

УДК: 519.633.6

Повышение порядка точности сеточно-характеристического метода для задач двумерной линейной упругости с помощью схем операторного расщепления

В. И. Голубев^{1,2,a}, А. В. Шевченко^{1,2,b}, И. Б. Петров^{1,c}

¹Московский физико-технический институт,
Россия, 141701, Московская область, Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

²Институт автоматизации проектирования РАН,
Россия, 123056, Москва, 2-я Брестская ул, д. 19/18

E-mail: ^a w.golubev@mail.ru, ^b alexshevchenko@phystech.edu, ^c petrov@mipt.ru

Получено 16.12.2021, после доработки — 08.02.2022.

Принято к публикации 01.03.2022.

Сеточно-характеристический метод успешно применяется для решения различных гиперболических систем уравнений в частных производных (например, уравнения переноса, акустики, линейной упругости). Он позволяет корректно строить алгоритмы на контактных границах и границах области интегрирования, в определенной степени учитывать физику задачи (распространение разрывов вдоль характеристических поверхностей), обладает важным для рассматриваемых задач свойством монотонности. В случае двумерных и трехмерных задач используется процедура расщепления по пространственным направлениям, позволяющая решить исходную систему путем последовательного решения нескольких одномерных систем. На настоящий момент во множестве работ используются схемы до третьего порядка точности при решении одномерных задач и простейшие схемы расщепления, которые в общем случае не позволяют получить порядок точности по времени выше второго. Значительное развитие получило направление операторного расщепления, доказана возможность повышения порядка сходимости многомерных схем. Его особенностью является необходимость выполнения шага в обратном направлении по времени, что порождает сложности, например, для параболических задач.

В настоящей работе схемы расщепления 3-го и 4-го порядка были применены непосредственно к решению двумерной гиперболической системы уравнений в частных производных линейной теории упругости. Это позволило повысить итоговый порядок сходимости расчетного алгоритма. В работе эмпирически оценена сходимость по нормам L_1 и L_∞ с использованием аналитических решений определяющей системы достаточной степени гладкости. Для получения объективных результатов рассмотрены случаи продольных и поперечных плоских волн, распространяющихся как вдоль диагонали расчетной ячейки, так и не вдоль нее. Проведенные численные эксперименты подтверждают повышение точности метода и демонстрируют теоретически ожидаемый порядок сходимости. При этом увеличивается в 3 и в 4 раза время моделирования (для схем 3-го и 4-го порядка соответственно), но не возрастает потребление оперативной памяти. Предложенное усовершенствование вычислительного алгоритма сохраняет простоту его параллельной реализации на основе пространственной декомпозиции расчетной сетки.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, численные методы, гиперболические системы, сеточно-характеристический численный метод, операторное расщепление, порядок сходимости

Работа выполнена в рамках Государственного задания ИАП РАН.

UDC: 519.633.6

Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting

V. I. Golubev^{1,2,a}, A. V. Shevchenko^{1,2,b}, I. B. Petrov^{1,c}

¹Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia
²Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences,
19/18 Brestskaya st., Moscow, 123056, Russia

E-mail: ^a w.golubev@mail.ru, ^b alexshevchenko@phystech.edu, ^c petrov@mipt.ru

*Received 16.12.2021, after completion — 08.02.2022.
Accepted for publication 01.03.2022.*

The grid-characteristic method is successfully used for solving hyperbolic systems of partial differential equations (for example, transport / acoustic / elastic equations). It allows to construct correctly algorithms on contact boundaries and boundaries of the integration domain, to a certain extent to take into account the physics of the problem (propagation of discontinuities along characteristic curves), and has the property of monotonicity, which is important for considered problems. In the cases of two-dimensional and three-dimensional problems the method makes use of a coordinate splitting technique, which enables us to solve the original equations by solving several one-dimensional ones consecutively. It is common to use up to 3-rd order one-dimensional schemes with simple splitting techniques which do not allow for the convergence order to be higher than two (with respect to time). Significant achievements in the operator splitting theory were done, the existence of higher-order schemes was proved. Its peculiarity is the need to perform a step in the opposite direction in time, which gives rise to difficulties, for example, for parabolic problems.

In this work coordinate splitting of the 3-rd and 4-th order were used for the two-dimensional hyperbolic problem of the linear elasticity. This made it possible to increase the final convergence order of the computational algorithm. The paper empirically estimates the convergence in L_1 and L_∞ norms using analytical solutions of the system with the sufficient degree of smoothness. To obtain objective results, we considered the cases of longitudinal and transverse plane waves propagating both along the diagonal of the computational cell and not along it. Numerical experiments demonstrated the improved accuracy and convergence order of constructed schemes. These improvements are achieved with the cost of three- or fourfold increase of the computational time (for the 3-rd and 4-th order respectively) and no additional memory requirements. The proposed improvement of the computational algorithm preserves the simplicity of its parallel implementation based on the spatial decomposition of the computational grid.

