

УДК: 519.635

## О неустойчивости Толмина – Шлихтинга в численных решениях уравнений Навье – Стокса, полученных на основе мультиоператорной схемы 16-го порядка

А. И. Толстых<sup>а</sup>, Д. А. Ширококов<sup>б</sup>

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,  
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 40

E-mail: <sup>а</sup> tol@ccas.ru, <sup>б</sup> shibo2506@yandex.ru

*Получено 13.12.2021, после доработки – 13.02.2022.  
Принято к публикации 01.03.2022.*

В работе приводятся результаты применения схемы очень высокой точности и разрешающей способности для получения численных решений уравнений Навье – Стокса сжимаемого газа, описывающих возникновение и развитие неустойчивости двумерного ламинарного пограничного слоя на плоской пластине. Особенностью проведенных исследований является отсутствие обычно используемых искусственных возбудителей неустойчивости при реализации прямого численного моделирования. Используемая мультиоператорная схема позволила наблюдать тонкие эффекты рождения неустойчивых мод и сложный характер их развития, вызванные предположительно ее малыми погрешностями аппроксимации. Приводится краткое описание конструкции схемы и ее основных свойств. Описываются постановка задачи и способ получения начальных данных, позволяющий достаточно быстро наблюдать установившийся нестационарный режим. Приводится методика, позволяющая обнаруживать колебания скорости с амплитудами, на много порядков меньшими ее средних значений. Представлена зависящая от времени картина возникновения пакетов волн Толмина – Шлихтинга с меняющейся интенсивностью в окрестности передней кромки пластины и их распространения вниз по потоку. Представленные амплитудные спектры с расширяющимися пиковыми значениями в нижних по течению областях указывают на возбуждение новых неустойчивых мод, отличных от возникающих в окрестности передней кромки. Анализ эволюции волн неустойчивости во времени и пространстве показал согласие с основными выводами линейной теории. Полученные численные решения, по-видимому, впервые описывают полный сценарий возможного развития неустойчивости Толмина – Шлихтинга, которая часто играет существенную роль на начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода. Они открывают возможности полномасштабного численного моделирования этого крайне важного для практики процесса при аналогичном изучении пространственного пограничного слоя.

Ключевые слова: мультиоператорные схемы, уравнения Навье – Стокса сжимаемого газа, численное моделирование, неустойчивость Толмина – Шлихтинга, распространение пакетов волн неустойчивости

UDC: 519.635

## On Tollmien – Schlichting instability in numerical solutions of the Navier – Stokes equations obtained with $16^{th}$ -order multioperators-based scheme

A. I. Tolstykh<sup>a</sup>, D. A. Shirobokov<sup>b</sup>

Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center «Computer Science and Control» of RAS,  
40 Vavilov st., Moscow, 119333, Russia

E-mail: <sup>a</sup> tol@ccas.ru, <sup>b</sup> shibo2506@yandex.ru

*Received 13.12.2021, after completion – 13.02.2022.*

*Accepted for publication 01.03.2022.*

The paper presents the results of applying a scheme of very high accuracy and resolution to obtain numerical solutions of the Navier – Stokes equations of a compressible gas describing the occurrence and development of instability of a two-dimensional laminar boundary layer on a flat plate. The peculiarity of the conducted studies is the absence of commonly used artificial excitors of instability in the implementation of direct numerical modeling. The multioperator scheme used made it possible to observe the subtle effects of the birth of unstable modes and the complex nature of their development caused presumably by its small approximation errors. A brief description of the scheme design and its main properties is given. The formulation of the problem and the method of obtaining initial data are described, which makes it possible to observe the established non-stationary regime fairly quickly. A technique is given that allows detecting flow fluctuations with amplitudes many orders of magnitude smaller than its average values. A time-dependent picture of the appearance of packets of Tollmien – Schlichting waves with varying intensity in the vicinity of the leading edge of the plate and their downstream propagation is presented. The presented amplitude spectra with expanding peak values in the downstream regions indicate the excitation of new unstable modes other than those occurring in the vicinity of the leading edge. The analysis of the evolution of instability waves in time and space showed agreement with the main conclusions of the linear theory. The numerical solutions obtained seem to describe for the first time the complete scenario of the possible development of Tollmien – Schlichting instability, which often plays an essential role at the initial stage of the laminar-turbulent transition. They open up the possibilities of full-scale numerical modeling of this process, which is extremely important for practice, with a similar study of the spatial boundary layer.

**Keywords:** multioperator schemes, Navier – Stokes equations of compressible gas, numerical modeling, Tollmien – Schlichting instability, propagation of instability wave packets

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 953–967 (Russian).

## 1. Введение

Проблема ламинарно-турбулентного перехода является предметом многочисленных экспериментальных и численных исследований в течение многих лет. Это связано с ее большой прикладной значимостью, поскольку состояние пограничного слоя (ламинарное или турбулентное) существенно влияет на трение и теплопередачу при обтекании тел. Понимание происходящих при этом процессов имеет также большое теоретическое значение, так как они связаны с общей проблемой турбулентности, объявленной проблемой века. Огромную роль в изучении потери устойчивости ламинарного пограничного слоя, приводящей к его переходу в турбулентное состояние, играет линейная теория [Schlichting, 1968]. Представленный в ней модальный анализ указывает на экспоненциальный рост амплитуд распространяющихся вниз по потоку волн (волн Толмина–Шлихтинга), если их безразмерные волновые числа (или частоты) как функции числа Рейнольдса, вычисленного по локальной толщине пограничного слоя, находятся в области неустойчивости, ограниченной так называемой нейтральной кривой.

Выводы этой теории, основанной на использовании уравнений Навье–Стокса с некоторыми предположениями, нашли экспериментальное подтверждение. Хотя линейная теория дает математическое объяснение потери устойчивости ламинарного пограничного слоя, она не описывает конкретные пути ее возникновения и развития. Более того, переход в турбулентное состояние является существенно пространственным явлением.

Исследованию ламинарно-турбулентного перехода было посвящено огромное количество экспериментальных теоретических исследований. Основной подход при этом состоял в изучении отклика течения в пограничном слое на различные искусственно вносимые возмущения.

Начало широкомасштабных экспериментальных исследований ламинарно-турбулентного перехода было положено в работе [Schubauer, Scramstad, 1959], в которой рассматривались как «естественное» возбуждение волн неустойчивости турбулентностью набегающего потока, так и возбуждение с помощью вибрирующей полоски. Последний прием широко использовался и в последующих исследованиях (см. [Klebanoff, Tidstrom, Sargent, 1962; Качанов, Козлов, Левченко, 1977]; использовались также и другие варианты искусственных возбудителей. Результаты экспериментов способствовали общему пониманию явления и выявили возможные сценарии турбулизации пограничного слоя. В частности, была подтверждена роль волн Толмина–Шлихтинга на начальной стадии развития неустойчивости.

