки конкретного (предусмотренного условиями каждого из контрактов) вида выпускаемой продукции или выполнения работ, то для изучения стоимостных распределений контрактов в качестве анализируемых данных можно использовать сформировавшееся за период времени Δt распределение выручки по отдельным заказам, соответствующим заключенным контрактам. В этом случае распределение выручки будет отражать стоимостные распределения контрактов.

Самым естественным выбором значения для интервала времени Δt является один год. Помимо того, что данный временной интервал является основным во всей системе планирования и отчетности, он сопоставим по величине со средним временем исполнения контрактных обязательств при выполнении ГОЗ. Кроме того, анализ выручки является достаточно доступным и удобным инструментом, поскольку в соответствии с законодательством при выполнении работ по государственному оборонному заказу организации ОПК обязаны вести отдельный учет своей финансово-хозяйственной деятельности по каждому заказу, а суммарный объем выручки по всем заказам за год (общая выручка от реализации) является одним из главных показателей деятельности организации.

4. Результаты и обсуждения

В настоящей работе проанализированы годовые распределения выручки от реализации по отдельным заказам АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» — одного из ведущих приборостроительных предприятий ОПК России. Проведено сравнение эмпирических и теоретических функций распределений вероятностей с 2007 по 2021 год. Теоретические функции распределения вероятностей рассчитывались в соответствии с выражением (14). При построении эмпирических функций распределения вероятностей вся выборка значений выручки за год сначала ранжировалась по возрастанию: минимальному значению выручки ε_{\min} присваивался ранг R_i равный 1, следующему по величине значению — 2 и т. д. Максимальный ранг N соответствует значению выручки с наибольшей величиной ε_{\max} и равен общему числу фактов отгрузки продукции (выполнения работ) за год. В результате $f_{emp}(\varepsilon_i)$ представляет собой график, на котором по оси абсцисс отложены значения выручки от реализации ε_i , а по оси ординат — величины, равной отношению $\frac{R_i}{N}$.

На рис. 1 в качестве примера приведены эмпирические $f_{emp}(\varepsilon_i)$ и теоретические $f_{th}(\varepsilon)$ функции распределения вероятностей для 2007, 2012, 2016 и 2021 годов. В таблице 1 для всех исследованных годов приведены: значения ε_{\min} и ε_{\max} , количество N элементов в каждом наборе значений выручки за год, величины параметров q , T и μ . Значения q и T определялись исходя из условия минимизации соответствующих расстояний между эмпирическим и теоретическим распределениями в каждой точке ε_i . Химический потенциал μ при этом во всех случаях равен нулю.

Таблица 1. Параметры годовых стоимостных распределений выручки

Год	ε_{\min} , млн руб.	ε_{\max} , млн руб.	N , ед.	q	T , млн руб.	μ , млн руб.
2021	0,014	1802,9	337	1,697	0,296	0
2020	0,021	1086,6	353	1,695	0,283	0
2019	0,019	951,7	350	1,790	0,175	0
2018	0,032	877,1	452	1,708	0,190	0
2017	0,002	1737,8	395	1,664	0,390	0
2016	0,011	687,5	426	1,679	0,534	0
2015	0,008	494,5	342	1,678	0,586	0
2014	0,003	327,0	484	1,711	0,304	0
2013	0,005	561,8	438	1,686	0,241	0
2012	0,011	249,8	368	1,673	0,193	0
2011	0,009	311,4	286	1,609	0,574	0
2010	0,001	423,6	442	1,655	0,212	0
2009	0,002	200,8	417	1,650	0,176	0
2008	0,001	128,9	417	1,649	0,141	0
2007	0,001	129,6	461	1,708	0,098	0

