

УДК: 532.529.5

Бессеточный алгоритм расчета взаимодействия крупных частиц с ударным слоем в сверхзвуковых гетерогенных потоках

А. В. Способин

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: spise@inbox.ru

*Получено 23.05.2022, после доработки — 07.07.2022.
Принято к публикации 08.07.2022.*

Работа посвящена численному моделированию двухфазных течений, а именно расчету сверхзвукового обтекания затупленного тела потоком вязкого газа с примесью относительно крупных частиц, масса которых позволяет после отражения от поверхности выйти за пределы ударного слоя, двигаясь по инерции навстречу набегающему потоку. Натурные и вычислительные эксперименты показывают, что движение высокоинерционных частиц существенным образом изменяет структуру течения газа в ударном слое, а формирующиеся при этом направленные на тело импактные струи вызывают увеличение давления газа вблизи участков поверхности и кратный рост конвективного теплового потока.

Построена математическая модель обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа с твердыми частицами. Решение системы нестационарных уравнений Навье–Стокса в консервативных переменных осуществляется бессеточным методом, в основе которого лежит аппроксимация частных пространственных производных газодинамических величин и содержащих их функций методом наименьших квадратов на множестве распределенных в области расчета узлов. Расчет невязких потоков выполняется методом HLLC в сочетании с MUSCL-реконструкцией третьего порядка, вязких потоков — схемой второго порядка. МНК-аппроксимация частных производных параметров газа по направлению также применяется для реализации краевых условий Неймана на выходной границе области расчета, а также поверхностях обтекаемых тел, которые считаются изотермическими твердыми стенками.

Каждое движущееся тело окружено облаком расчетных узлов, принадлежащих его домену и перемещающихся вместе с ним в пространстве. Реализовано два подхода к моделированию перемещения объектов с учетом обратного влияния на течение газа: метод скользящих облаков фиксированной формы и эволюции единого облака узлов, представляющего собой объединение узлов разных доменов. Проведенные численные эксперименты подтвердили применимость предложенных методов к решению целевых задач моделирования движения крупных частиц в сверхзвуковом потоке.

Выполнена программная реализация представленных алгоритмов на основе технологии параллельных гетерогенных вычислений OpenCL. Представлены результаты моделирования движения крупной частицы вдоль оси симметрии сферы навстречу набегающему потоку с числом Маха $M = 6$.

Ключевые слова: численное моделирование, нестационарные уравнения Навье–Стокса, сверхзвуковое обтекание тел, запыленный поток, бессеточный метод, подвижная граница

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, тема № FSFF-2020-0013.

UDC: 532.529.5

Meshless algorithm for calculating the interaction of large particles with a shock layer in supersonic heterogeneous flows

A. V. Sposobin

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe shosse, Moscow, A-80, GSP-3, 125993, Russia

E-mail: spise@inbox.ru

Received 23.05.2022, after completion — 07.07.2022.

Accepted for publication 08.07.2022.

The work is devoted to numerical modeling of two-phase flows, namely, the calculation of supersonic flow around a blunt body by a viscous gas flow with an admixture of large high inertia particles. The system of unsteady Navier–Stokes equations is numerically solved by the meshless method. It uses the cloud of points in space to represent the fields of gas parameters. The spatial derivatives of gas parameters and functions are approximated by the least square method to calculate convective and viscous fluxes in the Navier–Stokes system of equations. The convective fluxes are calculated by the HLLC method. The third-order MUSCL reconstruction scheme is used to achieve high order accuracy. The viscous fluxes are calculated by the second order approximation scheme. The streamlined body surface is represented by a model of an isothermal wall. It implements the conditions for the zero velocity and zero pressure gradient, which is also modeled using the least squares method.

Every moving body is surrounded by its own cloud of points belongs to body's domain and moving along with it in space. The explicit three-stage Runge–Kutta method is used to solve numerically the system of gas dynamics equations in the main coordinate system and local coordinate systems of each particle.

Two methods for the moving objects modeling with reverse impact on the gas flow have been implemented. The first one uses stationary point clouds with fixed neighbors within the same domain. When regions overlap, some nodes of one domain, for example, the boundary nodes of the particle domain, are excluded from the calculation and filled with the values of gas parameters from the nearest nodes of another domain using the least squares approximation of gradients. The internal nodes of the particle domain are used to reconstruct the gas parameters in the overlapped nodes of the main domain. The second method also uses the exclusion of nodes in overlapping areas, but in this case the nodes of another domain take the place of the excluded neighbors to build a single connected cloud of nodes. At the same time, some of the nodes are moving, and some are stationary. Nodes membership to different domains and their relative speed are taken into account when calculating fluxes.

The results of modeling the motion of a particle in a stationary gas and the flow around a stationary particle by an incoming flow at the same relative velocity show good agreement for both presented methods.

Keywords: numerical simulation, unsteady Navier–Stokes system of equations, supersonic flows around bodies, two-phase dusty flow, meshless method, moving boundary

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 5, pp. 1007–1027 (Russian).

This research was carried out within the framework of the state assignment issued by the Ministry of Education and Science of Russia, project number FSFF-2020-0013.

1. Введение

Течения газа с примесью твердых или жидких частиц характерны для многих естественных явлений и технических приложений. В целом ряде технологий, таких как, например, струйно-абразивная обработка и резка деталей или использование металлизированного ракетного топлива, высокоскоростной гетерогенный поток является определяющей составляющей технологического процесса. В атмосфере Земли и других планет практически повсеместно встречаются облака взвеси в твердом (к ним относятся снег, лед, пыль) и жидком (в первую очередь дождь) агрегатных состояниях [Михатулин, Полежаев, Ревизников, 2003; Ревизников, Сухарев, 2018]. Преодоление этих образований высокоскоростным летательным аппаратом может представлять техническую проблему, требующую отдельного внимания [Егоров, Конг, Новиков, 2021].

Находящаяся в сверхзвуковом потоке дисперсная примесь может оказывать многофакторное воздействие на обтекаемое тело: непосредственные соударения с поверхностью, способствующие эрозионному разрушению [Михатулин, Полежаев, Ревизников, 2007], дополнительный радиационный теплообмен, характерный для сильно разогревающихся мелкодисперсных частиц, а также обратное влияние частиц на течение газа [Ershova et al., 2011]. Исследованию гетерогенных потоков посвящен целый ряд работ [Вараксин, 2018; Oesterle, Volkov, Tsirkunov, 2013; Садин, 2020; Тукмаков, 2020].

Настоящая работа посвящена вопросу построения математической модели движения одной или нескольких крупных частиц в ударном слое. Как показали натурные эксперименты [Fleener, Watson, 1973; Holden et al., 1976], при движении навстречу сверхзвуковому набегающему потоку крупная частица может существенно перестроить картину течения, изменить положение фронта головной ударной волны, вызывать появление импактных струй и, как следствие, способствовать кратному локальному усилению конвективного теплового потока на отдельных участках обтекаемой поверхности.

В предыдущих работах [Способин и др., 2020; Sposobin, Reviznikov, 2021] на основе метода конечных объемов на скользящих адаптивных декартовых сетках [Способин, 2022] была построена математическая модель движения крупной частицы в ударном слое. Проведенные вычислительные расчеты в осесимметричной и плоской двумерной постановках [Ревизников, Способин, Иванов, 2020] позволили детально изучить наблюдавшиеся в реальных испытаниях явления. Применение декартовых сеток, с одной стороны, и необходимость детального разрешения пограничного слоя, с другой стороны, делали затруднительным проведение трехмерных расчетов ввиду очень большого числа вычислительных ячеек. Поэтому при построении трехмерной модели был избран существенно иной подход, в основе которого лежит бессеточный метод решения системы уравнений газовой динамики. В отличие от метода конечных объемов, разбивающего всю область расчета на замкнутые ячейки, упомянутый бессеточный метод использует конечное множество — так называемое облако точек — расчетных узлов, и аппроксимацию частных производных газодинамических величин по пространству. Узлы могут быть распределены в пространстве анизотропным образом, что существенно экономит вычислительные ресурсы. Распространение получили два способа аппроксимации производных: на основе радиально базисных функций [Толстых, Ширококов, 2005] или используемый в том числе в настоящей статье метод наименьших квадратов. Данным методом, несмотря на относительную простоту, показал удовлетворительное согласование результатов расчетов с эталонными данными при решении модельных задач обтекания тела сверхзвуковым вязким и невязким потоком.

В настоящей работе бессеточный метод [Способин, 2021] служит основой построения модели расчета движения тел в газовом потоке. Наряду со стационарным основным набором узлов каждое движущееся тело окружено своим облаком точек, принадлежащих его домену и перемещающихся вместе с ним в пространстве. Реализовано два подхода к моделированию перемещения объектов с учетом обратного влияния на течение газа.

Первый метод использует неизменные облака точек с фиксированными соседями в рамках одного домена. При взаимном перекрытии областей расчета часть узлов одного домена исключается из вычислительного процесса и заполняется значениями газовых параметров из ближайших узлов другого домена с использованием МНК-аппроксимации частных производных. Активные вычислительные узлы первого домена, в свою очередь, служат для заполнения перекрытых узлов второго.

Альтернативный подход также использует исключение узлов в перекрывающихся зонах, однако в этом случае место исключенных соседей занимают узлы другого домена, образуя таким образом единое связанное облако узлов. При этом часть узлов движется, часть — покоится. В расчете потоков учитываются принадлежность узлов разным доменам и их относительная скорость движения. Для реконструкции векторов консервативных переменных крайне важным фактором является необходимость вычисления градиента векторов консервативных переменных соседних узлов в собственных системах координат узлов, участвующих в реконструкции.

Проведена верификация предложенных моделей. Результаты расчета движения частицы в покоящемся газе и обтекания неподвижной частицы набегающим потоком при одинаковой относительной скорости показали хорошее согласование для обоих представленных методов.