Keywords: computer modeling, numerical methods, hyperbolic system, grid-characteristic method, operator splitting, convergence order

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 899–910 (Russian).

The work was carried out in the framework of State contract of ICAD RAS.

Введение

Гиперболические системы уравнений в частных производных описывают распространение волн. Частный случай уравнений линейной упругости описывает сейсмические волны в упругих телах и широко используется, например, для моделирования сейсмических волн в геологической среде [Petrov et al., 2021; Golubev, Khokhlov, 2018], процесса динамической нагрузки композитов [Beklemysheva et al., 2021], ультразвуковых исследований, задач сейсмостойкости сооружений, задач глобальной сейсмики [Bagaev, Golubev, Golubeva, 2019]. Большие размеры расчетной области обуславливают вычислительную сложность численного решения прямых задач сейсмики; в то же время многие методы полноволновой инверсии требуют решения большого числа прямых задач за приемлемое время. В совокупности эти факторы обеспечивают актуальность задачи о быстром и точном численном моделировании распространения сейсмических волн в заданной модели среды.

В мировой практике для решения прямых задач сейсмики применяются различные методы: конечно-разностные [Koene, Robertsson, Andersson, 2021; Wang et al., 2021], конечно-объемные [LeVeque, 1986], конечно-элементные [Moczó et al., 2007], спектральные [Liu et al., 2014; Chaljub et al., 2007], сеточно-характеристические [Kholodov, 1980; Golubev, Shevchenko, Petrov, 2020], бессеточные [Benito et al., 2018], разрывный метод Галёркина [Dumbser, Kaser, 2006; Lisitsa, Tcheverda, Botter, 2016]. Обзор различных методов приведен в работах [Virieux et al., 2016; Moczó et al., 2021]. В данной работе мы предлагаем комбинацию сеточно-характеристического метода со схемами расщепления повышенного порядка точности (3-го и 4-го), что позволяет получить новую численную схему повышенного порядка точности для системы уравнений линейной упругости в двумерном случае. Используемый в работе сеточно-характеристический метод уже был успешно применен для моделирования упругих сред [Favorskaya et al., 2018], однако возможно использование и других методов с желаемыми свойствами для решения одномерных гиперболических задач.

В вычислительной математике методы операторного расщепления занимают отдельное важное место. Они применяются в различных областях, например в методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, в методах оптимизации [MacNamara, Strang, 2016]. Зачастую использование расщепления для численного решения задач математической физики в значительной мере ограничивается простейшими схемами расщепления (схема Ли, схема Марчука – Яненко, схема Стрэнга и др.), обеспечивающими порядок точности не выше второго [Marchuk, 1990]. Однако успехи в теоретическом построении схем расщепления повышенного порядка позволяют получать новые интересные результаты при их комбинации с известными численными схемами для систем дифференциальных уравнений в частных производных.

В разделе «Численный метод» рассмотрены сеточно-характеристический метод для одномерного случая, используемые схемы операторного расщепления и их основные свойства, система уравнений линейной упругости. В разделе «Численное исследование порядка сходимости» представлено численное исследование сходимости метода на тестовых однородных задачах с целью, во-первых, верифицировать теоретические рассуждения и программную реализацию и, во-вторых, выбрать наиболее подходящую схему расщепления в смысле минимального требуемого компьютерного времени для достижения желаемой точности. В разделе «Заключение» сформулированы выводы, полученные в результате данного исследования.

Численный метод

Сеточно-характеристический метод для одномерных задач

Рассмотрим следующую однородную систему гиперболических уравнений в частных производных в одномерном случае:

$$\vec{q}_t + A\vec{q}_x = \vec{0}, \quad (1)$$

где вектор $\vec{q} = \vec{q}(x, t)$ включает в себя все неизвестные функции времени t и пространственной переменной $x \in \mathbb{R}^1$. Матрица $A(x)$ определяется параметрами среды (например, для уравнения переноса — скоростью переноса, для уравнений акустики — скоростью распространения волн и плотностью). Рассмотрим случай однородной среды, когда матрица A постоянна во всей пространственной области.

Гиперболичность системы означает, что матрица A имеет полный набор собственных векторов, благодаря чему может быть представлена в следующем виде:

$$A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega, \quad (2)$$

где столбцы матрицы Ω^{-1} есть собственные векторы матрицы A , а матрица Λ является диагональной, причем на ее диагонали стоят собственные числа матрицы A , соответствующие собственным векторам в столбцах Ω^{-1} . Подставляя (2) в уравнение (1) и вводя замену $\vec{\omega} = \Omega \vec{q}$ (компоненты вектора $\vec{\omega}$ будем называть инвариантами Римана), получим систему