Ламинарно-турбулентный переход в течение последних десятилетий интенсивно исследовался также путем прямого численного моделирования на основе уравнений Навье–Стокса. При этом, следуя логике экспериментов, применялось искусственное возбуждение неустойчивости (например, имитацией вдува-отсоса через твердую поверхность). Не перечисляя большое количество работ, посвященных этой теме, отметим статьи [Rist, Fasel, 1995; Borodulin et al., 2002; Yeو et al., 2010] и содержащиеся в них ссылки. Введение искусственных возмущений осуществлялось также при численном моделировании течений в пограничных слоях при сверхзвуковом обтекании [Liu, Lu, 2012; Muppidi, Mahesh, 2010]. Гиперзвуковые режимы были рассмотрены в [Егоров, Новиков, 2016; Егоров, Новиков, Федоров, 2017].

Характерным подходом к численному моделированию неустойчивости во многих исследованиях является использование базового стационарного решения уравнений Навье–Стокса и уравнений, описывающих возмущение этого решения в результате введения тех или иных возбудителей неустойчивости (например, путем задания ненулевых значений нормального компонента скорости на поверхности). В качестве базового решения использовалось как классическое решение Блазиуса, так и вычисленное стационарное решение задачи об обтекании пластины с острой передней кромкой.

В последнем случае можно задаться вопросом, не обусловлены ли получаемые стационарные решения без признаков неустойчивости свойствами используемых схем, числом узлов сетки,

а также критерием выхода на стационарный режим. В этой связи можно рассуждать следующим образом.

Обычным теоретическим подходом к исследованию устойчивости является введение малых возмущений в точные решения исходных уравнений. С другой стороны, отличия численного решения устойчивой схемы от точного в узлах сетки являются малыми возмущениями последнего. Можно также говорить о том, что действие разностного оператора на точное решение, рассматриваемое в узлах сетки, есть действие аппроксимируемого оператора на это решение плюс погрешность аппроксимации. При этом погрешность аппроксимации можно рассматривать как некоторый источник, добавляемый к исходным уравнениям и возмущающий последние. В случае устойчивости точного решения нормы этих сеточных функций характеризуют точность численных решений. В случае неустойчивого точного решения малые отклонения от этого решения в зависимости от их спектрального состава могут образовывать начальные данные для развития неустойчивых мод. Возможность численных решений различать эти моды и описывать их развитие в процессе интегрирования по времени (возможно, длительного) зависит от спектральных свойств используемых схем и подробности сеток. Таким образом, можно предположить, что возникновение и развитие неустойчивости можно наблюдать в численных решениях исходных уравнений без ее искусственного возбуждения.

При использовании мультиоператорных схем высокого порядка для прямого численного моделирования неустойчивых течений в дозвуковых струях [Липавский, Толстых, 2013], недорасширенных сверхзвуковых струях [Tolstykh, Shirobokov, 2013], а также в случае изолированных вихрей [Tolstykh, Lipavskii, 2018, 2021] было замечено, что кажущиеся неменяющимися в течение достаточно большого интервала времени численные решения уравнений Навье–Стокса или Эйлера внезапно переходили в квазипериодические нестационарные режимы.

Идея численного моделирования неустойчивых течений на основе уравнений Навье–Стокса без введения каких-либо механизмов возбуждения неустойчивости была использована в [Tolstykh, Shirobokov, 2013]. Рассматривалось обтекание плоской пластины, внезапно введенной в дозвуковой поток. Предварительные расчеты показали, что на достаточно грубых сетках с точностью порядка  $10^{-8}$  получались только стационарные решения. При переходе к более подробной сетке на начальном этапе счета происходило формирование решения, близкого к решению Блазиуса. Однако при дальнейшем счете на фоне этого решения стали наблюдаться распространяющиеся вниз по потоку волновые пакеты с возрастающими амплитудами своих наполнений. Вычисленные спектры этих возмущений показали, что их волновые числа хорошо согласуются с диаграммой неустойчивости линейной теории, и волны, образующие пакеты, можно рассматривать как волны Толмина–Шлихтинга. Оценки показали, что существенную роль в кажущемся самовозбуждении неустойчивости играет часть погрешности аппроксимации используемой схемы 16-го порядка [Tolstykh, 2017], связанная с контролируемой диссипацией 15-го порядка малости при стремлении шага сетки к нулю. Эта часть создавала фон малых возмущений с широкополосным спектром, отдаленно напоминающий фон турбулентных пульсаций в естественных условиях. В полученных решениях наблюдались достаточно полная картина возникновения волн неустойчивости из очень малых пульсаций в процессе счета, организация этих волн в виде пакетов различных форм и различной интенсивности, а также их рост в процессе распространения вниз по потоку. Особенностью развития течения в [Tolstykh, Shirobokov, 2020], связанной с постановкой задачи, явилась значительная часть времени релаксации течения от невозмущенного потока с условиями прилипания к течению с пограничным слоем. Чтобы уменьшить влияние процесса релаксации на общий сценарий возникновения и развития неустойчивости, в данном исследовании использовалась другая формулировка, при которой начальные данные уже учитывают существование пограничного слоя.

## 2. Численный метод, постановка задачи

### 2.1. Мультиоператорные аппроксимации

Расчеты в данном исследовании осуществлялись с использованием мультиоператорной схемы 16-го порядка из [Tolstykh, 2017], применявшейся в [Tolstykh, Shirobokov, 2020]. Остановимся коротко на этой высокоточной мультиоператорной технологии. В соответствии с общей теорией мультиоператорных аппроксимаций [Tolstykh, 2015] производные в гиперболической части исходных уравнений аппроксимировались с помощью мультиоператоров. В случае сетки с шагом  $h$  операторы для первых производных, действующие на сеточные функции, имели вид

$$L_M(c_1, c_2, \dots, c_M) = \sum_{i=1}^M \gamma_i l(c_i), \quad \sum_{i=1}^M \gamma_i = 1, \quad (1)$$

где базисные операторы  $l(c_i)$  получались следующим образом. С использованием левых и правых двухточечных операторов  $\Delta_-$  и  $\Delta_+$  вводились «левые» и «правые» операторы вида  $R_l = I + c\Delta_-$  и  $R_r = I - c\Delta_+$ , где  $I$  – единичный оператор. Соответствующая пара компактных аппроксимаций первого порядка производных записывалась в виде

$$L_l = \frac{1}{h} R_l^{-1} \Delta_-, \quad L_r = \frac{1}{h} R_r^{-1} \Delta_+. \quad (2)$$

Существование обратимых операторов в (2) гарантировалось неравенством  $c > -\frac{1}{2} + \delta$ ,  $\delta > 0$ . Однопараметрическое семейство, используемое в (1) для построения базисных операторов, определялось как полусумма  $l_0(c) = \frac{L_l(c) + L_r(c)}{2}$ . Можно показать, что действие этой полусуммы на сеточную функцию аппроксимирует производную соответствующей гладкой функции со вторым порядком.

