

УДК: 519.6

Расчет скорости поперечной волны при ударе по предварительно нагруженным нитям

А. В. Васюков^{1,a}, К. А. Беклемышева^{1,b}, Е. С. Онучин^{1,c},
Н. А. Товарнова^{1,2,d}, И. Б. Петров^{1,e}

¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 141700, Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

²Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, корп. 1

E-mail: ^a a.vasyukov@phystech.edu, ^b katerina.beklemysheva@phystech.edu, ^c oes92@yandex.ru,
^d ntovarnova@gmail.com, ^e petrov@mipt.ru

Получено 20.12.2021.

Принято к публикации 20.01.2022.

В работе рассматривается задача о поперечном ударе по тонкой предварительно нагруженной нити. Общепринятая теория о поперечном ударе по тонкой нити отталкивается от классических публикаций Рахматулина и Смита. На основании теории Рахматулина–Смита получены соотношения, широко используемые в инженерной практике. Однако существуют многочисленные данные о том, что экспериментальные результаты могут существенно отличаться от оценок, сделанных на базе этих соотношений. Краткий обзор факторов, которые вызывают отличия, приведен в тексте статьи.

Основное внимание в данной статье уделяется скорости поперечной волны, формирующейся при ударе, так как только ее можно непосредственно наблюдать и измерять с помощью высокоскоростной съемки или иных методов. Рассматривается влияние предварительного натяжения нити на скорость волны. Данный фактор важен, так как он неизбежно возникает в результатах натурных испытаний в силу того, что надежное закрепление и точное позиционирование нити на экспериментальной установке требует некоторого ее натяжения. В данной работе показано, что предварительная деформация нити существенно влияет на скорость поперечной волны, возникающей в ходе ударного взаимодействия.

Выполнены расчеты серии постановок для нитей Kevlar 29 и Spectra 1000. Для различных уровней начального натяжения получены скорости поперечных волн. Приведено прямое сравнение численных результатов и аналитических оценок с данными экспериментов. Для рассмотренных постановок скорость поперечной волны в свободной и в нагруженной нити отличалась практически в два раза. Таким образом, показано, что измерения, основанные на высокоскоростной съемке и анализе наблюдаемых поперечных волн, должны учитывать предварительную деформацию нити.

В работе предложена формула для быстрой оценки скорости поперечной волны в натянутых нитях. Данная формула получена из основных соотношений теории Рахматулина–Смита в предположении большой начальной деформации нити. На примере рассмотренных постановок для Kevlar 29 и Spectra 1000 показано, что полученная формула может давать существенно лучшие результаты, чем классическое приближение. Также показано, что прямой численный расчет дает результаты, которые оказываются значительно ближе к экспериментальным данным, чем любая из рассмотренных аналитических оценок.

Ключевые слова: тонкая нить, ударная нагрузка, предварительная нагрузка, скорость поперечной волны, численное решение, аналитическая оценка

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-29-17027.

© 2022 Алексей Викторович Васюков, Катерина Алексеевна Беклемышева, Егор Сергеевич Онучин, Наталья Александровна Товарнова, Игорь Борисович Петров

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 519.6

Calculation of transverse wave speed in preloaded fibres under an impact

A. V. Vasyukov^{1,a}, K. A. Beklemysheva^{1,b}, E. S. Onuchin^{1,c},
N. A. Tovarnova^{1,2,d}, I. B. Petrov^{1,e}

¹Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
9 Institutsky per., Dolgoprudny, 141700, Russia

²Bauman Moscow State Technical University,
5/1 2nd Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia

E-mail: ^a a.vasyukov@phystech.edu, ^b katerina.beklemysheva@phystech.edu, ^c oes92@yandex.ru,
^d ntovarnova@gmail.com, ^e petrov@mipt.ru

Received 20.12.2021.

Accepted for publication 20.01.2022.

The paper considers the problem of transverse impact on a thin preloaded fiber. The commonly accepted theory of transverse impact on a thin fiber is based on the classical works of Rakhmatulin and Smith. The simple relations obtained from the Rakhmatulin–Smith theory are widely used in engineering practice. However, there are numerous evidences that experimental results may differ significantly from estimations based on these relations. A brief overview of the factors that cause the differences is given in this article.