2. Математическая модель обтекания тел сверхзвуковым потоком вязкого газа

Модель течения вязкого теплопроводного газа в трехмерном пространстве включает систему нестационарных уравнений Навье–Стокса в консервативных переменных в сочетании с уравнением состояния идеального газа [Молчанов, 2013]:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q})}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{F}^v(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^v(\mathbf{q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}^v(\mathbf{q})}{\partial z},$$

$$p = \rho RT,$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w - q_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w - q_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \tau_{zz}w - q_z \end{pmatrix},$$

$$H = e + \frac{p}{\rho}, \quad e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

где t — время, ρ — плотность, p — давление, T — температура, u, v, w — компоненты вектора скорости газа \mathbf{v} по осям координат x, y и z соответственно, R — газовая постоянная, γ — показатель адиабаты, H — полная энтальпия газа, $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ — векторы невязких потоков, а $\mathbf{F}^v, \mathbf{G}^v, \mathbf{H}^v$ — векторы вязких потоков вдоль координатных осей. Компоненты тензора вязких напряжений:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{zz} = \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Плотность теплового потока определяется вектором с компонентами

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Величина динамической вязкости вычисляется по известной формуле Сазерленда [Башкин, Егоров, 2013]:

$$\mu = \mu^* \left(\frac{T}{T^*} \right)^{3/2} \frac{T^* + C}{T + C},$$

где $\mu^* = 0,0000178 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$, $T^* = 273,15 \text{ К}$, $C^* = 110,4 \text{ К}$.

Коэффициент теплопроводности пропорционален динамической вязкости:

$$\lambda = \frac{C_p \mu}{\text{Pr}},$$

где $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, $\text{Pr} = 0,72$ — число Прандтля для воздуха.

На входе в расчетную область задаются граничные условия первого рода, определяющие невозмущенный сверхзвуковой поток с фиксированной температурой T_∞ , числами Маха M_∞ и Рейнольдса $\text{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu}$, где L — характерный размер преграды, на выходе — условия Неймана $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{n}} = 0$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе.

Поверхность обтекаемого газом тела считается твердой изотермической стенкой с известной температурой T_w , условиями прилипания и непротекания $\mathbf{v} = 0$, а также $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0$.

3. Бессеточный метод численного решения системы уравнений газовой динамики

Традиционно в отечественной научной литературе к бессеточным относят методы моделирования сплошной среды на основе лагранжевого подхода, такие как, например, метод сглаженных частиц [Потапов, Решетникова, 2021], которые перемещаются в пространстве вместе с элементами самой среды. Используемый в настоящей работе термин «бессеточный» является переводом английских слов *meshless* и *gridless*, фактически означающий «использование фиксированного набора расчетных узлов без разбиения области на замкнутые ячейки», а основу метода составляет аппроксимация частных производных газодинамических величин посредством радиально-базисных функций [Толстых, Широбоков, 2005] или методом наименьших квадратов, который и используется в настоящей работе [Способин, 2021]. В данном контексте термин «бессеточный» также встречается и в отечественной литературе [Толстых, Широбоков, 2005], однако пока не столь часто, поскольку сам подход лишь относительно недавно начал набирать популярность в практике решения задач вычислительной гидродинамики [Sattarzadeh, Jahangirian, 2012; Wang et al., 2015].

Для представления поля газодинамических величин в расчетной области формируется конечное множество дискретных точек с фиксированным расположением в пространстве. Вблизи обтекаемой поверхности точки сгущаются в направлении нормали в целях детального разрешения течения в пограничном слое (см. рис. 1).

Метод наименьших квадратов [Пирумов и др., 2019] служит основой аппроксимации заданного в пространстве поля скалярной величины $\varphi = \varphi(x, y, z)$ по значениям в дискретном множестве точек. Для каждого расчетного узла i и облака окружающих его соседних узлов $j \in C_i$

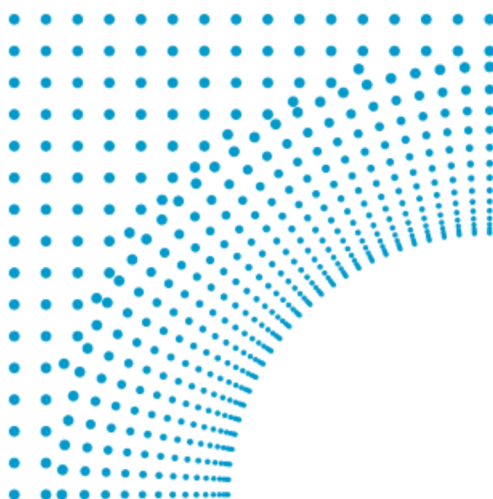
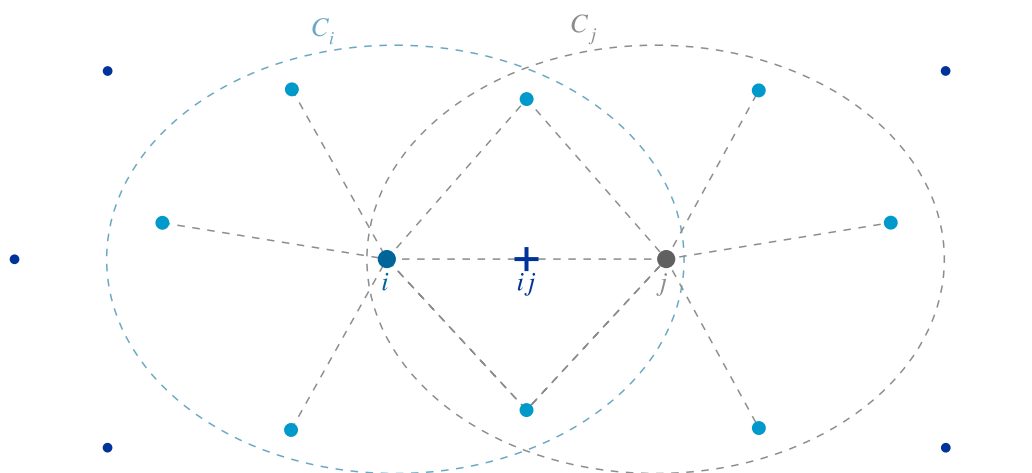


Рис. 1. Расположение вычислительных узлов в сечении расчетной области

Рис. 2. Облака вычислительных точек, окружающих узлы i и j

(см. рис. 2) записываются приближенные равенства:

$$\varphi_j = \varphi_i + \Delta x_{ij} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i + \Delta y_{ij} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_i + \Delta z_{ij} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_i + O(h^2),$$

$$\Delta x_{ij} = x_j - x_i, \quad \Delta y_{ij} = y_j - y_i, \quad \Delta z_{ij} = z_j - z_i, \quad \Delta \varphi_{ij} = \varphi_j - \varphi_i.$$

Согласно методу наименьших квадратов оптимальное приближение искомым частным производных $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i$, $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_i$, $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_i$ достигается минимизацией функционала:

$$\sum_{j \in C_i} \omega_{ij} \left(\Delta \varphi_{ij} - \Delta x_{ij} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i - \Delta y_{ij} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_i - \Delta z_{ij} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_i \right)^2 \rightarrow \min,$$

весовые коэффициенты ω_{ij} обратно пропорциональны расстоянию d_{ij} между узлом и его соседями с множителем, способствующем подавлению осцилляций решения [Sattarzadeh, Jahangirian,

Hashemi, 2016]:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{d_{ij}} \cdot \frac{e^{-(d_{ij}/d_{i \max})^2} - e^{-4}}{1 - e^{-4}},$$

$$d_{ij} = \sqrt{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2 + \Delta z_{ij}^2},$$

$$d_{i \max} = \max_{j \in C_i} d_{ij}.$$

Значения коэффициентов линейной комбинации для представления пространственных производных функции φ могут быть получены решением системы линейных уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i = \sum_{j \in C_i} \alpha_{ij} \Delta \varphi_{ij}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_i = \sum_{j \in C_i} \beta_{ij} \Delta \varphi_{ij}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_i = \sum_{j \in C_i} \gamma_{ij} \Delta \varphi_{ij},$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{ij} \\ \beta_{ij} \\ \gamma_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta x_{ik}^2 & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta y_{ik} & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta z_{ik} \\ \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta y_{ik} & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta y_{ik}^2 & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta y_{ik} \Delta z_{ik} \\ \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta z_{ik} & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta y_{ik} \Delta z_{ik} & \sum_{k \in C_i} \omega_{ik} \Delta z_{ik}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{ij} \Delta x_{ij} \\ \omega_{ij} \Delta y_{ij} \\ \omega_{ij} \Delta z_{ij} \end{bmatrix}.$$

При численном решении системы уравнений газовой динамики в роли функции φ выступают компоненты вектора скорости, давление, температура, плотность газа, сложные функции, их содержащие, а также компоненты вязких и конвективных потоков. Система уравнений Навье–Стокса в полудискретной форме приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial t} + 2 \sum_{j \in C_i} [\alpha_{ij} (\mathbf{F}_{ij} - \mathbf{F}_i) + \beta_{ij} (\mathbf{G}_{ij} - \mathbf{G}_i) + \gamma_{ij} (\mathbf{H}_{ij} - \mathbf{H}_i)] =$$

$$= 2 \sum_{j \in C_i} [\alpha_{ij} (\mathbf{F}_{ij}^v - \mathbf{F}_i^v) + \beta_{ij} (\mathbf{G}_{ij}^v - \mathbf{G}_i^v) + \gamma_{ij} (\mathbf{H}_{ij}^v - \mathbf{H}_i^v)].$$

Здесь $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(\mathbf{q}_i)$, $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}(\mathbf{q}_i)$, $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}(\mathbf{q}_i)$, $\mathbf{F}_i^v = \mathbf{F}^v(\mathbf{q}_i)$, $\mathbf{G}_i^v = \mathbf{G}^v(\mathbf{q}_i)$, $\mathbf{H}_i^v = \mathbf{H}^v(\mathbf{q}_i)$.