Коэффициенты  $\gamma_i$  при заданных значениях  $c_i$  параметра  $c$  определялись из линейной системы, получаемой из условий обращения в ноль  $M-1$  членов разложения в ряд Тейлора погрешности аппроксимации для оператора  $L_M$ . В результате аппроксимация, ввиду отсутствия нечетных степеней в разложении, принимала вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} = L_M(c_1, c_2, \dots, c_M) f + O(h^{2M}). \quad (3)$$

Важным свойством аппроксимации (3) является возможность такого выбора значений параметров, при котором высокая точность имеет асимптотически очень высокий порядок при больших значениях  $M$  и, кроме того, реализуется в случае малых характерных масштабов изменения  $f$ . В случае рассматриваемой схемы 16-го порядка ( $M = 8$ ) для упрощения этой оптимизации значения параметров считались равномерно распределенными между максимальным и минимальным значениями  $c_{\min}$ ,  $c_{\max}$ , а сама оптимизация осуществлялась путем минимизации отличия фурье-образов мультиоператора и дифференциального оператора.

Мультиоператор  $L_M$  является кососимметричным оператором в гильбертовом пространстве сеточных функций. Его использование в случае распространения волны, описываемом уравнением переноса с постоянным коэффициентом, не приводит к ее диссипации (то есть к уменьшению ее амплитуды). Поскольку в схемах повышенной точности для уравнений газовой динамики для подавления обычно возникающих паразитических осцилляций обычно требуется использование того или иного диссипативного механизма, к аппроксимациям первых производных в данной схеме был добавлен член с самосопряженным положительным оператором. Этот оператор имеет вид

$$D_M(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_M) = \sum_{i=1}^M \gamma_i d(\bar{c}_i), \quad \sum_{i=1}^M \gamma_i = 1, \quad (4)$$

где  $d(c) = L_l(c) - L_r(c)$ , а  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_M$  — другой набор параметров, а коэффициенты определяются из линейной системы, получаемой из условий обращения в ноль  $M - 1$  членов разложения в ряд Тейлора для действия мультиоператора на гладкую функцию, спроектированную на сетку. Это дает оценку  $O(h^{2M-1})$  малости этого действия; в случае схемы 16-го порядка ( $M = 8$ ) она переходит в  $O(h^{15})$ . Определяя этот набор как равномерное распределение между максимальным и минимальным значениями  $\bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max}$ , получаем мультиоператор, зависящий от двух параметров. Допустимой считается пара этих значений, для которой Фурье-образ мультиоператора есть положительная функция аргумента  $kh$ , где  $k$  — переменная преобразования Фурье. При выполнении этого условия мультиоператор является положительным, а параметры  $\bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max}$  являются свободными параметрами, выбор которых используется для управления его спектральными свойствами.

Конструкцию схемы поясним на примере модельного уравнения  $u_t + f(u)_x = 0$ . Опуская индексы сеточных функций, в полудискретной форме ее можно записать в виде

$$u_t + L_M f(u) + CD_M u = 0, \quad C = \text{const} \geq 0. \quad (5)$$

Используя те или иные процедуры интегрирования по времени  $t$ , можно строить явные или неявные схемы в соответствии со спецификой решаемых задач.

Схема (5) легко обобщается на случай  $n$  пространственных координат и векторных функций  $\vec{u}$  и  $\vec{f}_m$  (например, на случай уравнений Эйлера сжимаемого газа). Записав исходную систему в виде

$$\vec{u}_t + \sum_{m=1}^n \frac{\partial \vec{f}_m(\vec{u})}{\partial x_m} = 0, \quad (6)$$

достаточно для аппроксимации производных использовать мультиоператоры для каждой пространственной координаты. В частности, они могут иметь один и тот же порядок и зависеть от одной и той же пары параметров. Полудискретная схема приобретает при этом вид

$$\vec{u}_t + \sum_{m=1}^n (L_M^{(m)} \vec{f}_m(\vec{u}) + CD_M^{(m)} \vec{u}) = 0, \quad (7)$$

где верхние индексы в скобках у мультиоператоров отмечают координату, для которой они построены. Заметим, что второе слагаемое в скобках является частью погрешности аппроксимации схемы. Вместо общей константы  $C$  в нем можно было бы использовать свои константы (быть может, нулевые) для каждого уравнения. В данных расчетах эта опция не использовалась.

В случае уравнений Навье–Стокса для членов с коэффициентами вязкости и теплопроводности в правой части (6) нет необходимости использовать аппроксимации высокого порядка в случае больших чисел Рейнольдса  $Re$ , поскольку их погрешности при записи уравнений в безразмерной форме содержат малые коэффициенты  $Re^{-1}$ . Численные эксперименты показали, что в этом случае достаточно использовать обычные или компактные аппроксимации четвертого порядка.

Важным свойством описанной выше схемы является ее высокая параллельная эффективность. Оказалось, что в случае пространственной нестационарной задачи для уравнений Навье–Стокса она оказалась равной приблизительно 80 % от идеальной.

## 2.2. Формулировка задачи

Как и в случае расчетов [Tolstykh, Shirobokov, 2020], рассматривалось течение вязкого сжимаемого газа, описываемого уравнениями Навье–Стокса, в прямоугольной области  $0 \leq x \leq x_{\max}$ ,  $0 \leq y \leq y_{\max}$ . При приведении уравнений к безразмерному виду в качестве характерной длины использовалась длина  $L$ , для которой число Рейнольдса, вычисленное по параметрам невозмущенного потока, равнялось  $5 \cdot 10^5$ . При этом полагалось, что  $x_{\max} = 20$ ,  $y_{\max} = 0,2$ . В качестве

характерных значений скорости использовалась скорость звука в невозмущенном потоке  $c_\infty$ , так что характерное значение времени  $t$  оказывалось равным  $\frac{L}{c_\infty}$ . На левой границе задавались параметры невозмущенного потока с числом Маха, равным 0,5, на верхней границе использовались характеристические условия, предполагающие распространение возмущений только изнутри области. Пластиной считалась нижняя граница области при  $x \geq 0,25$  с условиями прилипания и заданной температурой, равной температуре торможения. На правой границе значения искомым функций определялись экстраполяцией решений внутри области. Расчетная область покрывалась сеткой с числом узлов  $3000 \times 100$ . Шаг сетки  $h$  вдоль координаты  $x$  был постоянным и равным 0,005 до значения  $x = 14,5$ , после которого он плавно увеличивался, способствуя таким образом гашению волн, отраженных от задней границы области. Вдоль нормальной к поверхности координаты  $y$  осуществлялось сгущение сетки, при котором минимальный шаг около нижней границы был равен 0,0001.