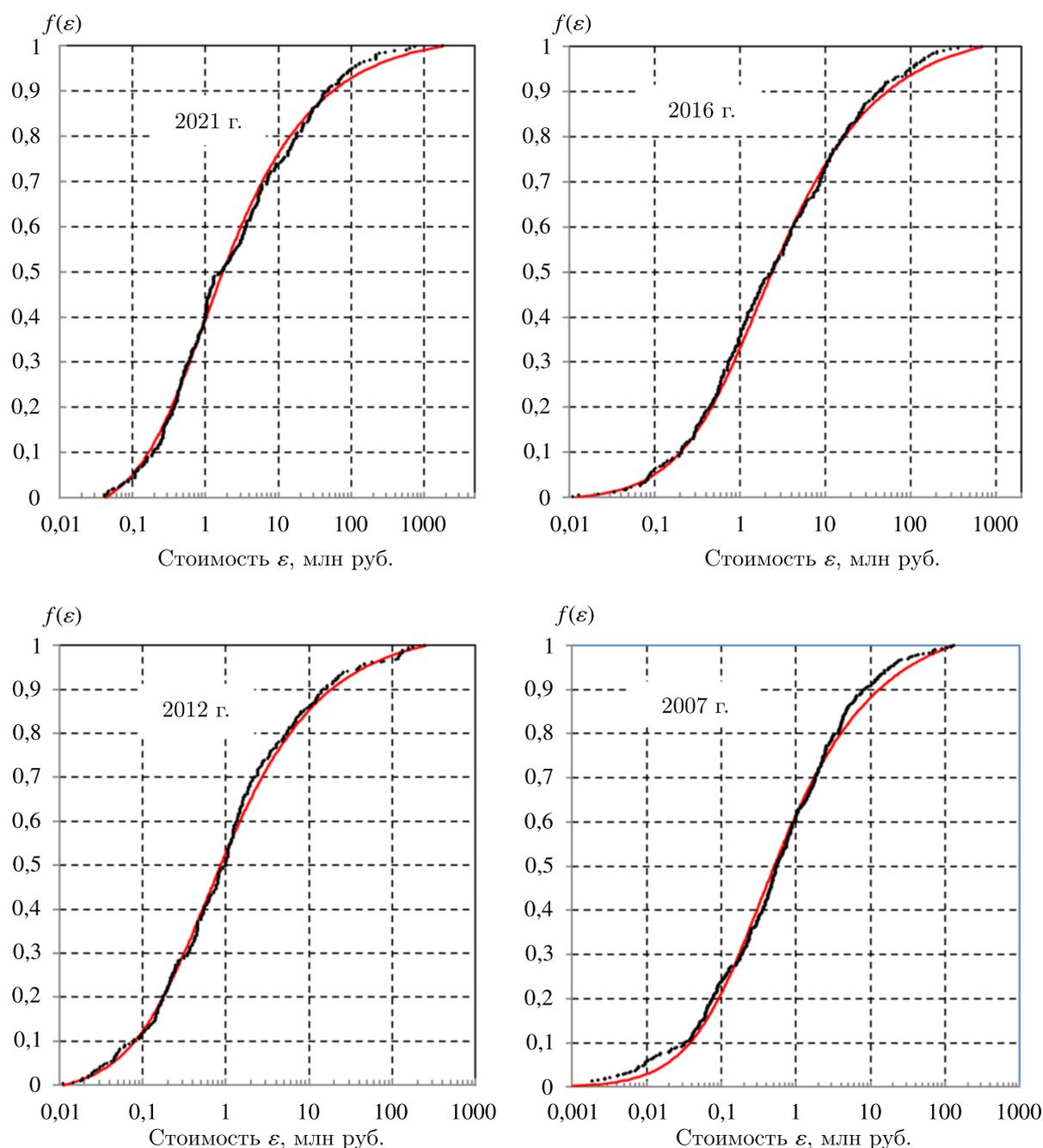


Рис. 1. Теоретические $f_{th}(\varepsilon)$ (—) функции распределения вероятностей контрактов по их стоимостям и эмпирические $f_{emp}(\varepsilon_i)$ (•) функции годовых распределений вероятностей выручки от реализации по отдельным заказам АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»

Для того чтобы оценить, насколько корректно представляющее собой нулевую гипотезу H_0 распределение (14) моделирует эмпирические данные, в настоящей работе был применен непараметрический критерий согласия Колмогорова. В случае проверки простых гипотез распределение статистики данного критерия даже в случае небольших по объему выборок хорошо аппроксимируется предельным распределением и достаточно просто вычисляется. Совершенно иная картина наблюдается, когда неизвестные параметры изучаемого распределения находят, используя ту же самую выборку, по которой проверяют согласие. В этом случае предельные

распределения вычисляются с большим трудом и известны только для ограниченного числа распределений [Лемешко, 2014; Тюрин, 1984]. Именно такая ситуация характерна и для настоящей работы. Для изучаемого распределения (14) модель распределения статистики Колмогорова неизвестна. Тем не менее далее для оценки справедливости применения нулевой гипотезы будем следовать рекомендациям, изложенным в работе [Лемешко, 2014].