Векторы конвективных потоков \mathbf{F}_{ij} , \mathbf{G}_{ij} , \mathbf{H}_{ij} в середине отрезка ij , соединяющего узлы i и j , рассчитываются согласно схеме HLLC [Toro, Spruce, Speares, 1994] применительно к векторам консервативных переменных $\mathbf{q}^- = \Psi_{ij}^-$ и $\mathbf{q}^+ = \Psi_{ij}^+$, полученным покомпонентной MUSCL-реконструкцией с ограничителем van Albada 2 [Wang et al., 2015]:

$$\Psi = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e)^T,$$

$$\psi_{ij}^+ = \psi_i + \frac{s_i}{4} [(1 - ks_i) \Delta_{ij}^- + (1 + ks_i) (\psi_j - \psi_i)], \quad \Delta_{ij}^- = 2 \Delta \mathbf{r}_{ij} \bullet \nabla \psi_i - (\psi_j - \psi_i),$$

$$\psi_{ij}^- = \psi_j - \frac{s_j}{4} [(1 - ks_j) \Delta_{ij}^+ + (1 + ks_j) (\psi_j - \psi_i)], \quad \Delta_{ij}^+ = 2 \Delta \mathbf{r}_{ij} \bullet \nabla \psi_j - (\psi_j - \psi_i),$$

$$s_i = \max \left(0, \frac{2 \Delta_{ij}^- (\psi_j - \psi_i) + \varepsilon}{\Delta_{ij}^{-2} + (\psi_j - \psi_i)^2 + \varepsilon} \right), \quad s_j = \max \left(0, \frac{2 \Delta_{ij}^+ (\psi_j - \psi_i) + \varepsilon}{\Delta_{ij}^{+2} + (\psi_j - \psi_i)^2 + \varepsilon} \right),$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{pmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{pmatrix}, \quad \nabla \psi_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_n \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_n \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m \in C_n} \alpha_{mn} (\psi_m - \psi_n) \\ \sum_{m \in C_n} \beta_{mn} (\psi_m - \psi_n) \\ \sum_{m \in C_n} \gamma_{mn} (\psi_m - \psi_n) \end{pmatrix},$$

где коэффициент k определяет порядок аппроксимации схемы, при $k = \frac{1}{3}$ – третий порядок, при $k = 0$ или $k = \pm 1$ – второй. В настоящей работе применяются $k = \frac{1}{3}$, $\varepsilon = 10^{-13}$.

Производится Roe-усреднение векторов физических переменных для \mathbf{q}^+ и \mathbf{q}^- :

$$\begin{aligned}\widehat{\rho} &= \sqrt{\rho^-\rho^+}, & \widehat{e} &= \frac{e^-\sqrt{\rho^-} + e^+\sqrt{\rho^+}}{\sqrt{\rho^-} + \sqrt{\rho^+}}, & \widehat{c} &= \sqrt{\left\{ \widehat{e} - \frac{\widehat{u}^2 + \widehat{v}^2 + \widehat{w}^2}{2} \right\} \gamma(\gamma - 1)}, \\ \widehat{u} &= \frac{u^-\sqrt{\rho^-} + u^+\sqrt{\rho^+}}{\sqrt{\rho^-} + \sqrt{\rho^+}}, & \widehat{v} &= \frac{v^-\sqrt{\rho^-} + v^+\sqrt{\rho^+}}{\sqrt{\rho^-} + \sqrt{\rho^+}}, & \widehat{w} &= \frac{w^-\sqrt{\rho^-} + w^+\sqrt{\rho^+}}{\sqrt{\rho^-} + \sqrt{\rho^+}}.\end{aligned}$$

В целях обобщения записи представленной ниже схемы расчета конвективных потоков \mathbf{F}_{ij} , \mathbf{G}_{ij} и \mathbf{H}_{ij} вводятся векторы $\boldsymbol{\eta}$ и \mathbf{N} , зависящие от направления оси вектора потока:

$$\mathbf{N}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \eta_x & \eta_y & \eta_z & \alpha \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T & \text{для } \mathbf{F}_{ij}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T & \text{для } \mathbf{G}_{ij}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T & \text{для } \mathbf{H}_{ij}, \end{cases}$$

$$\vartheta = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}.$$

Здесь ϑ – нормальная проекция скорости.

Ниже подробно описана схема HLLC-расчета вектора \mathbf{F}_{ij} вдоль оси x , которой соответствует равенство нормальной проекции скорости $\vartheta = u$. В зависимости от направления вектора \mathbf{r}_{ij} выбираются \mathbf{q}_L и \mathbf{q}_R :

$$\mathbf{q}_L = \begin{cases} \mathbf{q}^+, & x_i \leq x_j, \\ \mathbf{q}^-, & x_i > x_j, \end{cases} \quad \mathbf{q}_R = \begin{cases} \mathbf{q}^-, & x_i \leq x_j, \\ \mathbf{q}^+, & x_i > x_j, \end{cases}$$

вычисляются скорости характеристик:

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \min(\vartheta_L - c_L, \widehat{\vartheta} - \widehat{c}), \\ \lambda_R &= \max(\vartheta_R + c_R, \widehat{\vartheta} + \widehat{c}), \\ \lambda_M &= \frac{p_R - p_L + \vartheta_L \rho_L (\lambda_L - \vartheta_L) - \vartheta_R \rho_R (\lambda_R - \vartheta_R)}{\rho_L (\lambda_L - \vartheta_L) - \rho_R (\lambda_R - \vartheta_R)}.\end{aligned}$$

Здесь $c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ – локальная скорость звука.

Согласно HLLC-схеме [Simon, Mandal, 2019],

$$\mathbf{F}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{q}_L), & 0 \leq \lambda_L, \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}_L) + \lambda_L (\mathbf{q}_L^* - \mathbf{q}_L), & \lambda_L \leq 0 \leq \lambda_M, \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}_R) + \lambda_R (\mathbf{q}_R^* - \mathbf{q}_R), & \lambda_M \leq 0 \leq \lambda_R, \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}_R), & \lambda_R \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}p_L^* &= \rho_L (\lambda_L - \vartheta_L) (\lambda_M - \vartheta_L) + p_L, \\ p_R^* &= \rho_R (\lambda_R - \vartheta_R) (\lambda_M - \vartheta_R) + p_R, \\ \mathbf{q}_L^* &= \frac{(\lambda_L - \vartheta_L) \mathbf{q}_L + (p_L^* \mathbf{N}_{\lambda_M} - p_L \mathbf{N}_{\vartheta_L})}{\lambda_M - \lambda_L}, \\ \mathbf{q}_R^* &= \frac{(\lambda_R - \vartheta_R) \mathbf{q}_R + (p_R^* \mathbf{N}_{\lambda_M} - p_R \mathbf{N}_{\vartheta_R})}{\lambda_M - \lambda_R}.\end{aligned}$$

Схемы расчета конвективных потоков \mathbf{G}_{ij} и \mathbf{H}_{ij} вдоль осей y и z аналогичны приведенной схеме с учетом выбора направления вектора $\boldsymbol{\eta}$ и равенства нормальной скорости $\vartheta = v$ и $\vartheta = w$ соответственно.

Частные пространственные производные температуры и компонентов скорости требуются для расчета элементов тензора вязких напряжений и вектора теплового потока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}|_i &= \sum_{j \in C_i} \alpha_{ij}(u_j - u_i), & \frac{\partial u}{\partial y}|_i &= \sum_{j \in C_i} \beta_{ij}(u_j - u_i), & \dots, & & \frac{\partial T}{\partial z}|_i &= \sum_{j \in C_i} \gamma_{ij}(T_j - T_i), \\ \tau_{xx}|_i &= \frac{2}{3}\mu_i \left(2 \frac{\partial u}{\partial x}|_i - \frac{\partial v}{\partial y}|_i - \frac{\partial w}{\partial z}|_i \right), & \dots, & & \tau_{xy}|_i &= \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial y}|_i + \frac{\partial v}{\partial x}|_i \right), & \dots, & & q_z|_i &= -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z}|_i, \end{aligned}$$

полученные величины непосредственно используются для вычисления векторов вязких потоков $\mathbf{F}_i^v = \mathbf{F}^v(\mathbf{q}_i)$, $\mathbf{G}_i^v = \mathbf{G}^v(\mathbf{q}_i)$, $\mathbf{H}_i^v = \mathbf{H}^v(\mathbf{q}_i)$ в узле i согласно приведенным выше выражениям.

Реконструкция векторов градиента физических переменных u , v , w , T , необходимых для вычисления вязких потоков \mathbf{F}_{ij}^v , \mathbf{G}_{ij}^v , \mathbf{H}_{ij}^v в середине отрезка ij , соединяющего узлы i и j , выполняется согласно [Hashemi, Jahangirian, 2011]:

$$\nabla\varphi|_{ij} = \overline{\nabla\varphi|_{ij}} - \left(\overline{\nabla\varphi|_{ij}} \cdot \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} - \frac{\varphi_j - \varphi_i}{|\mathbf{r}_{ij}|} \right) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}, \quad \overline{\nabla\varphi|_{ij}} = \frac{\nabla\varphi|_i + \nabla\varphi|_j}{2}.$$

Например, расчет компоненты $\tau_{xy}|_{ij}$ производится следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}|_{ij} &= \overline{\frac{\partial u}{\partial y}|_{ij}} - \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x}|_{ij}}(x_j - x_i) + \overline{\frac{\partial u}{\partial y}|_{ij}}(y_j - y_i) + \overline{\frac{\partial u}{\partial z}|_{ij}}(z_j - z_i) - \frac{u_j - u_i}{|\mathbf{r}_{ij}|} \right) \frac{y_j - y_i}{|\mathbf{r}_{ij}|}, \\ \overline{\frac{\partial u}{\partial x}|_{ij}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}|_i + \frac{\partial u}{\partial x}|_j \right), & \overline{\frac{\partial u}{\partial y}|_{ij}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}|_i + \frac{\partial u}{\partial y}|_j \right), & \overline{\frac{\partial u}{\partial z}|_{ij}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z}|_i + \frac{\partial u}{\partial z}|_j \right), \\ \frac{\partial v}{\partial x}|_{ij} &= \overline{\frac{\partial v}{\partial x}|_{ij}} - \left(\overline{\frac{\partial v}{\partial x}|_{ij}}(x_j - x_i) + \overline{\frac{\partial v}{\partial y}|_{ij}}(y_j - y_i) + \overline{\frac{\partial v}{\partial z}|_{ij}}(z_j - z_i) - \frac{v_j - v_i}{|\mathbf{r}_{ij}|} \right) \frac{x_j - x_i}{|\mathbf{r}_{ij}|}, \\ \overline{\frac{\partial v}{\partial x}|_{ij}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}|_i + \frac{\partial v}{\partial x}|_j \right), & \overline{\frac{\partial v}{\partial y}|_{ij}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}|_i + \frac{\partial v}{\partial y}|_j \right), & \overline{\frac{\partial v}{\partial z}|_{ij}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z}|_i + \frac{\partial v}{\partial z}|_j \right), \end{aligned}$$

вязкость определяется осреднением значения в узлах:

$$\mu_{ij} = \frac{\mu_i + \mu_j}{2},$$

тогда

$$\tau_{xy}|_{ij} = \mu_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial y}|_{ij} + \frac{\partial v}{\partial x}|_{ij} \right),$$

остальные компоненты тензора вязких напряжений вычисляются аналогичным образом.