*Начальные условия.* В отличие от [Tolstykh, Shirobokov, 2020], где пластина мгновенно вводилась в невозмущенный поток, в данном исследовании ставилась задача исключения стадии релаксации течения к течению Блазиуса. Эта стадия занимала заметную часть времени счета и предположительно могла оказывать влияние на сценарий возникновения и развития неустойчивости. Использование в качестве начальных данных поля течения с сформировавшимся пограничным слоем позволяет получить более быструю релаксацию к «установившемуся» режиму развития неустойчивости. Это дает возможность оценить влияние начальной стадии в [Tolstykh, Shirobokov, 2020] и наблюдать это развитие на увеличенном интервале времени при том же общем времени счета.

Для пояснения способа получения начальных данных возвратимся к схеме (5). Единственной контролируемой ее частью является слагаемое с оператором диссипации  $D_M(\bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max})$ . На рис. 1 показаны зависимости от безразмерного волнового числа  $kh$  фурье-образов этого мультиоператора  $D$  для двух пар его параметров.

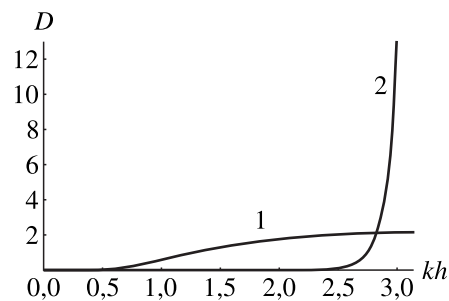


Рис. 1. Фурье-образы оператора диссипации как функции безразмерного волнового числа: 1 — оператор из [Tolstykh, Shirobokov, 2020], 2 — оператор в расчетах для получения начальных данных

Действие оператора  $D_M(\bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max})$  на сеточную функцию, являющуюся проекцией на сетку функции непрерывного аргумента  $u(x)$  из пространства Фурье, определяется в этом пространстве произведением  $D(kh)\hat{u}(k)$ , где  $\hat{u}(k)$  — преобразование Фурье  $u(x)$ . Обратное преобразование Фурье этого произведения, рассматриваемое в узлах сетки, является добавкой к точному решению исходного уравнения, вносящей вклад в его общую погрешность. В случае устойчивости этого решения ее спектральный состав не представляет интереса. В случае неустойчивого решения она может создавать в каждый момент времени фон малых возмущений, с широкополосным спектром, из которого могут «выбираться» гармоники, попадающие в область неустойчивости. Отметим, что такого типа рассуждение приводится в [Schubauer, Scramstad, 1948] в связи с анализом экспериментов, относящихся к возбуждению волн Толмина–Шлихтинга фоном турбулентности набегающего потока. Очевидно, что волновые числа и амплитуды создаваемого фона зависят от спектра точного решения  $\hat{u}(k)$  и шага сетки в функции  $D(kh)$ . В данном исследова-

нии, как и в [Tolstykh, Shirobokov, 2020], фон создавался (по крайней мере, его значительная часть) мультиоператором  $D_M(\bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max})$ , для которого эта функция изображается кривой 1 на рис. 1. Чтобы исключить его влияние, были проведены расчеты для мультиоператора с другими значениями параметров; функция  $D(kh)$  для него изображена кривой 2 на рис. 1. В этом случае на большом интервале своего аргумента, как показывает более подробный анализ, эта функция принимает значения, на много порядков меньшие, чем в случае кривой 1. Соответственно, можно ожидать, что и интенсивность фона, содержащего потенциально неустойчивые гармоники, окажется значительно меньшей.

Исследование полученных решений показало, что они, как и в [Tolstykh, Shirobokov, 2020], описывают возникновение и распространение волн Толмина–Шлихтинга. Однако амплитуды этих волн оказались настолько малыми, что эти решения можно считать стационарными по крайней мере с точностью до  $10^{-5}$ . При этом поле продольной скорости в сформировавшемся пограничном слое оказалось очень близким к полю, описываемому решением Блазиуса для несжимаемой жидкости. Полученные решения подтвердили предположение о роли фона как аналога фоновой турбулентности в натуральных экспериментах. Они были использованы как начальные условия для вычислений с мультиоператором  $D_M(\bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max})$  из [Tolstykh, Shirobokov, 2020].

### 3. Результаты расчетов

#### 3.1. Представление расчетных данных

Во многих экспериментальных исследованиях принято характеризовать неустойчивость пограничного слоя возмущениями скорости около поверхности тела (см., например, эксперименты в [Schubauer, Scramstad, 1948]). Соответственно, основной интерес в данном исследовании будет представлять в фиксированные моменты  $t$  продольная скорость  $U(t, x) = u(t, x, y_*)$ , где  $y_*$  — координата близкого к поверхности пластины узла сетки. Результаты вычислений, представленных в [Tolstykh, Shirobokov, 2020], показали, что амплитуды пульсаций этой скорости могут меняться в широких пределах — от величин порядка невозмущенной скорости  $u_\infty$  до величин порядка  $10^{-10}u_\infty$ . Непосредственное рассмотрение полученных значений функции  $U(t, x)$  позволяет проследить развитие волновых пакетов с достаточно большими амплитудами, однако оно оказывается неэффективным при описании ее малых и очень малых возмущений. В соответствии с [Tolstykh, Shirobokov, 2020] для выявления таких возмущений будет использоваться следующий прием.

На отдельных интервалах  $x \in [x_i, x_j]$  для выбранных моментов времени строятся полиномы наилучшего среднеквадратичного приближения к функции  $U$  с базисными функциями, являющимися полиномами Чебышёва для этих интервалов. Затем рассматриваются отклонения  $\delta u(x)$  полученных локальных аппроксимаций от  $U$ . Оказалось, что функции  $\delta u(x)$  позволяют обнаруживать хорошо организованные волновые структуры с очень малыми амплитудами и вычислять их спектры. При этом следует иметь в виду, что амплитуды колебаний  $\delta u(x)$  есть амплитуды в обычно принятом смысле только при  $U = \text{const}$ . В общем случае они являются некоторой характеристикой колебательного процесса.

#### 3.2. Формирование волн неустойчивости в окрестности передней кромки

Использование описанной выше методики позволило обнаружить тонкие детали полученных решений. В окрестности передней кромки пристеночная продольная скорость в решении Блазиуса и в близком к нему численном решении быстро убывает (как  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ). На много порядков меньшие ее колебания становятся заметными только в виде отклонений от ее усредненных распределений вдоль оси  $x$ .