По каждой из выборок, представляющей собой упорядоченный набор эмпирических данных значений выручки по исследуемым годам, вычисляются значения статистики S^* по формуле

$$S^* = \frac{6ND_N + 1}{6\sqrt{N}},$$

где

$$D_N = \max(D_N^+, D_N^-), \quad D_N^+ = \max\left[\frac{i}{N} - F(x_i)\right], \quad D_N^- = \max\left[F(x_i) - \frac{i-1}{N}\right],$$

x_i — упорядоченные по возрастанию выборочные значения, $F(x)$ — функция закона распределения, согласие с которым проверяют (распределение (14) в настоящей работе).

В качестве модели распределения статистики $G(S|H_0)$ при справедливости нулевой гипотезы использовались приведенные в работе [Лемешко, 2014] гамма-распределения с пятью различными наборами параметров. Эти распределения аппроксимируют предельные распределения статистики Колмогорова при оценивании двух параметров. Далее вычислялись значения

$$P(S > S^*) = 1 - G(S^*|H_0) = \int_{S^*}^{\infty} g(s|H_0) ds,$$

где $g(s|H_0)$ — плотность вероятности распределения $G(S|H_0)$. Если $P(S > S^*) > \alpha$, α — задаваемый уровень значимости, то нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы. В противном случае она отвергалась. Расчеты показали, что для всех рассмотренных предельных гамма-распределений для всех исследуемых годов, за исключением 2008 и 2009 гг., $P(S > S^*) > 0,05$. Таким образом, можно говорить, что при заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$ для абсолютного большинства исследуемых годов можно оговорить о корректности применения модели (14) при описании эмпирических распределений выручки.

Как видно из таблицы 1, для всех изученных распределений полученные эмпирическим путем значения параметра деформации q лежат в пределах $1,609 \div 1,790$, что свидетельствует о достаточно высоком влиянии в этой системе так называемых коллективных степеней свободы, или дальних корреляций, влияющих на неаддитивный характер поведения системы. Сравнительно небольшие отличия в величинах полученных параметров деформации (11 % между максимальным и минимальным значениями q во всем временном диапазоне) говорят о том, что корреляционный радиус взаимодействия примерно одинаков на достаточно длительном временном периоде.

Совершенно иное поведение характерно для параметра T — характеристической стоимости распределения. Его значения меняются достаточно сильно: от 0,098 млн руб. до 0,586 млн руб. В выражении (3), описывающем распределения вероятностей нахождения денежных средств у субъектов экономических отношений, эффективная температура T трактуется как среднее количество денег, приходящихся на одного экономического агента [Dragulescu, Yakovenko, 2000]. В работе [Галкин и др., 2009] в выражении для плотности вероятности покупок одного товара, также имеющем вид (3), параметр T характеризует среднюю цену товара на рынке. Оказывается, что и полученным в настоящей работе значениям параметров характеристической стоимости распределения для случая деформированной статистики также можно сопоставить величину, которая представляет собой осредненную определенным образом стоимость контрактов.

В неэкстенсивной статистике Тсаллиса определение среднего значения физических величин возможно осуществлять разными способами. В первом варианте, предложенном в работе [Tsallis, 1988], среднее рассчитывается следующим образом:

$$\sum_k p_k \varepsilon_k = \langle E \rangle^{(1)} \quad (16)$$

(верхний индекс обозначает порядковый номер способа осреднения). Во втором способе, впервые примененном Курадо и Тсаллисом [Curado, Tsallis, 1991], осредненная энергия задается как

$$\sum_k p_k^q \varepsilon_k = \langle E \rangle^{(2)}. \quad (17)$$

И наконец, в третьем варианте, введенном в работе [Tsallis, Mendes, Plastino, 1998], осреднение выполняется следующим образом:

$$\frac{\sum_k p_k^q \varepsilon_k}{\sum_k p_k^q} = \langle E \rangle^{(3)}. \quad (18)$$