Численное интегрирование системы уравнений газовой динамики по времени выполняется явным методом Рунге – Кутты третьего порядка [Wang et al., 2015].

Реализация граничных условий Неймана также основана на аппроксимации производной по нормали к поверхности $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}$ методом наименьших квадратов [Hashemi, Jahangirian, 2011]:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_i &= \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi = n_x \sum_{j \in \tilde{C}_i} \alpha_{ij} (\varphi_j - \varphi_i) + n_y \sum_{j \in \tilde{C}_i} \beta_{ij} (\varphi_j - \varphi_i) + n_z \sum_{j \in \tilde{C}_i} \gamma_{ij} (\varphi_j - \varphi_i), \\ \eta_{ij} &= \alpha_{ij} n_x + \beta_{ij} n_y + \gamma_{ij} n_z, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_i &= \sum_{j \in \tilde{C}_i} \eta_{ij} (\varphi_j - \varphi_i) = \sum_{j \in \tilde{C}_i} \eta_{ij} \varphi_j - \varphi_i \sum_{j \in \tilde{C}_i} \eta_{ij}, \\ \varphi_i &= \frac{\sum_{j \in \tilde{C}_i} \eta_{ij} \varphi_j - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_i}{\sum_{j \in \tilde{C}_i} \eta_{ij}}, \end{aligned}$$

где n_x, n_y, n_z — компоненты вектора внешней нормали \mathbf{n} в узле i на границе поверхности, \tilde{C}_i — множество его соседних узлов, не принадлежащих границе (см. рис. 3).

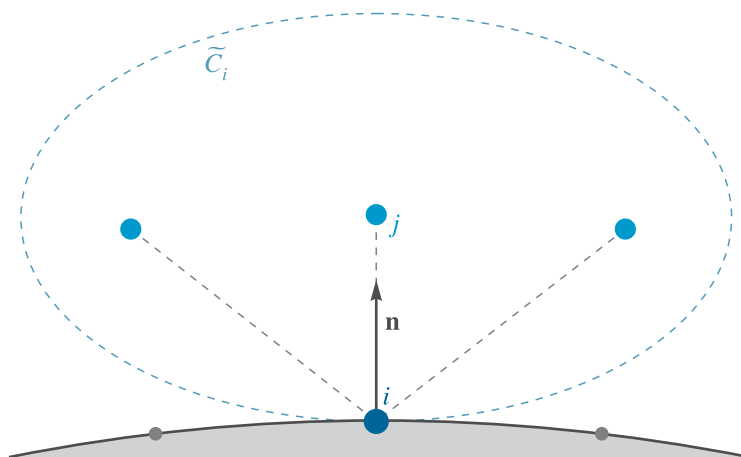


Рис. 3. Реализация граничных условий на обтекаемой поверхности

Расчет компонент вектора состояния газа в узле i на границе изотермической стенки с температурой T_w осуществляется согласно выражениям

$$T_i = T_w, \quad p_i = \frac{\sum_{j \in \tilde{C}_i} \eta_{ij} p_j}{\sum_{j \in \tilde{C}_i} \eta_{ij}}, \quad \rho_i = \frac{p_i}{RT_i}, \quad u_i = v_i = w_i = 0, \quad e_i = \frac{p_i}{\rho_i(\gamma - 1)}.$$

4. Верификация бессеточного метода численного решения системы уравнений газовой динамики

В целях проверки работоспособности описанного выше метода решения системы уравнений газовой динамики, а также корректности его реализации в виде разработанного программного обеспечения выполнен ряд вычислительных экспериментов. В частности, решалась модельная задача обтекания сферы радиусом $R_s = 55$ мм сверхзвуковым воздушным потоком с параметрами невозмущенного течения: температура $T_\infty = 300$ К, число Маха $M_\infty = 3$, число Рейнольдса $Re|_{L=2R_s} = 10^5$. Поверхность сферы считалась твердой изотермической стенкой с температурой $T_w = 500$ К и условиями прилипания $\mathbf{v} = 0, T = T_w$.

На рис. 4 представлена полученная в численном эксперименте теньевая картина течения газа. Положение головной ударной волны очень близко к штриховой кривой, построенной согласно известному приближенно аналитическому выражению [Billig, 1967]:

$$x(y) = -R_s - \Delta + R_c (M_\infty^2 - 1) \left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{R_c^2 (M_\infty^2 - 1)}} - 1 \right),$$

$$R_c = 1,143 \cdot R_s \cdot \exp\left(\frac{0,54}{(M_\infty - 1)^{1,2}}\right), \quad \Delta = 0,143 \cdot R_s \cdot \exp\left(\frac{3,24}{M_\infty^2}\right).$$

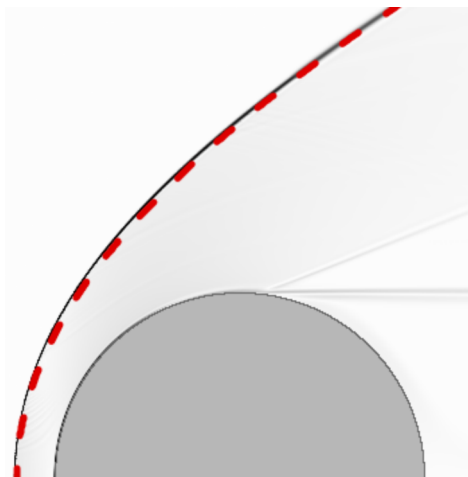


Рис. 4. Теньевая картина обтекания сферы и фронт головной ударной волны

Распределение коэффициента давления $c_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right)$ вдоль поверхности сферы, полученное численным расчетом бессеточным методом, практически совпадает с эталонными распределением из атласа [Любимов, Русанов, 1970] (см. рис. 5).

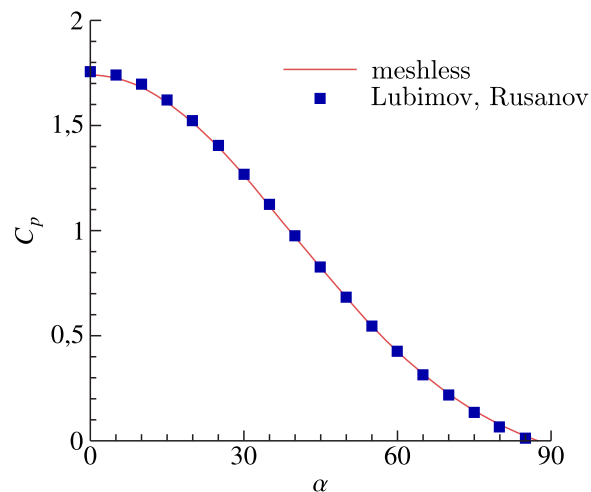


Рис. 5. Сравнение расчетного коэффициента давления на поверхности сферы с данными из атласа

Качественное воспроизведение параметров газа в пограничном слое вблизи обтекаемой поверхности является ключевым условием применимости представленной вычислительной модели для оценки влияния присутствия крупных частиц в ударном слое на конвективный тепловой

поток от газа к телу. Результаты численного решения системы уравнений Навье–Стокса бессеточным методом сопоставляются с результатами расчетов для системы уравнений Эйлера, описывающей течение невязкого газа, и последующим решением системы уравнений пограничного слоя [Ревизников, 1995]. Получено хорошее согласование профиля температуры в радиальных сечениях пограничного слоя (см. рис. 6).

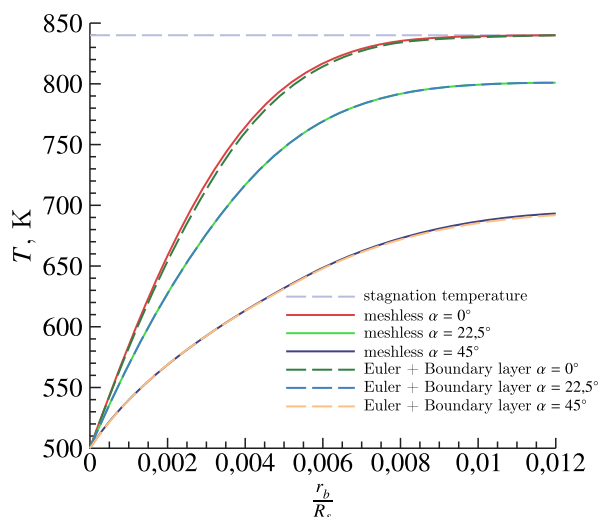


Рис. 6. Сравнение профиля температуры газа в сечениях пограничного слоя

Распределение конвективного теплового потока $Q = \lambda \frac{\partial T}{\partial n}$ от газа к поверхности сферы (см. рис. 7), полученное численным расчетом бессеточным методом, показывает хорошее соответствие известной приближенно-аналитической кривой распределения теплового потока для высокоскоростного обтекания сферы $Q(\alpha) = Q_{FR}(0,55 + 0,45 \cos 2\alpha)$ [Полежаев, Юревич, 1976].