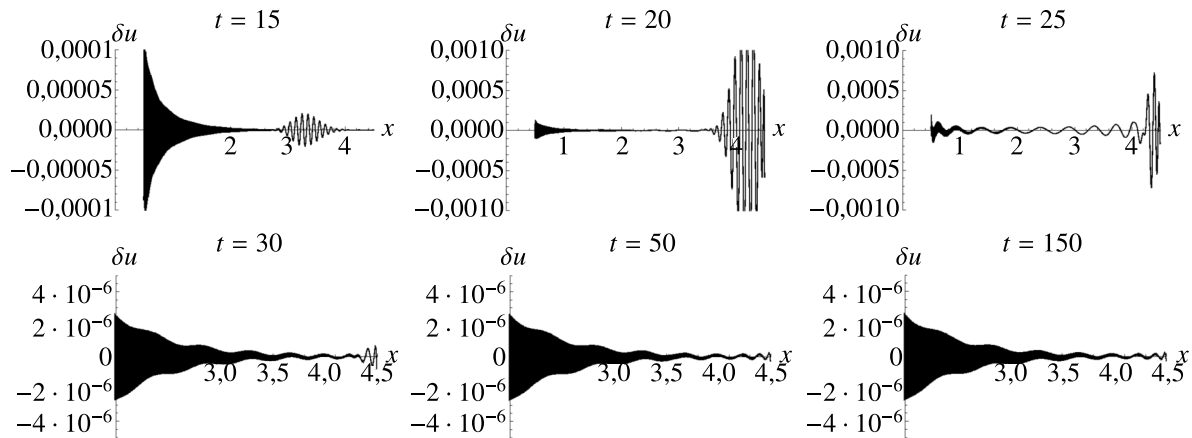


Рис. 2. Отклонения от осредненных распределений  $\delta u(x)$  на интервале  $x \in [1; 4,5]$  в последовательные моменты времени

На рис. 2 показано, как возникает и развивается во времени и пространстве пакет неустойчивых волн, определяемых функцией  $\delta u(x)$ .

Как видно на рисунке, при малых значениях  $x$  преобладают пилообразные колебания, наложенные на длинноволновые колебания синусоидального типа. Первые являются проявлением немонотонности схемы как схемы высокого порядка и заметно убывают с возрастанием  $x$ . При времени  $t = 15$  внизу по течению заметен четко сформировавшийся волновой пакет с максимальной амплитудой своего наполнения порядка  $10^{-5}$ . К моменту времени  $t = 20$  его задний фронт переместился приблизительно на единицу, а максимальная амплитуда увеличилась приблизительно в тридцать раз. Несущие длинноволновые колебания, неразличимые при  $t = 15, 20$ , становятся заметными на последующих временах. Не изменяясь визуально со временем приблизительно до  $x = 4$ , они уменьшают свои периоды вниз по течению. На рис. 3 приведены функции  $\delta u(x)$  при  $t = 30, 50, 100$  на соседнем интервале  $x \in [4; 6]$ , иллюстрирующие переход длинноволновых стационарных колебаний в волновые пакеты, не наблюдаемые на рис. 2. Графики этих функций для последующих моментов времени показывают, что эти пакеты, как и пакет при  $t = 15$  на рис. 2, распространяются вниз по течению, увеличивая амплитуды своих наполнений.

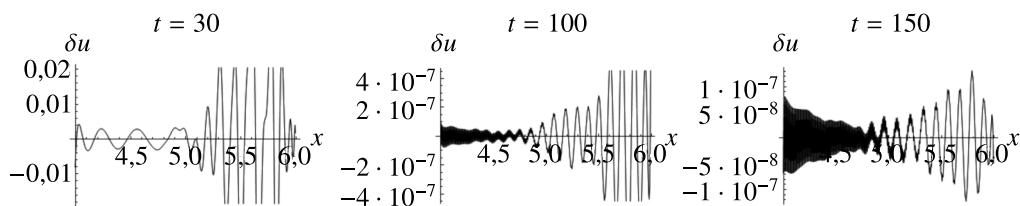


Рис. 3. Образование волновых пакетов из длинноволновых колебаний, показанных на рис. 2

Как следует из рис. 3, интенсивности колебаний в пакетах сильно меняются со временем. Более подробный анализ показывает, что, как и в случае расчетов в [Tolstykh, Shirobokov, 2020], формирование пакетов носит нерегулярный, «прерывистый», характер с меняющимися на порядок их интенсивностями.

На основании рис. 2 и рис. 3 можно сделать вывод о том, что существует некоторое условное расстояние от передней кромки  $x = x_*$ , при увеличении которого вместо стационарных колебаний наблюдаются волновые процессы, имеющие признаки конвективной неустойчивости. Сравнительно небольшое значение  $x_*$  на ранних временах возрастает со временем, устанавливаясь при  $t > 30$  в некоторой окрестности  $x = 5$ . Поскольку, как можно предположить, на

начальной стадии расчетов происходит некоторая адаптация начальных данных к наблюдаемому режиму течения на основной ее стадии, в дальнейшем основное внимание будет уделено решениям при  $t > 30$ .

Для сопоставления этого наблюдения с линейной теорией неустойчивости пограничного слоя [Schlichting, 1968] рассмотрим пространственные амплитудные спектры пакетов из рис. 3. Они приведены на рис. 4.