$$\vec{\omega}_t + \Lambda \vec{\omega}_x = \vec{0}. \quad (3)$$

Поскольку матрица Λ является диагональной, данная система является набором независимых уравнений переноса вида $w_t + cw_x = 0$, здесь $w(x, t)$ есть i -я компонента вектора $\vec{\omega}$, $c = \lambda_i$ — i -е собственное значение (оно же — диагональный элемент Λ). Зная значения инвариантов на текущем шаге по времени, можно найти значения на следующем шаге по времени по следующей формуле, основанной на характеристическом свойстве уравнения переноса:

$$w(x, t + \tau) = w(x - c\tau, t). \quad (4)$$

Для нахождения правой части последнего равенства применяется процедура интерполяции многочленами. Возможна интерполяция по двум точкам (линейная), по трем точкам (квадратичная), по четырем точкам и так далее. Первая схема, известная как схема Куранта–Изаксона–Риса (далее CIR), обладает первым порядком сходимости. Интерполяция по четырем точкам, известная как схема Русанова, демонстрирует 3-й порядок сходимости (на однородной одномерной задаче с постоянным материалом). Схема Русанова часто используется на практике благодаря высокой точности и близости к монотонным схемам. Эти схемы устойчивы при выполнении условия Куранта $\tau < \frac{h}{c}$, где h — шаг сетки, c — максимальное собственное число (по модулю).

Итоговый алгоритм можно записать следующим образом: на каждом шаге по времени (n) в каждой точке

- 1) перейти к инвариантам Римана $\vec{\omega}^{(n)}$ по формуле $\vec{\omega}^{(n)} = \Omega \vec{q}^{(n)}$;
- 2) посчитать значения инвариантов Римана на следующем шаге по времени $\vec{\omega}^{(n+1)}$ с помощью интерполяции желаемого порядка значений на текущем временном шаге (n);
- 3) перейти от инвариантов Римана $\vec{\omega}^{(n+1)}$ к исходным неизвестным $\vec{q}^{(n+1)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для случая неоднородного уравнения (в правой части ненулевой вектор $\vec{f}(x, t)$) к алгоритму добавляется пункт 4: выполнить шаг по времени для уравнения $\vec{q}_t = \vec{f}$.

Расщепление по направлениям для двумерных задач

Рассмотрим следующую однородную гиперболическую систему уравнений в двумерном случае:

$$\vec{q}_t + A_1 \vec{q}_x + A_2 \vec{q}_y = \vec{0}. \quad (5)$$

Аналогично предыдущему подпункту вектор $\vec{q}(x, y, t)$ содержит все неизвестные функции, а матрицы A_1, A_2 одинаковы во всей расчетной области.

Для решения этой системы сеточно-характеристическим методом применяется процедура координатного расщепления, также известного как расщепление по пространственным направлениям. Этот подход позволяет свести решение двумерной задачи к последовательному решению нескольких одномерных задач. Для решения указанных подзадач может использоваться метод, описанный в предыдущем подпункте.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Благодаря гиперболичности системы обе матрицы — A_1, A_2 — имеют полный набор собственных векторов.

Простейшая широко используемая схема расщепления имеет вид (далее будем ее обозначать как S1):

- 1) сделать шаг по времени для задачи $\vec{q}_t + A_1 \vec{q}_x = \vec{0}$, найти $\vec{q}^{(n+1/2)}$;
- 2) сделать шаг по времени для задачи $\vec{q}_t + A_2 \vec{q}_y = \vec{0}$ с начальными значениями после шага 1, найти $\vec{q}^{(n+1)}$.

Несмотря на то что эта схема обладает 1-м порядком точности по времени, она является очень популярной в связи с простотой реализации, скоростью работы и достаточно точными результатами на практике. Тем не менее для более точного решения системы уравнений (5) могут быть полезны численные методы повышенного порядка точности, основанные на более точных схемах расщепления.

Для описания нескольких схем расщепления представим алгоритм их работы в более общем виде: на каждом шаге по времени

ДЛЯ i ОТ 1 ДО s ВЫПОЛНИТЬ:

ШАГ по X с $\tau = \alpha_i^X dt$

ШАГ по Y с $\tau = \alpha_i^Y dt$

Здесь dt — шаг по времени, τ — используемый (дробный) шаг по времени; коэффициенты α_i^j , $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, $j \in \{X, Y\}$, задающие дробные шаги по времени, однозначно определяют схему расщепления. Коэффициенты для нескольких схем, использованных в данной работе, приведены в таблицах ниже. Под шагом по X понимается выполнение одного шага τ для решения уравнения $\vec{q}_t + A_1 \vec{q}_x = \vec{0}$, под шагом по Y — $\vec{q}_t + A_2 \vec{q}_y = \vec{0}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Выполняются следующие соотношения, обеспечивающие полное выполнение одного шага по времени dt по выполнению всех дробных шагов:

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i^X = 1, \quad \sum_{i=1}^s \alpha_i^Y = 1. \quad (6)$$