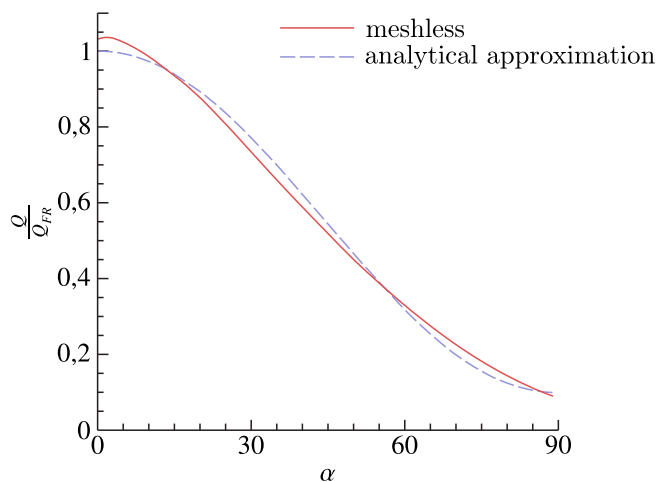


Рис. 7. Сравнение распределения конвективного теплового потока от газа к поверхности сферы

5. Моделирование движения частиц в газовом потоке

Разработанная модель позволяет исследовать сверхзвуковое течение вязкого газа в присутствии одной или нескольких относительно крупных движущихся частиц. Расчет обтекания

каждого твердого тела производится путем решения системы уравнений газовой динамики в своей системе координат на выделенном множестве расчетных узлов, принадлежащих его домену. Обтекаемая сверхзвуковым потоком преграда считается неподвижной вместе со своей системой координат, доменом и облаком узлов, которые в дальнейшем именуется основными. На входной границе основной расчетной области установлены параметры набегающего потока (\mathbf{n} — вектор нормали к границе):

$$\rho = \rho_\infty, \quad T = T_\infty, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

Граничные условия Неймана заданы на выходе из основной области расчета:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

Частица при движении в потоке испытывает действие силы аэродинамического сопротивления \mathbf{f}_D , которая определяется давлением газа в точках на ее поверхности, а также силой вязкого трения:

$$m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{f}_D, \quad \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \mathbf{v}_p,$$

где m_p — масса, \mathbf{v}_p — скорость, \mathbf{r}_p — радиус-вектор частицы.

Вокруг каждой частицы формируется локальное облако перемещающихся вместе с ней расчетных узлов, принадлежащих ее домену. В локальной системе координат сама частица считается неподвижной, и на ее поверхности справедливы граничные условия, аналогичные условиям на поверхности основной преграды. Реализовано два подхода к моделированию взаимодействия узлов основного неподвижного домена с узлами движущихся локальных.

Метод скользящих облаков аналогичен методу скользящих адаптивных декартовых сеток, который применялся в предыдущих работах для решения аналогичной задачи в двумерной постановке [Sposobin, Reviznikov, 2021]. На каждом шаге расчета во внешних узлах локального облака задаются граничные условия первого рода, вычисленные по параметрам газа из основного домена в соответствующих точках пространства с учетом расположения частицы и ее скорости. Область пространства, соответствующая внутренней части локального домена, привязанного к частице, исключается из расчета в основном домене и заполняется параметрами газа путем их переноса в обратную сторону — из узлов локального домена к узлам основной системы координат посредством обратного преобразования по окончании шага расчета. В зону перекрытия доменов узлы включаются вместе со своими соседями, это необходимо для вычисления градиентов газодинамических величин (см. рис. 8).

Трансформация компонентов вектора консервативных переменных $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}'$ из основной системы координат в локальную, движущуюся со скоростью частицы \mathbf{v}_p , и обратно обязана учитывать скорость их относительного движения:

$$\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho' u' \\ \rho' v' \\ \rho' w' \\ \rho' e' \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \rho' &= \rho, \\ p' &= p, \\ u' &= u - v_{px}, \\ v' &= v - v_{py}, \\ w' &= w - v_{pz}, \end{aligned} \quad e' = \frac{p'}{\rho'(\gamma - 1)} + \frac{|\mathbf{v}'|^2}{2}, \quad \begin{aligned} \rho &= \rho' \\ p &= p' \\ u &= u' + v_{px} \\ v &= v' + v_{py} \\ w &= w' + v_{pz} \end{aligned}$$

Вектор состояния газа \mathbf{q}_A в точке A определяется вектором состояния газа \mathbf{q}_i в ближайшем расчетном узле i и градиентом $\nabla \mathbf{q}|_i$:

$$\mathbf{q}_A = \mathbf{q}_i + \nabla \mathbf{q}|_i \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_i),$$

где \mathbf{r}_A — радиус-вектор точки A , \mathbf{r}_i — радиус-вектор узла i в одной и той же системах координат.

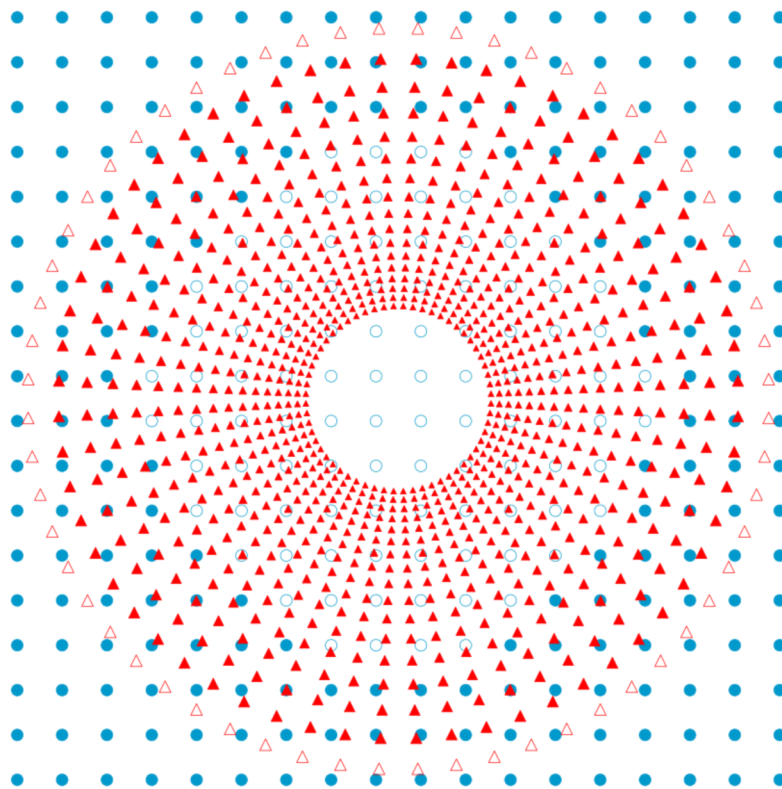


Рис. 8. Наложение узлов основного домена и домена частицы в методе скользящих облаков. Исключенные узлы отмечены полными маркерами

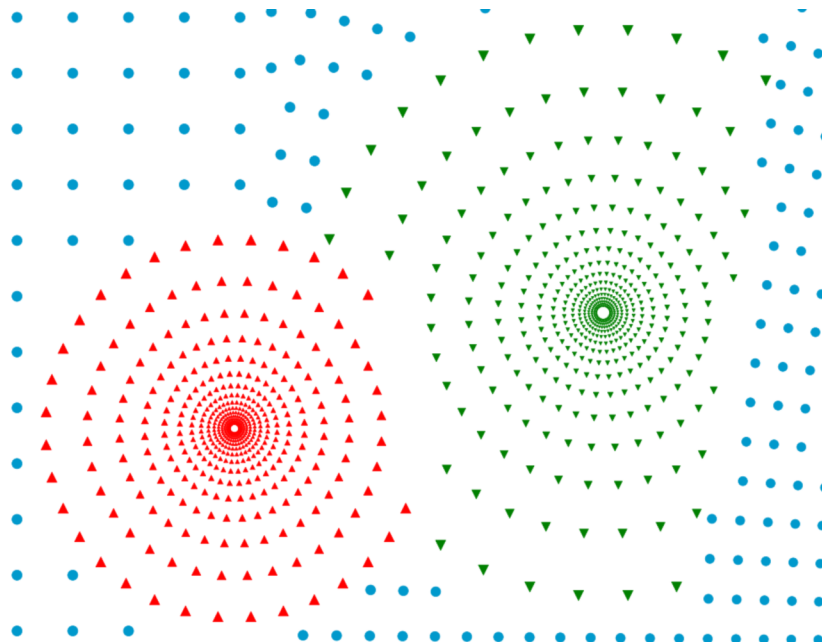


Рис. 9. Формирование единого облака из узлов, принадлежащих разным доменам

Альтернативный подход предполагает формирование единого облака узлов, принадлежащих различным доменам. Внешние узлы локального домена связываются с ближайшими соседями-

ми из основного и наоборот, а узлы основного домена, оказавшиеся внутри локального, исключаются из расчета (см. рис. 9). Расчет векторов конвективных и вязких потоков между узлами при их принадлежности к разным доменам выполняется при трансформации векторов состояния \mathbf{q} в единую систему координат с учетом скорости относительного движения доменов, при вычислении градиентов $\nabla \mathbf{q}$ вектора состояния соседних с ними узлов также обязательно должны быть пересчитаны в эту же систему координат. Метод единого облака позволяет моделировать газодинамическое взаимодействие частиц при их сближении и соударениях, в этом случае узлы перекрывающихся зон локальных доменов временно исключаются из расчета симметричным образом.

6. Верификация модели движения частиц

Проведена серия вычислительных экспериментов для проверки работы представленных методов моделирования обтекания газом движущихся объектов. Например, в одной из серий испытаний рассчитывалось обтекание сферы в следующих режимах:

- тело покоится: $M_p = 0$; число Маха набегающего потока $M_\infty = 2$;
- тело движется поступательно против набегающего потока: $M_\infty = 1$; скорость движения тела соответствует скорости газа с числом Маха $M_p = 1$;
- газ неподвижен: $M_\infty = 0$; тело движется поступательно, скорость движения тела соответствует скорости газа с числом Маха $M_p = 2$.