This paper focuses on the shear wave velocity, as it is the only feature that can be directly observed and measured using high-speed cameras or similar methods. The influence of the fiber preload on the wave speed is considered. This factor is important, since it inevitably arises in the experimental results. The reliable fastening and precise positioning of the fiber during the experiments requires its preload. This work shows that the preload significantly affects the shear wave velocity in the impacted fiber.

Numerical calculations were performed for Kevlar 29 and Spectra 1000 yarns. Shear wave velocities are obtained for different levels of initial tension. A direct comparison of numerical results and analytical estimations with experimental data is presented. The speed of the transverse wave in free and preloaded fibers differed by a factor of two for the setup parameters considered. This fact demonstrates that measurements based on high-speed imaging and analysis of the observed shear waves should take into account the preload of the fibers.

This paper proposes a formula for a quick estimation of the shear wave velocity in preloaded fibers. The formula is obtained from the basic relations of the Rakhmatulin–Smith theory under the assumption of a large initial deformation of the fiber. The formula can give significantly better results than the classical approximation, this fact is demonstrated using the data for preloaded Kevlar 29 and Spectra 1000. The paper also shows that direct numerical calculation has better corresponding with the experimental data than any of the considered analytical estimations.

Keywords: thin fiber, impact load, preload, transverse wave speed, numerical modeling, analytical estimation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 887–897 (Russian).

This work was supported by RFBR project 18-29-17027.

Введение

Общепринятая теория о поперечном ударе по тонкой нити отталкивается от классических публикаций Рахматулина [Рахматулин, 1945; Рахматулин, 1947; Рахматулин, 1952] и Смита [Smith, McCrackin, Schiefer, 1958; Smith, Blandford, Schiefer, 1960]. В этих работах рассматривается плоское движение нити под действием поперечной нагрузки. Предполагается, что нить однородна. Принимается, что ударник достаточно массивный, в силу чего его скорость при взаимодействии с нитью можно считать постоянной. Процессы в поперечном сечении нити не рассматриваются, в этом смысле нить является тонкой, в ней действует только сила натяжения. Поперечный удар вызывает в нити продольную волну, которая распространяется со скоростью C_p , и поперечную волну, которая распространяется со скоростью C_s . Скорость продольной волны традиционно выражается в виде $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где E — модуль Юнга нити, а ρ — ее плотность. Скорость поперечной волны зависит от параметров удара и обычно оказывается на порядок ниже скорости продольной волны.

При этих предположениях деформированная часть нити приобретает типичную V-образную форму. В левой части рис. 1 показана форма нити при точечном ударе с постоянной скоростью. Продольные волны распространяются вдоль нити. Визуально заметный излом нити сформирован поперечными волнами. Угол между недеформированной нитью и ее центральной частью, участвующей в поперечном движении, остается постоянным до начала разрушения или до отражения волн от краев нити. Аналогичная форма нити наблюдается на краю массивного ударника, как показано в правой части рис. 1.

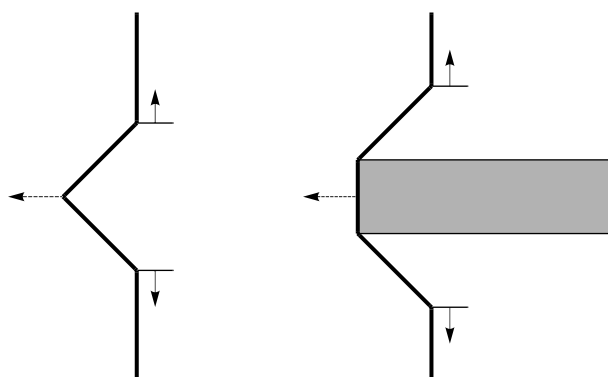


Рис. 1. Форма нити при ударе с постоянной скоростью. Точечный удар (слева) и удар массивным ударником (справа). Пунктирная стрелка показывает направление удара. Сплошными стрелками показаны направления распространения поперечных волн