Таблица 1. Схема расщепления 1-го порядка (далее — схема S1). $s = 1$

i	α^x	α^y
1	1	1

Таблица 2. Схема расщепления 3-го порядка (далее — схема R3). $s = 3$

i	α^x	α^y
1	$\frac{7}{24}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{3}$
3	$-\frac{1}{24}$	1

Таблица 3. Схема расщепления 4-го порядка (далее — схема Y4). $s = 4$. $\theta = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$

1	$\frac{\theta}{2}$	θ
2	$\frac{1-\theta}{2}$	$1 - 2\theta$
3	$\frac{1-\theta}{2}$	θ
4	$\frac{\theta}{2}$	0

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Схема R3 требует в 3 раза больше вычислительного времени, чем схема S1, схема Y4 — в 4 раза больше. Дополнительных затрат по памяти нет.

В схемах расщепления R3, Y4 присутствуют отрицательные коэффициенты α_i , означающие необходимость выполнения отрицательных шагов по времени. В общем случае можно показать, что если расщепление указанного вида имеет порядок точности выше второго, то хотя бы один из коэффициентов α_i строго отрицателен. Для гиперболических уравнений отрицательный шаг по времени не представляет собой принципиальных трудностей. В случае использования сеточно-характеристического метода как общий подход, так и формула (4) остаются верными и при $\tau < 0$.

При использовании сеточно-характеристического метода для одномерных (расщепленных) уравнений условием их устойчивости будет $\tau < \frac{h}{c}$ (при корректном выборе шаблона для интерполяции).

Уравнения линейной упругости

Описанный выше подход был успешно применен для гиперболической системы уравнений линейной упругости. В этой модели в вектор неизвестных \vec{q} последовательно входят компоненты вектора скорости частиц среды и компоненты тензора напряжений: $\vec{q} = (v_x \ v_y \ s_{xx} \ s_{yy} \ s_{xy})^T$. Матрицы A_1, A_2 определяются параметрами Ламе λ, μ и плотностью ρ следующим образом:

$$A_1 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матриц одинаковы и соответствуют скоростям распространения продольных ($c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$) и поперечных ($c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$) волн: $\Lambda = \text{diag}(0, -c_p, c_p, -c_s, c_s)$.

Численное исследование порядка сходимости

Для верификации повышения порядка точности метода была проведена серия расчетов задач о распространении волн в среде, описываемой моделью линейной упругости. Было рассмотрено несколько постановок задач. Для численного решения использовались различные схемы расщепления и различные сеточно-характеристические схемы решения одномерных задач.

Во всех случаях решалась однородная система уравнений с постоянными параметрами, начальные условия задавали плоскую волну. Более подробное описание представлено ниже. Численное решение сравнивалось с аналитическим по нормам L_1 , L_∞ :

$$\|f\|_{L_1} = \sum_i |f_i| \cdot h^2, \quad \|f\|_{L_\infty} = \max_i |f_i|.$$

Расчеты повторялись с уменьшающимися вдвое шагами по пространственной сетке h и по времени dt , таким образом, число Куранта $\frac{c \cdot dt}{h}$ оставалось постоянным. По серии расчетов было посчитано численное значение порядка сходимости по формуле $p = \log_2 \left(\frac{E_{2h}}{E_h} \right)$, где E_h означает ошибку — норму разности аналитического решения и численного при шаге сетки h .

Постановка № 1 — 45°

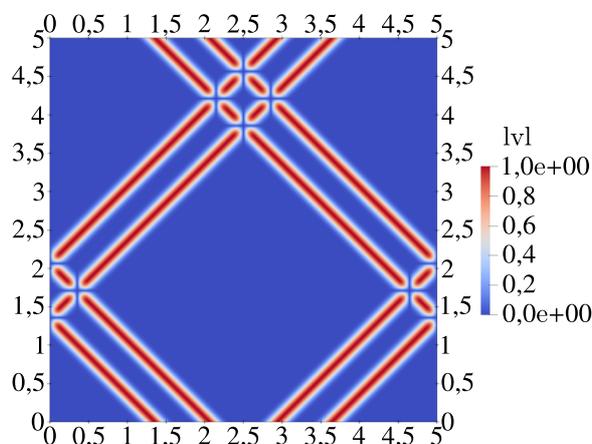


Рис. 1. Волновое поле в начальный момент времени для постановки задачи № 1, отображен модуль скорости

Рассматривалась квадратная область размером 5 м × 5 м. На границе задавались периодические граничные условия. Начальные значения задавали две плоские продольные волны, распространяющиеся в направлении 45°, и две плоские поперечные волны, распространяющиеся в направлении 135°. Форма плоской волны задавалась в виде $f(\xi) = \sin^6(\xi)$, где переменная ξ направлена вдоль направления распространения волны перпендикулярно волновому фронту. Такой импульс обеспечивает достаточный порядок гладкости начальных условий во всей расчетной области. На рис. 1 представлено распределение модуля скорости в начальный момент времени. При такой конфигурации начальных и граничных условий волны распространяются в среде и восстанавливают конфигурацию начального момента времени без искажений от границы. Параметры среды были следующими: $c_p = 20\sqrt{2}$ м/с, $c_s = 10\sqrt{2}$ м/с, $\rho = 15$ кг/м³. Рассчитывался один полный период, то есть распространение волн до момента восстановления исходного волнового поля. Результаты расчетов представлены в таблицах ниже.