В данном способе среднее значение вычисляется с помощью набора значений вероятностей

$$\frac{p_k^q}{\sum_k p_k^q},$$

которые получили название эскортного распределения. Первый способ осреднения оказался неудовлетворительным при решении ряда математических задач, связанных с моделированием некоторых физических явлений в сложных неаддитивных системах. Второй подход является наиболее распространенным в научной литературе по неэкстенсивной термодинамике, однако и он не лишен некоторых недостатков. Осреднение, выполняемое в соответствии с выражением (18), не имеет особых преимуществ по отношению ко второму варианту (детали см. в работе [Колесниченко, 2019]). Тем не менее, как видно из таблицы 2, в которой приведены рассчитанные по формулам (16)–(18) значения характеристических стоимостей распределений $\langle E \rangle^{(i)}$, именно расчет, произведенный по третьему варианту с помощью эскортного распределения, дает наиболее приемлемый результат с точки зрения близости к эмпирическим величинам T . Следует сказать, что при расчетах величин $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ и $E^{(3)}$ вероятность p_k определялась из выражения (9), а статистическая сумма Z_q — из условия нормировки:

$$\sum_k p_k = 1,$$

где суммирование производится по всем значениям выручки за год и используются эмпирические значения T и q .

Таким образом, из вышесказанного следует, что для оценки параметра характеристической стоимости T можно использовать выражение (18), равное среднему значению годового стоимостного распределения выручки, рассчитанному с помощью нормированного эскортного распределения.

$$T \approx \frac{\sum_k p_k^q \varepsilon_k}{\sum_k p_k^q}.$$

Факт наилучшего согласия эмпирических и теоретических кумулятивных функций распределения при значениях $\mu = 0$ позволяет сделать предположение, что изучаемый «газ контрактов» можно сравнить с черным излучением — электромагнитным излучением, находящимся

Таблица 2. Сравнение годовых параметров характеристической стоимости распределений T и осредненных значений выручки $\langle E \rangle^{(i)}$

Год	T , млн руб.	$\langle E \rangle^{(1)}$, млн руб.	$\langle E \rangle^{(2)}$, млн руб.	$\langle E \rangle^{(3)}$, млн руб.
2021	0,299	0,573	0,009	0,292
2020	0,283	0,518	0,008	0,268
2019	0,175	0,452	0,004	0,171
2018	0,190	0,404	0,005	0,215
2017	0,390	0,615	0,010	0,328
2016	0,534	0,831	0,011	0,415
2015	0,586	0,925	0,014	0,455
2014	0,304	0,497	0,005	0,203
2013	0,241	0,405	0,005	0,201
2012	0,193	0,331	0,005	0,166
2011	0,574	0,769	0,021	0,450
2010	0,212	0,312	0,004	0,147
2009	0,176	0,241	0,004	0,109
2008	0,141	0,193	0,003	0,086
2007	0,098	0,164	0,002	0,066

в тепловом равновесии с веществом. Действительно, черное излучение рассматривается как газ, состоящий из фотонов — частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна. Механизм, обеспечивающий установление равновесия, заключается в поглощении и испускании фотонов веществом. Это приводит к тому, что число частиц фотонного газа, в отличие от случая обычного газа, не является постоянной величиной, поскольку фотоны непрерывно образуются и аннигилируют. При этом число фотонов должно определяться из условий теплового равновесия, что в конечном итоге приводит к равенству нулю химического потенциала [Ландау, Лившиц, 2002]. Аналогичная картина характерна и для рассматриваемой в настоящей работе ситуации: процесс формирования новых и завершения действующих контрактов идет непрерывно. При этом если в (11) химический потенциал μ обратить в ноль, а вместо значений стоимостей контрактов подставить величины энергий фотонов $\varepsilon_i = \hbar\omega$, то выражение (8) в точности совпадает с обобщенным распределением Планка, которое в статистике Тсаллиса в случае черного излучения описывает распределение фотонов по различным уровням энергии [Колесниченко, 2020]:

$$P_\omega = \frac{1}{\left[1 + (q-1)\frac{\hbar\omega}{T}\right]^{1/(q-1)} - 1}.$$

Следует сказать, что аналогия фотонного газа с поведением определенных экономических объектов — фирм, действующих в рыночной экономике, — использовалась в работе [Hernández-Pérez, 2010]. В условиях рынка, вследствие постоянно идущих процессов образования новых фирм, слияния и поглощения существующих, неизбежных банкротств, количество хозяйствующих субъектов не является постоянной величиной.