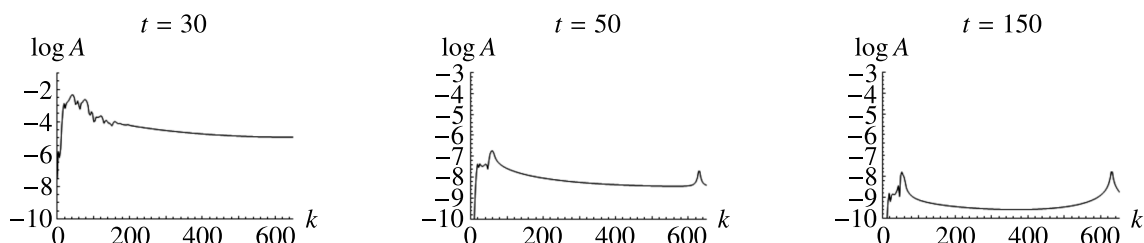


Рис. 4. Амплитудные спектры пакетов из рис. 3

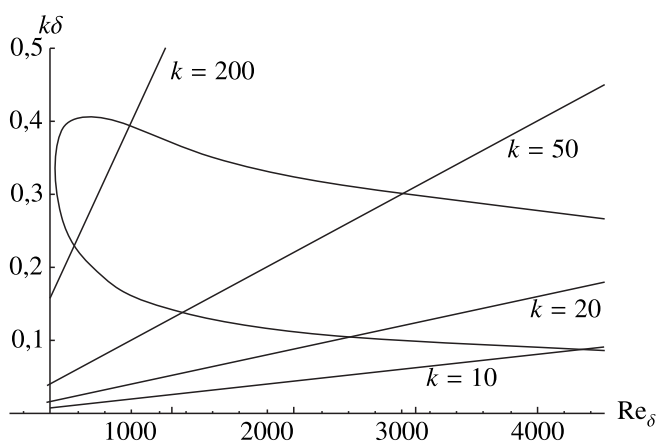


Рис. 5. Траектории гипотетических мод в диаграмме неустойчивости

На последних двух графиках на рис. 4 основные пики с на порядок различными амплитудами расположены в окрестности  $k \approx 50$ . Пики в правых частях этих спектров соответствуют пилообразным паразитическим колебаниям. Аналогичный пик на первом графике отсутствует, поскольку его амплитуда на много порядков меньше амплитуд основных пиков, расположенных в интервале  $k \in [40; 70]$ . Чтобы установить соответствие с диаграммой неустойчивости из [Schlichting, 1968], будем предполагать, что волновое число каждого пика является волновым числом индивидуальной моды. Будем считать, что ее положение в пространстве определяется координатой середины интервала, для которого вычислены спектры. Зная для этой координаты значение толщины вытеснения  $\delta(x)$ , можно вычислить соответствующее число Рейнольдса  $Re_\delta$  и безразмерное волновое число  $k\delta$ . Для приближенных оценок будем использовать  $\delta(x)$  из решения Блазиуса, к которому близко численное решение при  $t = 0$ . Считая, что  $k$  не меняется при распространении этой моды вниз по потоку, получим ее траекторию в виде прямой в координатах  $(Re_\delta, k\delta)$ . На рис. 5 приведена нейтральная кривая диаграммы неустойчивости с пересекающимися ее траекториями при нескольких характерных значениях  $k$ .

Для середины  $x = 5$  интервала число  $Re_\delta$  приблизительно равно 2500. При таком числе Рейнольдса моды с «пиковыми» волновыми числами из рис. 4 расположены либо выше нижней ветви нейтральной кривой (то есть в области неустойчивости), либо незначительно ниже ее. В последнем случае соответствующие траектории пересекут нижнюю ветвь при несколько большем числе Рейнольдса, то есть внизу по потоку.

Представленные грубые оценки позволяют считать возникшие волны неустойчивости волнами Толмина–Шлихтинга. Вместе с тем следует подчеркнуть, что в полученных решениях они наблюдаются не в виде индивидуальных мод из линейного анализа, а в виде волновых пакетов.

### 3.3. Волновые пакеты внизу по течению от передней кромки

Согласно полученным решениям, пакеты волн Толмина–Шлихтинга, образовавшиеся в окрестности передней кромки, перемещаются вниз по потоку, увеличивая амплитуды своих наполнений. Те из них, которые имеют максимальные начальные амплитуды, можно непосредственно наблюдать в виде графика пристеночной скорости  $U(x)$ . История дальнейшего перемещения и развития пакета, изображенного на рис. 2 при  $t = 15$ , показана на рис. 6.

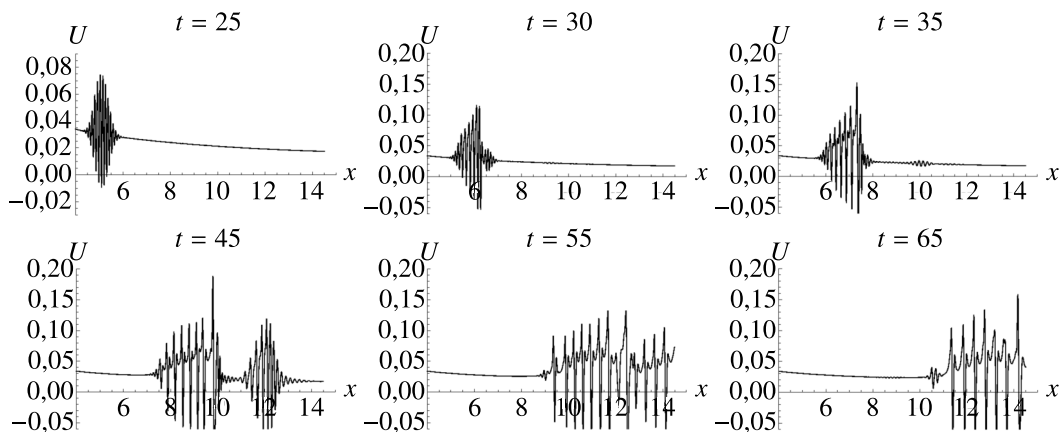


Рис. 6. Пакет из рис. 2,  $t = 15$ , в последовательные моменты времени

Из рисунка следует, что пакет, перемещаясь приблизительно с групповой скоростью около 0,15 (то есть 0,3 от скорости невозмущенного потока), меняет свою форму к моменту времени  $t = 35$ . Можно отметить также возникающие в его наполнении колебания с чередующимися большими и меньшими локальными максимумами амплитуд, а также появление других пакетов при  $t > 35$ . В контексте диаграммы неустойчивости можно предположить, что эти явления связаны с пересечением нижней ветви нейтральной кривой траекторий новых неустойчивых мод, возникающих из описанного выше фона погрешностей численных решений. Можно предположить также, что отсутствие заметного роста амплитуд доминирующего пакета при  $t > 55$  объясняется выходом из области неустойчивости траекторий мод при пересечении верхней ветви нейтральной кривой вследствие увеличения локальных значений числа  $Re_\delta$ .

В численных решениях за пределами области передней кромки при дальнейшем увеличении времени (то есть при  $t > 65$ ) наблюдается существенное уменьшение амплитуд колебаний  $U(x)$ , а также появление пакетов со значительно меньшими амплитудами. Чтобы отобразить многообразие форм колебаний пристеночной скорости на этом этапе развития неустойчивости, область за передней кромкой разбита на два интервала,  $x \in [4; 10]$  и  $x \in [9; 15]$ . На рис. 7 приведены картины волновых пакетов на этих интервалах с различающимися уровнями амплитуд. В верхней части рисунка показаны функции  $du(x)$  в последовательные моменты времени для первого интервала, а в нижней — функции  $U(x)$  в те же моменты времени для второго интервала.

Стадии развития пакетов, изображенных на рис. 6 и рис. 7, условно можно назвать активной и спокойной соответственно. Вторая из них отражает, с одной стороны, уменьшение интенсивности пульсаций в пакетах, рождающихся в окрестности передней кромки, а с другой стороны — разнообразие конфигураций наблюдаемых пакетов и их возможное взаимодействие.