Скорость поперечной волны является важной характеристикой процесса, так как только ее можно непосредственно наблюдать и измерять с помощью высокоскоростной съемки или иных методов. Классическая теория дает следующее соотношение для скорости поперечной волны, если ударник имеет постоянную скорость V :

$$C_s = 0,8C_p^{1/3}V^{2/3}. \quad (1)$$

Также из классической теории следуют широко используемые в инженерной практике [Sockalingam et al., 2017] соотношения между скоростью ударника, деформацией в нити ϵ за продольной волной и скоростью поперечной волны:

$$V = C_p \sqrt{2\epsilon \sqrt{\epsilon(1+\epsilon)} - \epsilon^2}, \quad (2)$$

$$C_s = C_p (\sqrt{\epsilon(1+\epsilon)} - \epsilon). \quad (3)$$

Выражение (1) традиционно используется для быстрой оценки скорости поперечной волны для случаев, в которых выполнено условие $C_s \ll C_p$. Уравнения (2) и (3) применяются для оценки предельной скорости ударника, при которой произойдет разрыв нити, а также для получения более точного значения скорости поперечной волны. Однако существуют многочисленные данные о том, что экспериментально полученные скорости часто отличаются от результатов классических оценок [Sokalingam et al., 2017], иногда отличие может составлять до 40% [Walker, Chocron, 2011].

Разные группы исследователей описали ряд факторов, которые вносят вклад в возникновение отличий между предсказаниями классической теории и экспериментальными результатами. Баженов с соавторами [Bazhenov et al., 2001] проанализировали влияние формы ударника. В работе [Walker, Chocron, 2011] представлено объяснение, основанное на анализе волн, возникающих на острых углах передней кромки ударника, которые затем складываются в центре нити. В той же работе показано, что дополнительный вклад может вносить отскок нити от ударника. В нескольких работах рассматривалось внутреннее строение нити. Так, в [Bazhenov et al., 2001] обсуждаются отличия прочности отдельных составляющих нить волокон, а в работе [Song, Lu, 2015] изучаются эффекты, обусловленные закрученностью волокон в составе нити. Есть и другие работы, посвященные микроструктуре нити и волокон, но данные эффекты на микроуровне выходят за рамки данной статьи.

На макроуровне следует отметить, что значительный вклад в расхождение между классическими оценками и экспериментальными данными может вносить предварительное натяжение нити перед ударом. Данный фактор неизбежно возникает в результатах натуральных испытаний, так как надежное закрепление и точное позиционирование нити на экспериментальной установке требуют ее натяжения. Некоторые экспериментальные работы описывают схему закрепления и указывают значение предварительного натяжения [Bazhenov et al., 2001; Field, Sun, 1991]. Однако многие авторы просто игнорируют этот параметр, так как он не входит в классические соотношения (1)–(3). В данной статье представлены результаты численного моделирования и аналитические оценки, направленные на оценку влияния данного фактора. Результаты сравниваются с экспериментальными данными для двух типов нитей, представленными в работе [Field, Sun, 1991].

Модель и метод численного решения

В данной работе используется исходная система уравнений из [Рахматулин, 1945; Рахматулин, 1947; Рахматулин, 1952]. Движение нити описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial(T \cos \phi)}{\partial s_0} + \rho_0 P \sin \phi, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial(T \sin \phi)}{\partial s_0} + \rho_0 P \cos \phi. \end{aligned} \quad (4)$$

Для случая удара с постоянной скоростью система уравнений принимает следующий вид [Рахматулин, 1945]:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s_0} \left[\frac{T}{1 + \epsilon} \left(1 + \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) \right], \\ \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s_0} \left[\frac{T}{1 + \epsilon} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнениях (4) и (5) используются следующие обозначения: ρ_0 — плотность материала нити, которая принимается постоянной, T — натяжение нити, P — внешняя поперечная нагрузка,

приложенная к нити, ϵ — деформация нити, s_0 — расстояние вдоль нити, (x, y) — пространственные координаты, ϕ — угол между касательной к нити и осью OX . Введенная система координат показана на рис. 2, сплошной линией показан сегмент нити, пунктиром — касательная.

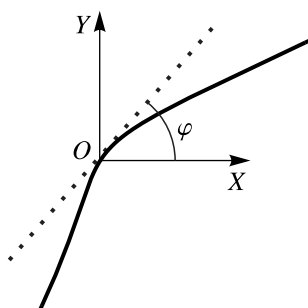


Рис. 2. Участок нити и используемые обозначения

Уравнения (4) и (5), используемые для численного моделирования, не накладывают никаких ограничений на предварительное натяжение, нить в момент удара может быть как свободна, так и иметь предварительные деформации. Для численного решения приведенной системы используется конечно-разностная схема второго порядка, валидация которой путем сравнения с аналитическим решением приведена в [Vasyukov, Elovenkova, Petrov, 2021]. Для описания воздействия массивного ударника используется граничное условие с заданием постоянной скорости.