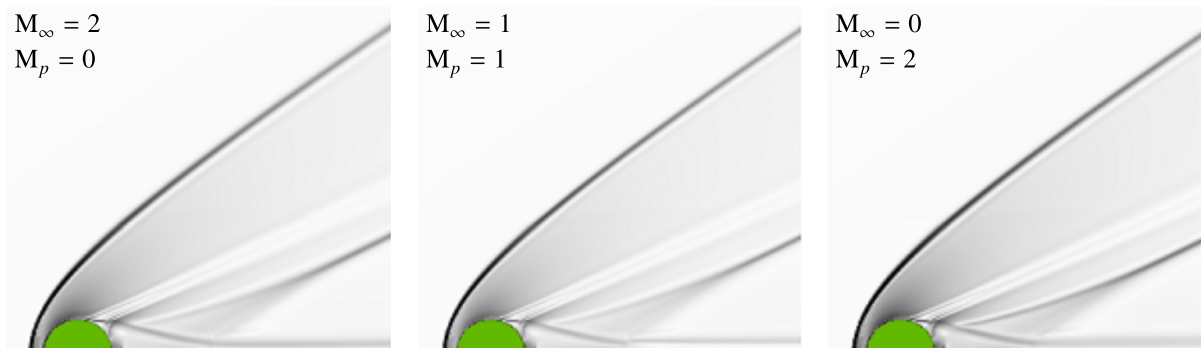


Рис. 10. Теневая картина обтекания сферы (метод скользящих облаков)

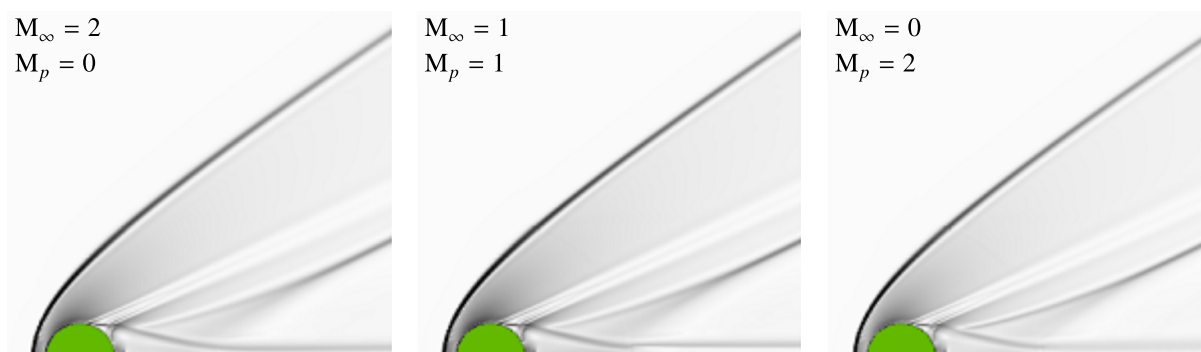


Рис. 11. Теневая картина обтекания сферы (единое облако узлов)

Число Рейнольдса набегающего потока в серии испытаний — $Re = \frac{\rho UL}{\mu} = 10^5$, здесь $L = D$ — диаметр сферы, U — скорость газа относительно тела. Теневые картины течения газа (см. рис. 10, 11), а также давление на поверхности (см. рис. 12) во всех трех случаях практически идентичны, что свидетельствует в пользу работоспособности разработанных моделей.

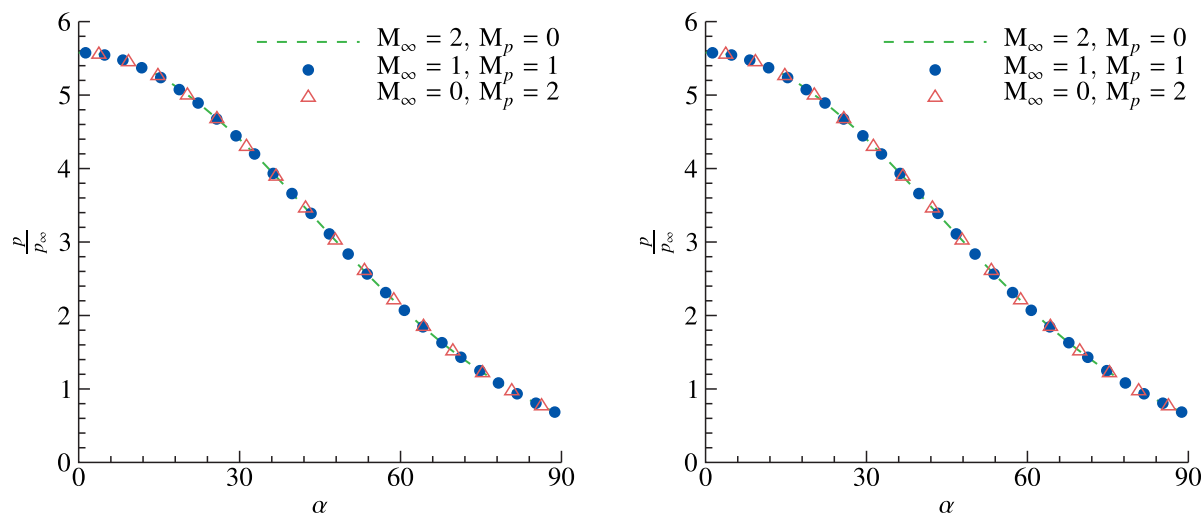


Рис. 12. Распределение давления газа на поверхности сферы: метод скользящих облаков (левый график), единое облако узлов (правый график)

7. Применение метода

Программная реализация описанных алгоритмов выполнена на языке программирования C++ в сочетании с технологией распараллеливания вычислений OpenCL, которая позволяет использовать гетерогенные параллельные вычислительные устройства, в том числе графические процессоры различных производителей.

Проведен вычислительный эксперимент по моделированию движения крупной сферической частицы диаметром $d_p = 2 \cdot 10^{-4}$ м из диоксида кремния SiO_2 плотностью $\rho_p = 2170$ кг/м³ вдоль оси симметрии сферы диаметром $D = 0,075$ м навстречу набегающему потоку с числами Маха $M_\infty = 6$ и Рейнольдса $Re|_{L=D} = 1,09 \cdot 10^6$. Начальная скорость частицы у поверхности тела 150 м/с.

На рис. 13 показаны теневые картины течения в последовательные моменты времени $t_0 = 0$ с, $t_1 = 6,7 \cdot 10^{-5}$ с, $t_2 = 9,5 \cdot 10^{-5}$ с, $t_3 = 11 \cdot 10^{-5}$ с, $t_4 = 12,5 \cdot 10^{-5}$ с, $t_5 = 21 \cdot 10^{-5}$ с, а на рис. 14 — соответствующие им графики распределения давления и конвективного теплового потока вдоль поверхности сферы.

Угловая координата α на приведенных графиках отсчитывается от критической точки по часовой стрелке. Величина теплового потока нормирована значением Q_{FR} теплового потока в критической точке на поверхности сферы, вычисленным согласно известной приближенно-аналитической зависимости Фэя – Ридделла [Fay, Riddell, 1958]:

$$Q_{FR} = 0,763 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^f Pr^{-0,6} (\rho_0 \mu_0)^{0,4} (\rho_w \mu_w)^{0,1} (H_0 - H_w) \sqrt{\left(\frac{dv}{dy} \right)_0}, \quad T_0 = T_\infty + \frac{|\mathbf{v}_\infty|^2}{2C_p},$$

$$p_0 = p_\infty \left(\frac{(\gamma + 1)M_\infty^2}{2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_\infty^2 - \gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}, \quad p_w = p_0, \quad \rho_w = \frac{p_w}{RT_w}.$$

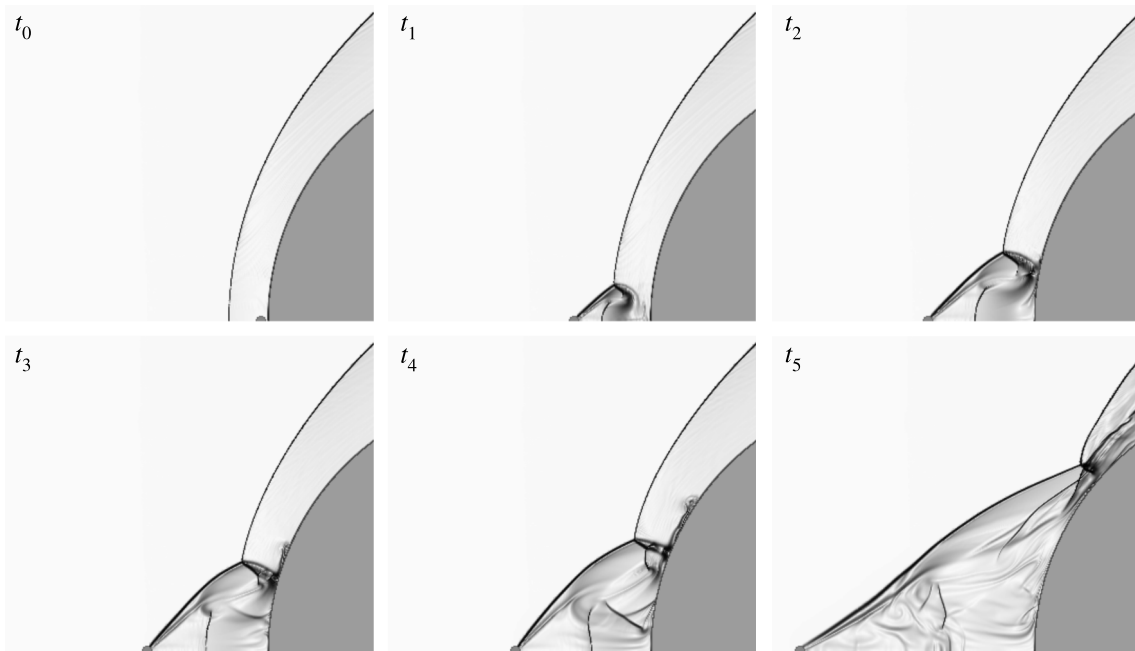


Рис. 13. Теневая картина эволюции течения в ударном слое в процессе перемещения частицы вдоль оси симметрии сферы