Для того чтобы определить, при каких условиях справедливо полученное приближенное выражение (14) для теоретической функции распределения вероятностей, рассмотрим сначала в (8) предельный случай, при котором выполняется условие

$$\left[1 + (q-1)\frac{\varepsilon_i - \mu}{T}\right]^{1/(q-1)} \gg 1. \quad (19)$$

Если при этом $q > 1$, то условие (19) соответствует ситуации больших стоимостей контрактов или малых характеристических стоимостей распределения ($\frac{\varepsilon_i}{T} \gg 1$). Пренебрегая в знаменателе

выражения (8) единицей и полагая, как это следует из результатов настоящей работы, $\mu = 0$, получаем

$$\bar{n}_i = \left(1 - (1 - q) \frac{\varepsilon_i}{T}\right)^{1/(1-q)}. \quad (20)$$

Данное выражение с точностью до величины деформированной статистической суммы совпадает с модифицированным распределением Гиббса, которое впервые было получено Тсаллисом как обобщение классического канонического распределения на случай q -статистики [Tsallis, 1988]. Отсюда очевидно, что при условии $\frac{\varepsilon_i}{T} \gg 1$ в статистике Тсаллиса \bar{n}_i становится много меньше единицы (что соответствует ситуации сильно разряженного бозе-газа), а деформированное распределения Бозе – Эйнштейна трансформируется в деформированное распределения Гиббса. Данная картина аналогична ситуации в классической статистической механике: условие $\bar{n}_i \ll 1$ приводит к тому, что разряженный газ бозе-частиц приобретает свойства идеального газа, которые описываются распределением Гиббса (3) [Ландау, Лившиц, 2002]. Отметим также следующее. Приближенное выражение (14) получено при условии пренебрежения членом z^q по сравнению с z^{q-1} при вычислении интеграла (12). Из вышесказанного следует, что это действие эквивалентно пренебрежению единицей по сравнению с величинами $\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{T}\right)$ и $\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)$ в знаменателе распределения Бозе – Эйнштейна и распределения Планка соответственно при рассмотрении в классической статистической физике предельных случаев высоких энергий или низких температур.

Далее, если в формулы (9) и (10) вместо обобщенного распределения Бозе – Эйнштейна (8) подставить выражение для деформированного распределения Гиббса (20), то в этом случае выражение для теоретической функции распределения вероятностей совпадет с (14) при условии, что значение химического потенциала равно нулю. Таким образом, из вышесказанного следует, что полученное приближенное выражение (14) для теоретической функции распределения вероятностей контрактов соответствует случаю разряженного газа бозе-частиц, роль которых в настоящей работе играют заключаемые организациями ОПК контракты с соответствующими стоимостями. Следует сказать, что общее число заключаемых в процессе выполнения ГОЗ контрактов относительно невелико. «Газ контрактов» *a priori* является сильно разреженным. Как следствие, можно полагать, что обобщенное распределение Гиббса (20), как предельный случай обобщенного распределения Бозе – Эйнштейна, может описывать стоимостные распределения как массива контрактов, заключенных всеми организациями ОПК при выполнении ГОЗ, так и договоров отдельной организации.

5. Заключение

Неэкстенсивная статистика Тсаллиса, являющаяся обобщением классической статистической механики Больцмана – Гиббса, в настоящее время активно развивается и находит все более широкие области применения. Результаты настоящей работы подтверждают данный вывод. В работе впервые исследован статистический ансамбль, представляющий собой совокупность заключаемых организациями оборонно-промышленного комплекса контрактов при выполнении ГОЗ. Данному ансамблю присущи такие черты, как ярко выраженная иерархическая соподчиненность; наличие запрещенных состояний, возникающих из-за политики регулирования со стороны государства процесса ценообразования; эффект длинной памяти в значениях стоимостей контрактов. Данные характерные особенности массива контрактов дают основания отнести его к классу сложных систем и применять при описании неэкстенсивную статистику Тсаллиса. В работе показано, что теоретические стоимостные распределения как всего массива контрактов, так и договоров, заключаемых в качестве исполнителя отдельной организацией ОПК, соответствуют деформированному распределению Бозе – Эйнштейна. Анализ эмпирических данных годовых распределений выручки АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» показал их хорошее согласие