Постановка № 2 — 30°

Рассматривалась квадратная область размером 17 м × 17 м. Начальные значения задавали одну плоскую волну (продольную или поперечную), распространяющуюся в направлении 30°. Форма плоской волны задавалась в виде $f(\xi) = \sin^6(\xi)$, где переменная ξ направлена вдоль направления распространения волны перпендикулярно волновому фронту. Такой импульс обеспечивает достаточный порядок гладкости начальных условий во всей расчетной области. На рис. 2

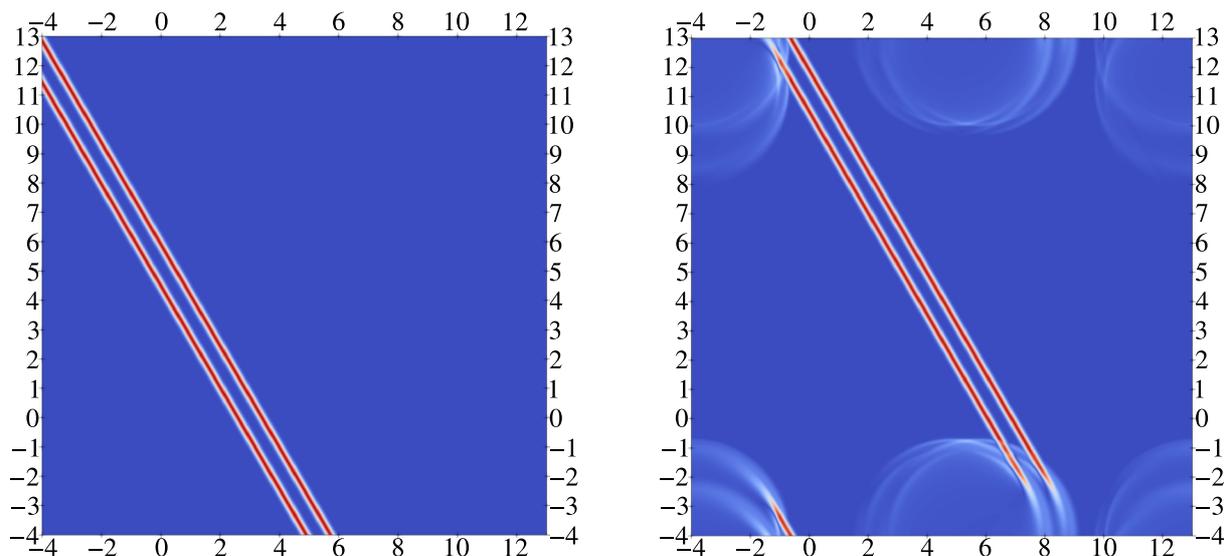


Рис. 2. Волновое поле в начальный и конечный моменты времени для постановки задачи № 2, отображен модуль скорости линейной цветовой шкалой от 0 до 1

представлено распределение модуля скорости в начальный и конечный моменты времени. Рассматривалось время, за которое волна проходит 3 м. Чтобы не учитывать ошибки, возникающие вблизи границы (поскольку периодические граничные условия не соответствуют физической сути процесса), для расчета ошибки и последующей оценки порядка точности рассматривалась подобласть в центре размером 7 м × 7 м. Результаты расчетов приведены в таблицах ниже.

Результаты расчетов

Результаты расчетов представлены в таблицах, где отражены шаг расчетной сетки, абсолютная и относительная ошибка по нормам L_1 и L_∞ , порядок сходимости по L_1 и L_∞ , а также время расчета. Подтверждается повышение точности метода ценой трех- или четырехкратного увеличения времени расчета при использовании схем расщепления 3-го и 4-го порядка соответственно. Также можно отметить следующее:

- для двумерной задачи не удастся получить порядок сходимости выше, чем порядок решения одномерной схемы для расщепленной системы уравнений;
- использование одномерной схемы более высокого порядка сходимости, чем схемы расщепления, позволяет повысить точность расчета на практике, несмотря на теоретическое ограничение итогового порядка схемы порядком схемы расщепления.