Аналитические оценки

Классическая теория рассматривает поперечный точечный удар телом бесконечной массы по нити бесконечной длины. Данное приближение применимо для значительного спектра постановок. Тело бесконечной массы описывает задачи, в которых торможением ударника за время взаимодействия можно пренебречь. Соотношения, полученные для бесконечной нити, применимы на начальном этапе произвольного удара, пока возмущение не дошло до концов нити или точек ее закрепления. Постановка с точечным ударом может использоваться для случая острой кромки плоского ударника. Таким образом, все построения классической теории должны быть применимы для описания начального этапа распространения возмущений в нити от края массивного ударника.

В работах [Рахматулин, 1945; Рахматулин, 1947; Рахматулин, 1952] получены следующие соотношения для волны сильного разрыва:

$$C_s = C_p \sqrt{\epsilon(1 + \epsilon)} - C_p(\epsilon - \epsilon_0), \tag{6}$$

$$V^2 + C_s^2 = \frac{T}{\rho_0}(1 + \epsilon) = C_p^2 \epsilon(1 + \epsilon). \tag{7}$$

Из (6) и (7) также следует

$$\frac{V}{C_p} = \sqrt{2(\epsilon - \epsilon_0) \sqrt{\epsilon(1 + \epsilon)} - (\epsilon - \epsilon_0)^2}. \tag{8}$$

Здесь использованы все те же обозначения, что и в прошлых разделах. Данные соотношения описывают как свободную нить, так и нить при наличии предварительного натяжения. Однако непосредственно выразить из данных уравнений интересующие скорости затруднительно. В силу этого в классической теории рассматривается случай, когда начальное натяжение отсутствует: $\epsilon_0 = 0$, а деформация мала: $\epsilon \ll 1$.

В этом случае (8) принимает вид

$$\frac{V}{C_p} = \sqrt{2(\epsilon - \epsilon_0) \sqrt{\epsilon(1 + \epsilon)} - (\epsilon - \epsilon_0)^2} = \sqrt{2\epsilon \sqrt{\epsilon(1 + \epsilon)} - \epsilon^2} \approx \sqrt{2}\epsilon^{3/4}.$$

Откуда получается

$$\epsilon \approx \frac{\left(\frac{V}{C_p}\right)^{4/3}}{\sqrt[3]{4}}.$$

Аналогично, в силу принятых допущений, (6) принимает вид

$$C_s = C_p \sqrt{\epsilon(1 + \epsilon)} - C_p(\epsilon - \epsilon_0) = C_p \sqrt{\epsilon(1 + \epsilon)} - C_p \epsilon \approx C_p \sqrt{\epsilon}.$$

Из двух последних выражений следует классическое соотношение:

$$C_s \approx C_p \sqrt{\epsilon} \approx \frac{C_p \left(\frac{V}{C_p}\right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,8V^{2/3}C_p^{1/3}.$$

Данная формула для скорости поперечной волны верна только для постановки, в которой начальное натяжение отсутствует, а деформации малы.

Если присутствует произвольное начальное натяжение нити, то выделить малые члены в (6) и (8) затруднительно.

Очевидно, что можно выделить второй предельный случай — наличие начального натяжения, столь сильного, что достигаемые в ходе удара деформации в нити мало отличаются от предварительных. То есть $\epsilon \approx \epsilon_0$ и $\epsilon - \epsilon_0 \ll \epsilon_0$. Кроме того, сохраним предположение о малости деформаций ($\epsilon \ll 1$), так как для реальных волокон при деформации порядка единиц процентов уже происходит разрушение.

В этом предельном случае (6) принимает вид

$$C_s = C_p \sqrt{\epsilon(1 + \epsilon)} - C_p(\epsilon - \epsilon_0) \approx C_p \sqrt{\epsilon_0}. \quad (9)$$

Таким образом, скорость поперечной волны в этом режиме мало зависит от скорости ударника и определяется исключительно свойствами материала и начальной деформацией нити. Можно отметить сходство полученной формулы с аналогичными соотношениями для колебаний струны.