с теоретическими функциями распределений вероятностей, рассчитанными с использованием деформированных распределений Бозе – Эйнштейна в предельном случае сильного разряжения «газа контрактов». Кроме того, факт наилучшего согласия эмпирических и теоретических функций распределения вероятностей контрактов при значениях $\mu = 0$ позволяет сделать предположение, что изучаемый массив контрактов можно сравнить с черным излучением – электромагнитным излучением, находящимся в тепловом равновесии с веществом. Данное предположение возникает из следующей аналогии. Поскольку фотоны постоянно образуются и аннигилируют, их число в каждый момент времени не является постоянной величиной. Подобная картина наблюдается и в динамике контрактной системы: идет непрерывный процесс появления новых и завершения действующих контрактов.

В то же время остается невыясненным и требует дальнейших исследований вопрос определения степени влияния вышеупомянутых характерных черт статистического ансамбля контрактов на меру неаддитивности, характеризующую рассмотренную сложную систему. Возможно также, что именно это обстоятельство обуславливает отмеченный в работе [Верник и др., 2016] степенной характер зависимости общей годовой выручки крупнейших оборонных компаний мира от их ранга, поскольку статистика Тсаллиса, в отличие от классической статистики Больцмана – Гиббса, приводит к асимптотическому степенному закону распределения вероятностей.

Список литературы (References)

- Верник П. А., Иванов В. В., Казачковский С. В., Коршук В. А., Малинецкий Г. Г., Нейман Е. И., Смоляк А. С., Посашков С. А. Организационные инновации и математическое моделирование процесса выполнения гособоронзаказа. Часть 2 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2016. — № 62. — 26 с.
Vernik P. A., Ivanov V. V., Kazachkovskiy S. V., Korshuk V. A., Malinetskiy G. G., Neiman E. I., Smoljak A. S., Posashkov S. A. Organizatsionnye innovazii i matematicheskoe modelirovanie protsessa vypolnenia gosoboronzakaza. Chast 2 [Organizing innovations and mathematical modelling of the state defence order execution process. Part 2] // Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics. — 2016. — No. 62. — 26 p. (in Russian).
- Галкин С. А., Елагин О. И., Козлов А. А., Потапенко В. А., Романовский М. Ю. Экспоненциальные распределения индивидуальных доходов граждан: наблюдения и модели // Труды института общей физики. — 2009. — Т. 65. — С. 29–49.
Galkin S. A., Elagin O. I., Kozlov A. A., Potapenko V. A., Romanovsky M. Yu. Exponenzialnye raspredelenia imdividual'nykh dohodov grazhdan [Exponential distributions of individual incomes of citizens] // Trudy IOFAN [Proceedings of the Prokhorov General Physics Institute]. — 2009. — Vol. 65. — P. 29–49 (in Russian).
- Гаранина О. С., Романовский М. Ю. Экспериментальное исследование распределения расходов граждан РФ на новые автомобили и их соответствие доходам // Компьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 3. — С. 621–629.
Garanina O. S., Romanovsky M. Yu. Experimental'noe issledovanie raspredelenia raskhodov grazhdan RF na novye avtomobili i ih sootvetstvie dohodam [Experimental investigation of Russian citizens expenses on new cars and a correspondence to their income] // Computer Research and Modeling. — 2012. — Vol. 4, No. 3. — P. 621–629 (in Russian).
- Колесниченко А. В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
Kolesnichenko A. V. Statisticheskaya mekhanika i termodinamika Tsallisa headditivnykh sistem. Vvedenie v teoriyu i prilozheniya [Tsallis statistical mechanics and thermodynamics of nonadditive systems. Introduction to theory and applications]. — Moscow: LENAND, 2019 (in Russian).
- Колесниченко А. В. Термодинамика бозе-газа и черного излучения в неэкстенсивной статистике Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2020. — № 62. — 28 с.
Kolesnichenko A. V. Termodinamika bose-gasa i chernogo izlucheniya v neextensivnoy statistike Tsallisa [Thermodynamics of the Bose gas and black radiation in non-extensive Tsallis statistics] // Preprinty IPM [Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics]. — 2020. — No. 35. — 28 p. (in Russian).
- Кочкаров А. А., Кочкаров Р. А., Малинецкий Г. Г. Некоторые аспекты динамической теории графов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 9. — С. 1623–1629.