Заключение

В работе предложен способ повышения порядка точности сеточно-характеристического метода для двумерных задач с помощью специальных техник расщепления по пространственным направлениям 3-го и 4-го порядка. Реализация для уравнений линейной упругости подтвердила повышение порядка точности и уменьшение ошибки, достигаемые ценой возрастания времени расчета в 3-4 раза (без дополнительных затрат памяти). Использование простейшего расщепления 1-го порядка совместно с одномерными схемами 3-го или 4-го порядка для расщепленных задач показало высокую практическую эффективность, несмотря на теоретически

Таблица 4. Расщепление S1 1-го порядка и одномерная схема Русанова 3-го порядка для расщепленных уравнений. Постановка № 1

h	Абс. L_1	Абс. L_∞	Отн. L_1 , %	Отн. L_∞ , %	p, L_1	p, L_∞	Время, с
0,0500000	1,7131e+00	4,9140e-01	0,6091	0,6955	—	—	0,1
0,0250000	7,7484e-01	2,4442e-01	0,2769	0,3459	1,145	1,008	0,5
0,0125000	1,7294e-01	6,2142e-02	0,0620	0,0879	2,164	1,976	4,1
0,0062500	2,5343e-02	9,5585e-03	0,0091	0,0135	2,771	2,701	41,1
0,0031250	3,4883e-03	1,3511e-03	0,0013	0,0019	2,861	2,823	322,7
0,0015625	5,4836e-04	2,1659e-04	0,0002	0,0003	2,669	2,641	2667,0

Таблица 5. Расщепление R3 3-го порядка и одномерная схема Русанова 3-го порядка для расщепленных уравнений. Постановка № 1

h	Абс. L_1	Абс. L_∞	Отн. L_1 , %	Отн. L_∞ , %	p, L_1	p, L_∞	Время, с
0,0500000	2,2272e+00	5,7499e-01	0,7919	0,8138	—	—	0,2
0,0250000	1,0799e+00	3,2743e-01	0,3860	0,4634	1,044	0,812	1,2
0,0125000	3,1769e-01	1,0782e-01	0,1139	0,1525	1,765	1,603	8,7
0,0062500	5,0677e-02	1,8472e-02	0,0182	0,0261	2,648	2,545	101,0
0,0031250	6,6015e-03	2,4319e-03	0,0024	0,0034	2,940	2,925	815,2
0,0015625	8,2922e-04	3,0603e-04	0,0003	0,0004	2,993	2,990	7456,8

Таблица 6. Расщепление Y4 4-го порядка и одномерная схема Русанова 3-го порядка для расщепленных уравнений. Постановка № 1

h	Абс. L_1	Абс. L_∞	Отн. L_1 , %	Отн. L_∞ , %	p, L_1	p, L_∞	Время, с
0,0500000	2,2904e+00	5,8187e-01	0,8143	0,8235	—	—	0,3
0,0250000	1,1172e+00	3,3834e-01	0,3993	0,4788	1,036	0,782	1,6
0,0125000	3,4231e-01	1,1545e-01	0,1227	0,1633	1,706	1,551	12,0
0,0062500	5,5570e-02	2,0236e-02	0,0199	0,0286	2,623	2,512	162,0
0,0031250	7,2676e-03	2,6780e-03	0,0026	0,0038	2,935	2,918	1240,7
0,0015625	9,1344e-04	3,3721e-04	0,0003	0,0005	2,992	2,989	10 055,7

Таблица 7. Расщепление Y4 4-го порядка и одномерная схема 4-го порядка для расщепленных уравнений. Постановка № 1

h	Абс. L_1	Абс. L_∞	Отн. L_1 , %	Отн. L_∞ , %	p, L_1	p, L_∞	Время, с
0,0500000	1,4162e+00	3,9852e-01	0,5035	0,5640	—	—	0,4
0,0250000	3,6368e-01	1,2270e-01	0,1300	0,1737	1,961	1,699	2,4
0,0125000	2,9529e-02	1,0622e-02	0,0106	0,0150	3,622	3,530	18,3
0,0062500	1,8500e-03	6,6471e-04	0,0007	0,0009	3,997	3,998	162,0
0,0031250	1,1521e-04	4,1480e-05	0,0000	0,0001	4,005	4,002	1297,6
0,0015625	7,1910e-06	2,5908e-06	0,0000	0,0000	4,002	4,001	11 372,8

первый порядок точности по времени, поэтому эта комбинация может быть рекомендована для большинства случаев. Для получения более точных результатов (с относительной ошибкой менее 1 %) расчет схемой расщепления более высокого порядка может быть предпочтительным за счет использования более грубой расчетной сетки и меньшего вычислительного времени.