Результаты и обсуждение

В данной работе рассматривались постановки для двух типов нитей — Kevlar 29 и Spectra 1000. Ударное нагружение производилось массивным ударником с плоской лицевой поверхностью, скорость ударника — 130 м/с. Предварительное натяжение нитей составляло от 0 до 49,1 Н. Данные материалы нитей и параметры удара выбраны из-за того, что это позволяет выполнить прямое сравнение численных расчетов и аналитических оценок с данными экспериментальных исследований, представленными в работе [Field, Sun, 1991].

Параметры нитей двух видов представлены в таблице 1. Значения для динамических параметров материала взяты по данным работы [Field, Sun, 1991]. Для иных нитей получение динамических параметров является отдельной задачей.

На рис. 3 и 4 показаны формы нитей для Kevlar 29 у кромки ударника на начальном этапе взаимодействия. На рис. 3 приведена постановка для нити без предварительного натяжения, на рис. 4 — для сильного натяжения (49,1 Н, максимальное значение, для которого имеются

Таблица 1. Параметры нитей двух видов

Материал	Плотность, кг/м ³	Модуль Юнга, ГПа	Площадь сечения, м ²
Kevlar 29	1470	220	$6,38 \cdot 10^{-8}$
Spectra 1000	1000	310	$1,95 \cdot 10^{-8}$

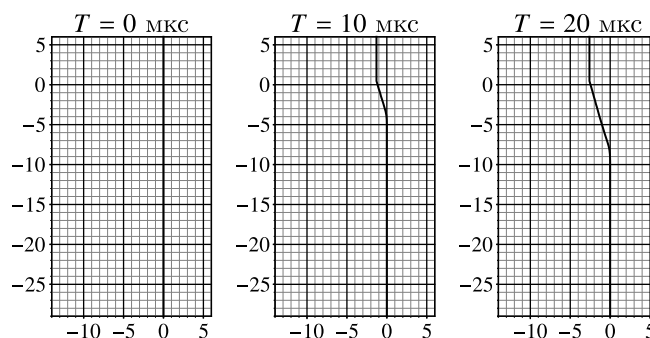


Рис. 3. Расчетная форма нити Kevlar 29 у кромки ударника. Нить без предварительного натяжения. По осям — пространственные координаты в миллиметрах. Край массивного ударника первоначально соприкасается с нитью в точке (0; 0), ударник движется влево

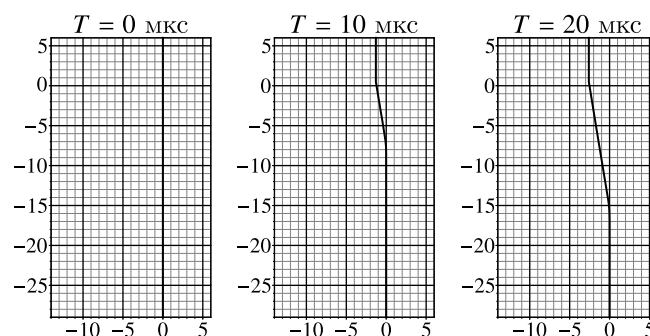


Рис. 4. Расчетная форма нити Kevlar 29 у кромки ударника. Нить с предварительным натяжением 49,1 Н. По осям — пространственные координаты в миллиметрах. Край массивного ударника первоначально соприкасается с нитью в точке (0; 0), ударник движется влево

экспериментальные данные). Кадры показывают нити в одинаковые моменты времени — начальное состояние, 10 и 20 мкс от момента касания нити ударником. Полученная из расчета форма нити на качественном уровне соответствует описанной в классической теории. Также очевидно, что скорость поперечной волны для натянутой нити оказывается значительно выше.

На рис. 5 и 6 приведены аналогичные графики для Spectra 1000. Принципиально наблюдаемые эффекты не отличаются от случая для Kevlar 29, но наблюдаемая скорость поперечной волны для Spectra 1000 выше, так как это более высокомодульное волокно.