- Kochkarov A. A., Kochkarov P. A., Malinetski G. G.* Nekotorye aspekty dinamicheskoy teorii grafov [Some issues of dynamic theory of graphs] // Computational mathematics and mathematical physics. — 2015. — Vol. 55, No. 9. — P. 1623–1629 (in Russian).
- Ландау Л. Д., Лифшиц И. М.* Статистическая физика. Ч. I. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
- Landau L. D., Lifshitz E. M.* Statisticheskaya phisika [Statistical physics]. — Moscow: PHYSMATLIT, 2002 (in Russian).
- Лемешко Б. Ю.* Непараметрические критерии согласия. — Новосибирский государственный университет, 2014.
- Lemeshko B. Yu.* Neparametricheskie kriterii soglasiya [Nonparametric goodness-of-fit criteria]. — Novosibirsk State University, 2014 (in Russian).
- Маслов В. П.* Квантовая экономика. — М.: Наука, 2006.
- Maslov V. P.* Kvantovaya ekonomika [Quantum economics]. — Moscow: Nauka, 2006 (in Russian).
- Тюрин Ю. Н.* О предельном распределении статистик Колмогорова–Смирнова для сложной гипотезы // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1984. — Т. 48, вып. 5. — С. 1314–1343.
- Tyurin Yu. N.* O predelnom raspredelenii statistik Kolmogorova–Smirnova dlya slozhnoi gipotezy [Marginal distributions of The Kolmogorov–Smirnov statistic in case of complex hypotheses] // Izv. AN USSR. Ser. matem [Izvestiya: Mathematics]. — 1984. — Vol. 48, No. 5. — P. 1314–1343 (in Russian).
- Banerjee A., Yakovenko V. M., Matteo T. D.* A study of personal income distribution in Australia // Physica A. — 2006. — Vol. 370. — P. 54–59.
- Chatterjee A., Chakrabarti B. K.* Kinetic exchange models for income and wealth distribution // Eur. Phys. J. — 2007. — Vol. B60. — P. 135–149.
- Curado E. M. F., Tsallis C.* Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics // J. Phys. A: Mathematical and General. — 1991. — Vol. 24, No. 2. — P. L69–L72.
- Dragulescu A. A., Yakovenko V. M.* Evidence for the exponential distribution of income in the USA // Eur. Phys. J. — 2001a. — Vol. B20. — P. 585–589.
- Dragulescu A. A., Yakovenko V. M.* Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States // Physica A. — 2001b. — Vol. 299. — P. 213–221.
- Dragulescu A. A., Yakovenko V. M.* Statistical mechanics of money // Eur. Phys. J. — 2000. — Vol. B17. — P. 723–729.
- Hernández-Pérez R.* An analogy of the size distribution of business firms with Bose–Einstein statistics // Physica A. — 2010. — Vol. 389. — P. 3837–3843.
- Guha A., Das P. K.* An extensive study of Bose–Einstein condensation in liquid helium using Tsallis statistics // Physica A. — 2020. — Vol. 497. — P. 272–284.
- Kusmartsev F. V.* Statistical mechanics of economics I // Physics Letters A. — 2011. — Vol. 375. — P. 966–973.
- Patriarca M., Chakraborti A.* Kinetic exchange models: From molecular physics to social science // American Journal of Physics. — 2013. — Vol. 81. — P. 618–626.
- Patriarca M., Heinsalu E., Chakraborti A.* Basic kinetic wealth-exchange models: common features and open problems // Eur. J. Phys. — 2010. — Vol. B73. — P. 145–153.
- Rashkovskiy S. A.* «Bosons» and «fermions» in social and economic systems // Physica A. — 2019. — Vol. 514. — P. 90–104.
- Tao Y.* Competitive market for multiple firms and economic crisis // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 82. — P. 036118.
- Tsallis C.* Economics and finance: q-Statistical stylized features galore // Entropy. — 2017. — Vol. 19. — P. 457–474.
- Tsallis C.* Possible generalization of Boltzmann–Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. — 1988. — Vol. 52, No 1/2. — P. 479–487.
- Tsallis C., Mendes R. S., Plastino A. R.* The role of constraints within generalized nonextensive statistics // Physica A. — 1998. — Vol. 261. — P. 534–554.
- Yakovenko V. M., Rosser Jr. J. B.* Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income // Reviews of modern physics. — 2009. — Vol. 81. — P. 1703–1725.