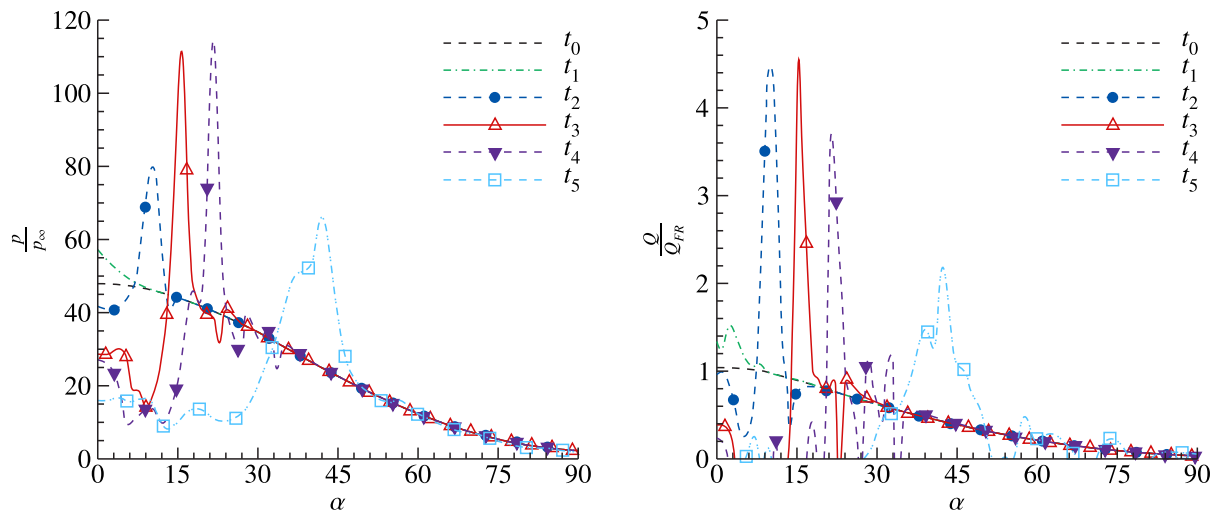


Рис. 14. Колебания давления (левый график) и конвективного теплового потока (правый график) на поверхности сферы, индуцированные газодинамическим взаимодействием частицы с ударным слоем

Здесь $f = 1$ для плоских течений и $f = 0$ для осесимметричных, энтальпия $H = C_p T$, C_p — теплоемкость газа при постоянном давлении, нижние индексы 0 соответствуют параметрам газа в точке торможения, w — на стенке, ∞ — набегающему невозмущенному потоку. Градиент скорости в критической точке рассчитывается по формуле

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)_0 = \frac{1}{R_s} \sqrt{\frac{2(p_0 - p_\infty)}{\rho_0}}.$$

При прохождении частицей головной ударной волны происходит разрушение стационарной ударно-волновой структуры с образованием конусообразной области возмущения, вершина

которой смещается вместе с частицей. В зоне контакта конусообразной и головной ударных волн возникает λ -конфигурация из трех волн с направленной в сторону обтекаемой поверхности импактной струей, являющейся причиной значительного роста давления и кратного увеличения теплового потока в локальной области, подверженной воздействию струи (см. рис. 14). По мере удаления частицы от поверхности отмеченная конфигурация ударных волн эволюционирует, а зона их контакта вместе с областью интенсивного воздействия газа на поверхность смещается к периферии. Детальный анализ наблюдаемых явлений и механизмов их возникновения приведен в работе [Ревизников, Способин, Иванов, 2018], где подобная задача решается методом конечных объемов на адаптивных декартовых сетках.

8. Заключение

В статье детально представлена математическая модель обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа с высокоинерционными частицами. Бессеточный метод решения системы уравнений газовой динамики, в основе которого лежит МНК-аппроксимация частных производных по направлению газодинамических величин и их функций, использует анизотропное распределение вычислительных узлов для разрешения течения в пограничном слое с целью расчета конвективного теплового потока от газа к поверхности.

Приведены результаты верификации метода на примере решения задачи обтекания сферы сверхзвуковым вязким потоком.

Предложены и апробированы два подхода к моделированию движения крупных частиц, учитывающие газодинамическое взаимодействие объектов с несущей средой: метод скользящих облаков и метод формирования единого облака расчетных узлов в рамках бессеточного метода решения систем уравнений газовой динамики.

Решена модельная задача обтекания сферы высокоскоростным потоком с движущейся вдоль оси симметрии крупной частицей. Показаны эволюция картины течения в ударном слое и изменение параметров газа у поверхности сферы, в том числе локализованы области интенсификации теплового воздействия на преграду.

Разработанные алгоритмы и созданное на их основе программное обеспечение открывают широкие возможности для дальнейшего детального исследования влияния крупнодисперсной примеси на течение в ударном слое вблизи поверхности затупленного тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком, в том числе движения одной или нескольких частиц по сложным траекториям, а также изучения коллективных эффектов, возникающих при наличии в потоке группы частиц.

Список литературы (References)

- Башкин В. А., Егоров И. В. Численное исследование задач внешней и внутренней аэродинамики. — М.: Физматлит, 2013.
Bashkin V. A., Egorov I. V. Chislennoe issledovanie zadach vneshnej i vnutrennej aerodinamiki [Numerical study of problems of external and internal aerodynamics]. — Moscow: Fizmatlit, 2013 (in Russian).
- Вараксин А. Ю. Обтекание тел дисперсными газовыми потоками // Теплофизика высоких температур. — 2018. — Т. 56, № 2. — С. 282–305.
Varaksin A. Yu. Gas-solid flows past bodies // High Temperature. — 2018. — Vol. 56, No. 2. — P. 275–295. (Original Russian paper: *Varaksin A. Yu. Obtekanie tel dispersnymi gazovymi potokami // Teplofizika vysokih temperatur.* — 2018. — Vol. 56, No. 2. — P. 282–305.)
- Егоров И. В., Конг К., Новиков А. В. Моделирование обтекания носовой части спускаемого космического аппарата в атмосфере Марса // Ученые записки ЦАГИ. — 2021. — Т. 52, № 4. — С. 20–33.
Egorov I. V., Kong K., Novikov A. V. Modelirovanie obtekanija nosovoj chasti spuskaemogo kosmicheskogo apparata v atmosfere Marsa [Simulation of flow over the front part of the descent space vehicle in the atmosphere of Mars] // *TsAGI Science Journal.* — 2021. — Vol. 52, No. 4. — P. 20–33 (in Russian).

- Любимов А. Н., Русанов В. В. Течение газа около тупых тел. — М.: Наука, 1970.
Lyubimov A. N., Rusanov V. V. Tечenie gaza okolo tupyh tel [Gas flow near blunt bodies]. — Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).
- Михатулин Д. С., Полежаев Ю. В., Ревизников Д. Л. Исследование разрушения углеродного теплозащитного материала при полете в запыленной атмосфере // Теплофизика высоких температур. — 2003. — Т. 41, № 1. — С. 98–105.
Mikhatulin D. S., Polezhaev Yu. V., Reviznikov D. L. Investigation of failure of carbon heat-shielding material under conditions of flight in dusty atmosphere // High Temperature. — 2003. — Vol. 41, No. 1. — P. 88–94. (Original Russian paper: Mikhatulin D. S., Polezhaev Yu. V., Reviznikov D. L. Issledovanie razrusheniya uglerodnogo teplozashchitnogo materiala pri polete v zapylennoj atmosfere // Teplofizika vysokih temperatur. — 2003. — Vol. 41, No. 1. — P. 98–105.)
- Михатулин Д. С., Полежаев Ю. В., Ревизников Д. Л. Теплообмен и разрушение тел в сверхзвуковом гетерогенном потоке. — М.: ЯНУС-К, 2007.
Mikhatulin D. S., Polezhaev Yu. V., Reviznikov D. L. Teploobmen i razrushenie tel v sverkhzvukovom geterogennom potoke [Heat transfer and destruction of bodies in a supersonic heterogeneous flow]. — Moscow: YANUS-K, 2007 (in Russian).
- Молчанов А. М. Математическое моделирование задач газодинамики и теплообмена. — М.: изд-во МАИ, 2013.
Molchanov A. M. Matematicheskoe modelirovanie zadach gazodinamiki i teplomassoobmena [Mathematical modeling of problems of gas dynamics and heat and mass transfer]. — Moscow: MAI, 2013 (in Russian).
- Пирумов У. Г., Формалев В. Ф., Гидаспов В. Ю., Иванов И. Э., Ревизников Д. Л., Стрельцов В. Ю. Численные методы. Учебник и практикум. — М.: Юрайт, 2019.
Pirumov U. G., Formalev V. F., Gidaspov V. Yu., Ivanov I. E., Reviznikov D. L., Streltsov V. Yu. Chislennye metody. Uchebnik i praktikum [Numerical methods. Textbook and practice]. — Moscow: Urait, 2019 (in Russian).
- Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б. Тепловая защита. — М.: Энергия, 1976.
Polezhaev Yu. V., Yurevich F. B. Teplovaya zashchita [Thermal protection]. — Moscow: Energiya, 1976 (in Russian).
- Потапов И. И., Решетникова О. В. Исследование влияния двух геометрических параметров на точность решения гидростатической задачи методом гидродинамики сглаженных частиц // Компьютерные исследования и моделирование. — 2021. — Т. 13, № 5. — С. 979–992.
Potapov I. I., Reshetnikova O. V. Issledovanie vliyaniya dvuh geometricheskikh parametrov na tochnost resheniya gidrostaticheskoy zadachi metodom gidrodinamiki sglazhennykh chastic [The two geometric parameters influence study on the hydrostatic problem solution accuracy by the SPH method] // Computer Research and Modeling. — 2021. — Vol. 13, No. 5. — P. 979–992 (in Russian).
- Ревизников Д. Л. Коэффициенты неизотермичности в задаче нестационарного сопряженного теплообмена на поверхности затупленных тел // Теплофизика высоких температур. — 1995. — Т. 33, № 2. — С. 261–267.
Reviznikov D. L. Coefficients of nonisothermicity in the problem of unsteady – state conjugate heat transfer on the surface on the blunt bodies // High Temperature. — 1995. — Vol. 33, No. 2. — P. 259–264. (Original Russian paper: Reviznikov D. L. Koeffitsienty neizotermichnosti v zadache nestacionarnogo sopryazhennogo teploobmena na poverhnosti zatuplennykh tel // Teplofizika vysokih temperatur. — 1995. — Vol. 33, No. 2. — P. 261–267.)
- Ревизников Д. Л., Способин А. В., Иванов И. Э. Изменение структуры течения под воздействием высокоинерционной частицы при обтекании тела сверхзвуковым гетерогенным потоком // Теплофизика высоких температур. — 2018. — Т. 56, № 6. — С. 908–913.
Reviznikov D. L., Sposobin A. V., Ivanov I. E. A change in the structure of a flow under the action of highly inertial particle when a hypersonic heterogeneous flow passes over a body // High Temperature. — 2018. — Vol. 56, No. 6. — P. 884–889. (Original Russian paper: Reviznikov D. L., Sposobin A. V., Ivanov I. E. Izmenenie struktury techeniya pod vozdejstviem vysokoinercionnoj chasticy pri obtekanii tela sverkhzvukovym geterogennym potokom // Teplofizika vysokih temperatur. — 2018. — Vol. 56, No. 6. — P. 908–913.)
- Ревизников Д. Л., Способин А. В., Иванов И. Э. Сравнительный анализ расчетных и экспериментальных данных об осциллирующем течении, индуцированном газодинамическим взаимодействием частицы с ударным слоем // Теплофизика высоких температур. — 2020. — Т. 58, № 6. — С. 901–908.
Reviznikov D. L., Sposobin A. V., Ivanov I. E. Comparative analysis of calculated and experimental data on an oscillating flow induced by the gasdynamic interaction of a particle with a shock layer // High Temperature. — 2020. — Vol. 58. — P. 839–845. (Original Russian paper: Reviznikov D. L., Sposobin A. V., Ivanov I. E. Sravnitelnyj analiz raschetnykh i eksperimentalnykh dannyh ob oscilliruyushchem techenii, inducirovannom gazodinamicheskim vzaimodejstviem chasticy s udarnym sloem // Teplofizika vysokih temperatur. — 2020. — Vol. 58, No. 6. — P. 901–908.)
- Ревизников Д. Л., Сухарев Т. Ю. Гиперзвуковое обтекание затупленных тел в условиях атмосферы Земли и Марса. Сравнительный анализ математических моделей // Тепловые процессы в технике. — 2018. — Т. 10, № 1–2. — С. 5–15.