Таблица 8. Расщепление S1 1-го порядка и одномерная схема Русанова 3-го порядка для расщепленных уравнений. Постановка № 2, продольная волна

h	Абс. L_1	Абс. L_∞	Отн. L_1 , %	Отн. L_∞ , %	p, L_1	p, L_∞	Время, с
0,100000	2,5239e+00	3,8957e-01	64,1675	44,9841	—	—	0,1
0,050000	1,1635e+00	1,8297e-01	29,4147	21,1280	1,117	1,090	0,4
0,025000	2,7136e-01	4,6735e-02	6,8414	5,3964	2,100	1,969	4,0
0,012500	4,3434e-02	7,0858e-03	1,0935	0,8182	2,643	2,721	32,6
0,006250	7,9699e-03	1,0503e-03	0,2005	0,1213	2,446	2,754	296,6
0,003125	2,8097e-03	2,9422e-04	0,0707	0,0340	1,504	1,836	3462,5

Таблица 9. Расщепление R3 3-го порядка и одномерная схема Русанова 3-го порядка для расщепленных уравнений. Постановка № 2, продольная волна

h	Абс. L_1	Абс. L_∞	Отн. L_1 , %	Отн. L_∞ , %	p, L_1	p, L_∞	Время, с
0,100000	2,7357e+00	4,1324e-01	69,5516	47,7164	—	—	0,1
0,050000	1,2758e+00	2,0196e-01	32,2541	23,3206	1,101	1,033	1,0
0,025000	3,1363e-01	5,5247e-02	7,9072	6,3794	2,024	1,870	11,1
0,012500	4,6847e-02	8,5965e-03	1,1794	0,9926	2,743	2,684	101,1
0,006250	6,0309e-03	1,1122e-03	0,1517	0,1284	2,958	2,950	886,5
0,003125	7,5710e-04	1,3971e-04	0,0190	0,0161	2,994	2,993	10 358,2

Таблица 10. Расщепление Y4 4-го порядка и одномерная схема 4-го порядка для расщепленных уравнений. Постановка № 2, продольная волна

h	Абс. L_1	Абс. L_∞	Отн. L_1 , %	Отн. L_∞ , %	p, L_1	p, L_∞	Время, с
0,100000	2,6052e+00	3,0910e-01	66,2340	35,6916	—	—	0,3
0,050000	7,7195e-01	1,1590e-01	19,5164	13,3834	1,755	1,415	2,1
0,025000	6,3839e-02	1,0311e-02	1,6095	1,1906	3,596	3,491	17,7
0,012500	4,0959e-03	6,5655e-04	0,1031	0,0758	3,962	3,973	199,9
0,006250	2,5711e-04	4,1282e-05	0,0065	0,0048	3,994	3,991	2045,3
0,003125	1,6089e-05	2,5835e-06	0,0004	0,0003	3,998	3,998	17 568,7

Таблица 11. Расщепление S1 1-го порядка и одномерная схема Русанова 3-го порядка для расщепленных уравнений. Постановка № 2, поперечная волна

h	Абс. L_1	Абс. L_∞	Отн. L_1 , %	Отн. L_∞ , %	p, L_1	p, L_∞	Время, с
0,100000	1,5569e+00	2,3655e-01	68,5582	47,3101	—	—	0,1
0,050000	7,1143e-01	1,1374e-01	31,1533	22,7486	1,130	1,056	0,4
0,025000	1,7328e-01	3,1015e-02	7,5667	6,2030	2,038	1,875	4,1
0,012500	3,1947e-02	6,3870e-03	1,3931	1,2774	2,439	2,280	33,0
0,006250	1,1867e-02	2,0103e-03	0,5171	0,4021	1,429	1,668	284,2
0,003125	5,6625e-03	8,6626e-04	0,2467	0,1733	1,067	1,215	3343,3

Таблица 12. Расщепление R3 3-го порядка и одномерная схема Русанова 3-го порядка для расщепленных уравнений. Постановка № 2, поперечная волна

h	Абс. L_1	Абс. L_∞	Отн. L_1 , %	Отн. L_∞ , %	p, L_1	p, L_∞	Время, с
0,100000	1,6855e+00	2,5144e-01	74,2225	50,2876	—	—	0,1
0,050000	7,9109e-01	1,2582e-01	34,6418	25,1631	1,091	0,999	1,0
0,025000	2,0868e-01	3,6629e-02	9,1128	7,3258	1,923	1,780	12,0
0,012500	3,2085e-02	5,9016e-03	1,3991	1,1803	2,701	2,634	92,9
0,006250	4,1558e-03	7,6839e-04	0,1811	0,1537	2,949	2,941	852,5
0,003125	5,2226e-04	9,6600e-05	0,0228	0,0193	2,992	2,992	9991,4

Таблица 13. Расщепление Y4 4-го порядка и одномерная схема 4-го порядка для расщепленных уравнений. Постановка № 2, поперечная волна

h	Абс. L_1	Абс. L_∞	Отн. L_1 , %	Отн. L_∞ , %	p, L_1	p, L_∞	Время, с
0,100000	1,4442e+00	1,7829e-01	63,5949	35,6586	—	—	0,3
0,050000	4,2732e-01	6,4872e-02	18,7121	12,9744	1,757	1,459	2,0
0,025000	3,6720e-02	5,9308e-03	1,6035	1,1862	3,541	3,451	17,5
0,012500	2,3562e-03	3,7702e-04	0,1027	0,0754	3,962	3,976	180,6
0,006250	1,4779e-04	2,3654e-05	0,0064	0,0047	3,995	3,994	1996,4
0,003125	9,2457e-06	1,4798e-06	0,0004	0,0003	3,999	3,999	17 429,7