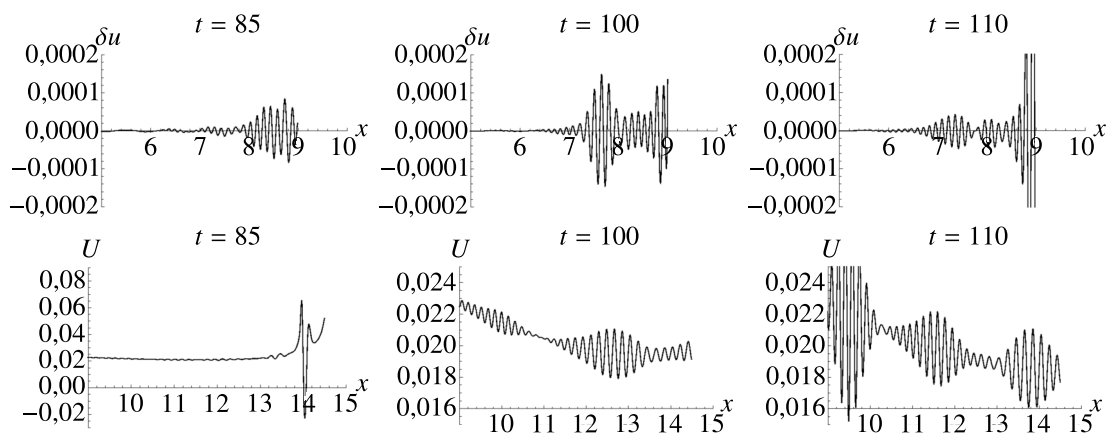


Рис. 7. Картины волновых пакетов при значениях времени, следующих за указанными на рис. 6

Следующий временной этап развития неустойчивости до завершения счета снова можно назвать активной стадией.

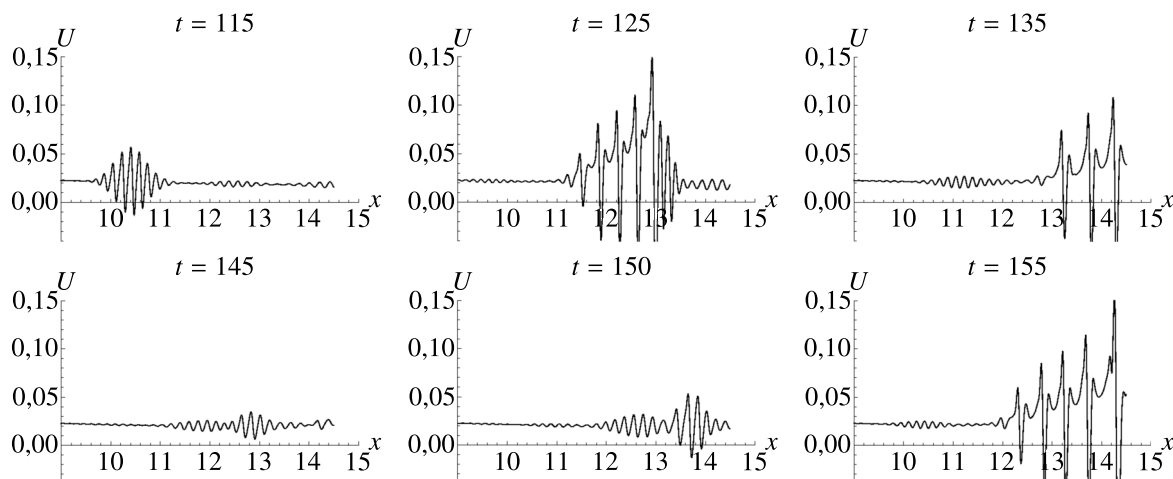


Рис. 8. Вторая активная стадия развития пакетов: моменты времени перед завершением счета

На этой стадии снова видны пакеты с непосредственной визуализацией в виде функций  $U(x)$ . Они снова имеют амплитуды того же порядка, что и на первой активной стадии. При этом можно отметить появление пакетов с чередующимися локальными максимальными значениями и формами огибающих, похожих на пакеты из рис. 6.

На рис. 9 приведены спектры функций  $U(x)$  в моменты времени из предыдущих рисунков.

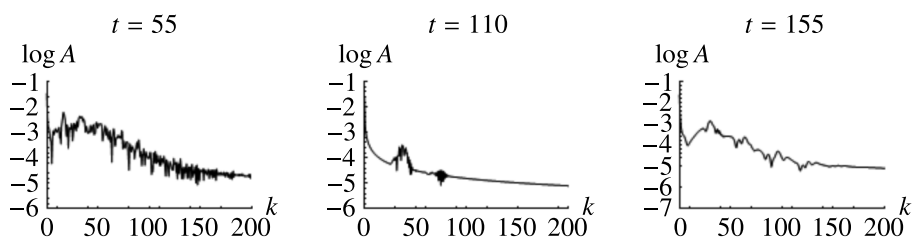


Рис. 9. Спектры волновых пакетов, изображенных на рис. 6 ( $t = 55$ ), рис. 7 ( $t = 110$ ) и рис. 8 ( $t = 155$ )

Как видно на рисунке, эти спектры, различаясь для различных пакетов, имеют общие характерные черты: области с выраженными пиками значительно шире, чем в случае спектров, изображенных на рис. 4. Это говорит о появлении новых неустойчивых мод, отсутствующих в спектрах колебаний в окрестности передней кромки. Заметны также концентрация доминирующих пиков в окрестности  $k = 40$  и уменьшение амплитуд с возрастанием волнового числа. Это соответствует выводам, которые можно сделать на основе линейной теории. Обращаясь к рис. 5, можно заметить, что траектории неустойчивых мод с большими волновыми числами пересекают область неустойчивости на небольшом участке чисел  $Re_\delta$ , где, согласно [Schlichting, 1968], инкременты возрастания сравнительно невелики. Соответственно, амплитуды таких мод не могут существенно увеличиться при этом пересечении. С другой стороны, моды с небольшими волновыми числами пересекают нижнюю ветвь при достаточно больших значениях  $Re_\delta$ , что не позволяет им сильно возрасти на рассматриваемой длине пластины. Наибольший рост среди указанных на рис. 5 траекторий можно ожидать при  $k = 50$ , поскольку они пересекают область максимальных инкрементов внутри области неустойчивости на достаточно больших интервалах  $Re_\delta$ . Кроме того, моды с волновыми числами такого порядка имеют сравнительно большие начальные амплитуды в окрестности передней кромки.

#### 4. Заключение

Представлена схема с мультиоператорными аппроксимациями для уравнений гиперболического типа, записанных в форме законов сохранения. Ее важными свойствами являются: очень высокий порядок аппроксимации производных (шестнадцатый), возможность управления свободными параметрами для повышения точности мелкоаспштабных деталей решений и высокая параллельная эффективность при реализации на суперкомпьютерах. Схема снабжена дополнительным диссипативным механизмом 15-го порядка малости при стремлении шагов сетки к нулю; его спектральные свойства управляются путем выбора свободных параметров. Схема была использована при численном моделировании на основе уравнений Навье – Стокса задачи о неустойчивости пограничного слоя пластины в дозвуковом потоке сжимаемого газа. Особенностью этого моделирования явилось отсутствие обычно вводимых искусственных возбудителей неустойчивости. При этом «естественными» возбудителем, аналогичным малыми турбулентным пульсациям набегающего потока, явился фон малых погрешностей решений с широкополосным спектром, создаваемый диссипативным механизмом. Полученные численные решения, по-видимому, впервые описывают достаточно полный сценарий возникновения пакетов волн неустойчивости Толмина – Шлихтинга в окрестности передней кромки, их распространения вниз по потоку, а также появления новых неустойчивых мод в нижней по течению области пластины. Специальная обработка решений позволила выявить их тонкие детали в виде колебаний скорости с амплитудами, на много порядков меньшими ее средних значений. Полученные результаты являются первым шагом к исследованию очень важного явления — перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при пространственном обтекании твердых поверхностей.