- Reviznikov D. L., Sukharev T. Yu.* Giperzvukovoe obtekanie zatuplennykh tel v usloviyakh atmosfery Zemli i Marsa. Sravnitelnyy analiz matematicheskikh modelej [Hypersonic flow around blunted bodies in the atmosphere of Earth and Mars. Comparative analysis of mathematical models] // *Thermal Processes in Engineering*. — 2018. — Vol. 10, No. 1–2. — P. 5–15 (in Russian).
- Садин Д. В.* Приложение гибридного метода крупных частиц к расчету взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2020. — Т. 12, № 6. — С. 1323–1338.
- Sadin D. V.* Prilozhenie gibridnogo metoda krupnykh chasticz k raschetu vzaimodejstviya udarnoj volny so sloem gazozvesi [Application of a hybrid large-particle method to the computation of the interaction of a shock wave with a gas suspension layer] // *Computer Research and Modeling*. — 2020. — Vol. 12, No. 6. — P. 1323–1338 (in Russian).
- Способин А. В.* Бессеточный алгоритм расчета сверхзвуковых течений вязкого теплопроводного газа // *Труды МАИ*. — 2021. — № 121. — 25 с. — URL: <https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-09> (дата обращения: 10.05.2022).
- Sposobin A. V.* Bessetchnyj algoritm raschyota sverhzvukovykh techenij vyazkogo teploprovodnogo gaza [Meshless algorithm for calculating supersonic viscous gas flows] // *Trudy MAI*. — 2021. — No. 121. — 25 p. (in Russian). — Available at: <https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-09> (accessed: 10.05.2022).
- Способин А. В.* Метод скользящих адаптивных декартовых сеток расчета газодинамического взаимодействия частиц с ударным слоем в сверхзвуковом потоке // *Тепловые процессы в технике*. — 2022. — Т. 14, № 4. — С. 178–185.
- Sposobin A. V.* Metod skolzyashchih adaptivnykh dekartovykh setok raschyota gazodinamicheskogo vzaimodejstviya chasticz s udarnym sloem v sverhzvukovom potoke [The method of sliding adaptive Cartesian grids for calculating the gas-dynamic interaction of particles with a supersonic shock layer] // *Thermal Processes in Engineering*. — 2022. — Vol. 14, No. 4. — P. 178–185 (in Russian).
- Способин А. В., Ревизников Д. Л., Иванов И. Э., Крюков И. А.* Колебания давления и теплового потока, индуцированные газодинамическим взаимодействием высокоинерционной частицы с ударным слоем // *Известия вузов. Авиационная техника*. — 2020. — № 4. — С. 108–115.
- Sposobin A. V., Reviznikov D. L., Ivanov I. E., Kryukov I. A.* Pressure and heat flux oscillations induced by gas-dynamic interaction between a high inertia particle and a shock layer // *Russian Aeronautics*. — 2020. — Vol. 63. — P. 677–685. (Original Russian paper: *Sposobin A. V., Reviznikov D. L., Ivanov I. E., Kryukov I. A.* Kolebaniya davleniya i teplovogo potoka, inducirovannye gazodinamicheskim vzaimodejstviem vysokoinercionnoj chasticy s udarnym sloem // *Izvestiya vuzov. Aviacionnaya tehnika*. — 2020. — No. 4. — P. 108–115.)
- Толстых А. И., Ширококов Д. А.* Бессеточный метод на основе радиальных базисных функций // *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* — 2005. — Т. 45, № 8. — С. 1498–1505.
- Tolstykh A. I., Shirobokov D. A.* Meshless method based on radial basis functions // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2005. — Vol. 45, No. 8. — P. 1447–1454. (Original Russian paper: *Tolstykh A. I., Shirobokov D. A.* Bessetchnyj metod na osnove radialnykh bazisnykh funkcij // *Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiz.* — 2005. — Vol. 45, No. 8. — P. 1498–1505.)
- Тукмаков Д. А.* Численное исследование интенсивных ударных волн в запыленных средах с однородной и двухкомпонентной несущей фазой // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2020. — Т. 12, № 1. — С. 141–154.
- Tukmakov D. A.* Chislennoe issledovanie intensivnykh udarnykh voln v zapylennykh sredah s odnorodnoj i dvuhkomponentnoj nesushchej fazoj [Numerical study of intense shock waves in dusty media with a homogeneous and two-component carrier phase] // *Computer Research and Modeling*. — 2020. — Vol. 12, No. 1. — P. 141–154 (in Russian).
- Billig F. S.* Shock-wave shapes around spherical and cylindrical nosed bodies // *Journal of Spacecraft and Rockets*. — 1967. — Vol. 4, No. 6. — P. 822–823.
- Ershova T. V., Mikhatulin D. S., Reviznikov D. L., Sposobin A. V., Vinnikov V. V.* Numerical simulation of heat and mass transfer between heterogeneous flow and an obstacle // *Computational Thermal Sciences*. — 2011. — Vol. 3, No. 1. — P. 15–30.
- Fay J. A., Riddell F. R.* Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air // *Journal of the Aeronautical Sciences*. — 1958. — Vol. 25, No. 2. — P. 73–85.
- Fleener W. A., Watson R. H.* convective heating in dust-laden hypersonic flows // *AIAA Paper*. — 1973. — No. 73. — P. 761.
- Hashemi M. Y., Jahangirian A.* Implicit fully mesh-less method for compressible viscous flow calculations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2011. — No. 235. — P. 4687–4700.

- Holden M. S., Gustafson G. Q., Duryea G. R., Hudack L. T.* An experimental study of particle-induced convective heating augmentation // AIAA Paper. — 1976. — No. 76. — P. 320.
- Oesterle B., Volkov A. N., Tsirkunov Yu. M.* Numerical investigation of two-phase flow structure and heat transfer in a supersonic dusty gas flow over a blunt body // Progress in Flight Physics. — 2013. — Vol. 5. — P. 441–456.
- Sattarzadeh S., Jahangirian A.* 3D implicit mesh-less method for compressible flow calculations // Scientia Iranica. — 2012. — Vol. 19, No. 3. — P. 503–512.
- Sattarzadeh S., Jahangirian A., Hashemi M. Y.* Unsteady compressible flow calculations with least-square mesh-less method // Journal of Applied Fluid Mechanics. — 2016. — Vol. 9, No. 1. — P. 233–241.
- Simon S., Mandal J. C.* A simple cure for numerical shock instability in HLLC Riemann solver // Journal of Computational Physics. — 2019. — No. 378. — P. 477–496.
- Sposobin A., Reviznikov D.* Impact of high inertia particles on the shock layer and heat transfer in a heterogeneous supersonic flow around a blunt body // Fluids. — 2021. — Vol. 6, No. 11. — P. 406. — [Electronic resource]: <https://doi.org/10.3390/fluids6110406> (accessed: 10.05.2022).
- Toro E. F., Spruce M., Speares W.* Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // Shock Waves. — 1994. — No. 4. — P. 25–34.
- Wang Y., Cai X., Zhang M., Ma X., Ren D., Tan J.* The study of the three-dimensional meshless solver based on AUSM+–up and MUSCL scheme // Proceedings of the 2015 International Conference on Electromechanical Control Technology and Transportation. — [Electronic resource]: <https://dx.doi.org/10.2991/icectt-15.2015.52> (accessed: 10.05.2022).