Список литературы (References)

- Bagaev R. A., Golubev V. I., Golubeva Yu. A.* Full-wave 3D earthquake simulation using the double-couple model and the grid-characteristic method // *Computer Research and Modeling*. — 2019. — Vol. 11, No. 6. — P. 1061–1067.
- Beklemysheva K., Golubev V., Petrov I., Vasyukov A.* Determining effects of impact loading on residual strength of fiber-metal laminates with grid-characteristic numerical method // *Chinese Journal of Aeronautics*. — 2021. — Vol. 34, No. 7. — P. 1–12.
- Benito J., Prieto F. U., Urena M., Casino E. S., Gavete L.* A new meshless approach to deal with interfaces in seismic problems // *Applied Mathematical Modelling*. — 2018. — Vol. 58. — P. 447–458.
- Chaljub E., Komatitsch D., Vilotte J.-P., Capdeville Y., Valette B.* Spectral-element analysis in seismology // *Advances in Geophysics*. — 2007. — Vol. 48. — P. 365–419.
- Dumbser M., Kaser M.* An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes II. The three-dimensional isotropic case // *Geophysical Journal International*. — 2006. — Vol. 167, No. 1. — P. 319–336.
- Favorskaya A. V., Zhdanov M. S., Khokhlov N. I., Petrov I. B.* Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method // *Geophysical Prospecting*. — 2018. — Vol. 66. — P. 1485–1502.
- Golubev V. I., Khokhlov N. I.* Estimation of anisotropy of seismic response from fractured geological objects // *Computer Research and Modeling*. — 2018. — Vol. 10, No. 2. — P. 231–240.
- Golubev V., Shevchenko A., Petrov I.* Simulation of Seismic Wave Propagation in a Multicomponent Oil Deposit Model // *International Journal of Applied Mechanics*. — 2020. — Vol. 12, No. 8. — No. 2050084.
- Kholodov A. S.* The construction of difference schemes of increased order of accuracy for equations of hyperbolic type // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 1980. — Vol. 20, No. 6. — P. 234–253.
- Koene E. F. M., Robertsson J. O. A., Andersson F.* Anisotropic elastic finite-difference modeling of sources and receivers on Lebedev grids // *Geophysics*. — 2021. — Vol. 86, No. 2. — P. A21–A25.
- LeVeque R. J.* Intermediate boundary conditions for time-split methods applied to hyperbolic partial differential equations // *Mathematical Computations*. — 1986. — Vol. 47. — P. 37–54.
- Lisitsa V., Tcheverda V., Botter C.* Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation // *Journal of Computational Physics*. — 2016. — Vol. 311. — P. 142–157.
- Liu Y., Teng J., Lan H., Si X., Ma X.* A comparative study of finite element and spectral element methods in seismic wavefield modeling // *Geophysics*. — 2014. — Vol. 79, No. 2. — P. T91–T104.

- MacNamara S., Strang G.* Operator splitting. In *Splitting methods in communication, imaging, science, and engineering*. — Springer, Cham: Scientific Computation (formerly: Sprin. Ser. Comp. Sciences), 2016. — P. 95–114.
- Marchuk G. I.* Splitting and alternating direction methods // *Handbook of numerical analysis*. — 1985. — Vol. 1. — P. 197–462.
- Moczo P., Kristek J., Gabriel A.-A., Chaljub E., Ampuero J.-P., Sanchez-Sesma F.J., Galis M., Gregor D., Kristekova M.* Numerical wave propagation simulation // *The 6th IASPEI / IAEE International Symposium: Effects of Surface Geology on Seismic Motion, August 2021*.
- Moczo P., Kristek J., Galis M., Pazak P., Balazovjeh M.* The finite-difference and finite-element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion // *Acta Physica Slovaca*. — 2007. — Vol. 57, No. 2. — P. 177–406.
- Petrov I. B., Golubev V. I., Petrukhin V. Y., Nikitin I. S.* Simulation of seismic waves in anisotropic media // *Doklady Mathematics*. — 2021. — Vol. 103, No. 3. — P. 146–150.
- Virieux J., Etienne V., Cruz-Atienza V., Brossier R., Chaljub E., Coutant O.* Modelling seismic wave propagation for geophysical imaging, seismic waves—research and analysis / ed. Dr. Masaki Kanao. — InTech, 2012. — P. 304.
- Wang W., Wen X., Tang C., Li B., Li L., Wang W.* Variable-order optimal implicit finite-difference schemes for explicit time-marching solutions to wave equations // *Geophysics*. — 2021. — Vol. 86, No. 2. — P. T91–T106.