#### Список литературы (References)

- Бородулин В. И., Качанов Ю. С.* Формирование и развитие когерентных структур в переходном пограничном слое // Ж. прикл. мех. и техн. физ. — 1995. — Т. 36, № 4. — С. 60–97.  
*Borodulin V. I., Kachanov Yu. S.* Formirovaniye i razvitiye kogerentnykh struktur v perekhodnom pogranichnom sloye [Formation and development of coherent structures in a transitional boundary layer] // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — 1995. — Vol. 36, No. 4. — P. 60–97 (in Russian).
- Егоров И. В., Новиков А. В.* Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного обтекания плоской пластины при гиперзвуковых скоростях потока // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 1064–1081.

- Egorov I. V., Novikov A. V.* Direct numerical simulation of laminar turbulent flow over a flat plate at hypersonic flow speeds // *Comp. Math. Math. Phys.* — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1048–1064. (Original Russian paper: *Egorov I. V., Novikov A. V.* Pryamoye chislennoye modelirovaniye laminarno-turbulentnogo obtekaniya ploskoy plastiny pri giperzvukovykh skorostyakh potoka // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1064–1081.)
- Егоров И. В., Новиков А. В., Федоров А. В.* Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода при гиперзвуковых скоростях потока на супер-ЭВМ // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2017. — Т. 57, № 8. — С. 1347–1373.
- Egorov I. V., Novikov A. V., Fedorov A. V.* Direct numerical simulation of the laminar-turbulent transition at the hyperbolic flow speeds on a supercomputer // *Comp. Math. Math. Phys.* — 2017. — Vol. 57, No. 8. — P. 1335–1359. (Original Russian paper: *Egorov I. V., Novikov A. V., Fedorov A. V.* Pryamoye chislennoye modelirovaniye laminarno-turbulentnogo perekhoda pri giperzvukovykh skorostyakh potoka na super-EVM // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* — 2017. — Vol. 57, No. 8. — P. 1347–1373.)
- Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.* Нелинейное развитие волны в пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1977. — № 3. — С. 49–58.
- Kachanov Yu. S., Kozlov V. V., Levchenko V. Ya.* Nonlinear development of a wave in a boundary layer // *Fluid Dynamics.* — 1977. — Vol. 12. — P. 383–390. (Original Russian paper: *Kachanov Yu. S., Kozlov V. V., Levchenko V. Ya.* Nelineynoye razvitiye volny v pogranichnom sloye // *Izv. AN SSSR. MZhG.* — 1977. — No. 3. — P. 49–58.)
- Липавский М. В., Толстых А. И.* Об одной мультиоператорной схеме 10-го порядка и ее применение в прямом численном моделировании // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2013. — Т. 53, № 4. — С. 600.
- Lipavskii M. V., Tolstykh A. I.* Tenth order accurate multioperator scheme and its application in direct numerical simulation // *Comp. Math. Math. Phys.* — 2013. — Vol. 53, No. 4. — P. 455–468. (Original Russian paper: *Lipavskii M. V., Tolstykh A. I.* Ob odnoy mul'tioperatornoy skheme 10-go poryadka i yeye primeneniye v pryamom chislennom modelirovanii // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* — 2013. — Vol. 53, No. 4. — P. 600.)
- Толстых А. И.* Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2015.
- Tolstykh A. I.* Kompaktnye i multioperatornye approximations vysokoi tochnosti dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh [High accuracy compact and multioperator approximations for partial differential equations]. — Moscow: Nauka, 2015 (in Russian).
- Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969.
- Schlichting H.* Grenzschicht-Theorie. — Karlsruhe: verlag G. Brown, 1935. (Russ. ed.: *Shlihting H.* Teoria pogranichnogo sloya. — Moscow: Nauka, 1969.)
- Bhaumik S., Sengupta T.* Receptivity to harmonic excitation following nonimpulsive start for boundary-layer flows // *AIAA Journal.* — 2017. — Vol. 55. — P. 3233–3238.
- Borodulin V. I., Gaponenko V. R., Kachanov Y. S. et al.* Late-stage transitional boundary-layer structures. Direct numerical simulation and experiment // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* — 2002. — Vol. 15. — P. 317–337.
- Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M.* Numerical simulation of transition in wall-bounded shear flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 1962. — Vol. 23. — P. 495–537.
- Liu C., Lu P.* DNS study on physics of late boundary layer transition // *AIAA paper.* — 2012. — Vol. 2012-0083.
- Muppidi S., Mahesh K.* DNS of transition in supersonic boundary layers // *AIAA paper.* — 2010. — Vol. 2010-4440.
- Rist U., Fasel H.* Direct numerical simulation of controlled transition in a flat-plate boundary layer // *J. Fluid Mech.* — 1995. — Vol. 298. — P. 211–248.
- Schubauer G. B., Sramstad H. K.* Laminar-boundary-layer oscillations and transition on a flat plate // *NACA Rep.* — 1948. — Vol. 909.
- Tolstykh A. I.* 16th and 32nd multioperators based schemes for smooth and discontinuous solutions // *Commun. in Comput. Phys.* — 2017. — Vol. 45. — P. 33–45.
- Tolstykh A. I., Lipavskii M. V.* Instability and acoustic fields of the Rankine vortex as seen from long-term calculations with the tenth-order multioperators-based scheme // *Mathematics and Computers in Simulation.* — 2018. — Vol. 147. — P. 301–320.
- Tolstykh A. I., Lipavskii M. V.* General scenario and fine details of compressible Gaussian vortex unforced instability // *European Journal of Mechanics B. Fluids.* — 2021. — Vol. 87. — P. 161–170.

- 
- Tolstykh A. I., Shirobokov D. A.* Fast calculations of screech using highly accurate multioperators-based schemes // *Applied Acoustics*. — 2013. — Vol. 74. — P. 102–109.
- Tolstykh A. I., Shirobokov D. A.* Observing production and growth of Tollmien–Schlichting waves in subsonic flat plate boundary layer via excitors-free high fidelity numerical simulation // *Journal of Turbulence*. — 2020. — Vol. 21, No. 11. — P. 632–649.
- Yeo K. C., Zhao X., Wang Z. Y., Ng K. C.* DNS of wavepacket evolution in a Blasius boundary layer // *J. Fluid Mech.* — 2010. — Vol. 652. — P. 333–372.