Были выполнены расчеты для всех постановок, для которых имеются экспериментальные данные. Для Kevlar 29 результаты представлены в таблице 2 и на рис. 7. Для каждого уровня начального натяжения T_0 получены скорости поперечных волн. Указаны значения по данным экспериментов ($C_{s,exp}$ в таблице), расчетов ($C_{s,num}$ в таблице), оценок по классической формуле (1) ($C_{s,a1}$ в таблице, кривая «Аналитика 1» на графике), оценок по полученной формуле (9) ($C_{s,a2}$ в таблице, кривая «Аналитика 2» на графике). Также справочно указаны для каждой силы натяжения T_0 значения напряжений σ_0 и деформаций ϵ_0 .

Видно, что классическая формула (1), не учитывающая уровень предварительного натяжения, дает постоянную скорость поперечной волны, которая существенно отличается от на-

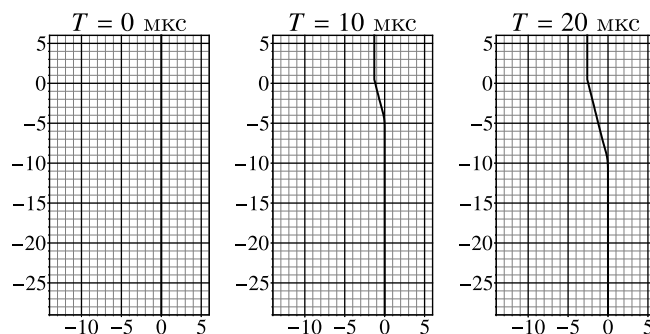


Рис. 5. Расчетная форма нити Spectra 1000 у кромки ударника. Нить без предварительного натяжения. По осям — пространственные координаты в миллиметрах. Край массивного ударника первоначально соприкасается с нитью в точке (0; 0), ударник движется влево

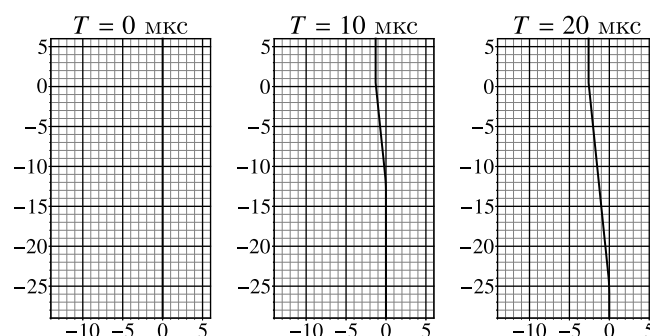


Рис. 6. Расчетная форма нити Spectra 1000 у кромки ударника. Нить с предварительным натяжением 29,4 Н. По осям — пространственные координаты в миллиметрах. Край массивного ударника первоначально соприкасается с нитью в точке (0; 0), ударник движется влево

Таблица 2. Скорость поперечной волны в Kevlar 29 для разного предварительного натяжения по данным экспериментов, расчетов, аналитических оценок

T_0 , Н	σ_0 , МПа	ϵ_0	$C_{s,exp}$, м/с	$C_{s,num}$, м/с	$C_{s,a1}$, м/с	$C_{s,a2}$, м/с
1,96	31	0,00014	470	450	473	145
2,94	46	0,00021	480	460	473	177
4,91	77	0,00035	495	475	473	229
9,81	150	0,00068	532	510	473	319
19,6	310	0,00141	603	590	4473	459
29,4	460	0,00209	672	650	473	559
49,1	770	0,00350	797	780	473	724

блюдаемых значений. Формула (9) с некоторой точностью воспроизводит асимптотику экспериментальных данных, но количественно результаты заметно отличаются. Численное решение совпадает с экспериментальными данными с хорошей точностью.

Аналогичные результаты для всех постановок для Spectra 1000 представлены в таблице 3 и на рис. 8. На качественном уровне наблюдаются те же эффекты, но можно заметить, что формула (9) для Spectra 1000 значительно лучше совпадает с экспериментами, чем для Kevlar 29. Это связано с тем, что волокна Spectra 1000 тоньше, поэтому одинаковая предварительная нагрузка для Spectra вызывает большие напряжения и деформации в нити, чем для Kevlar. Соответственно, предположения, в которых получена формула (9), оказываются выполнены с большей точностью.

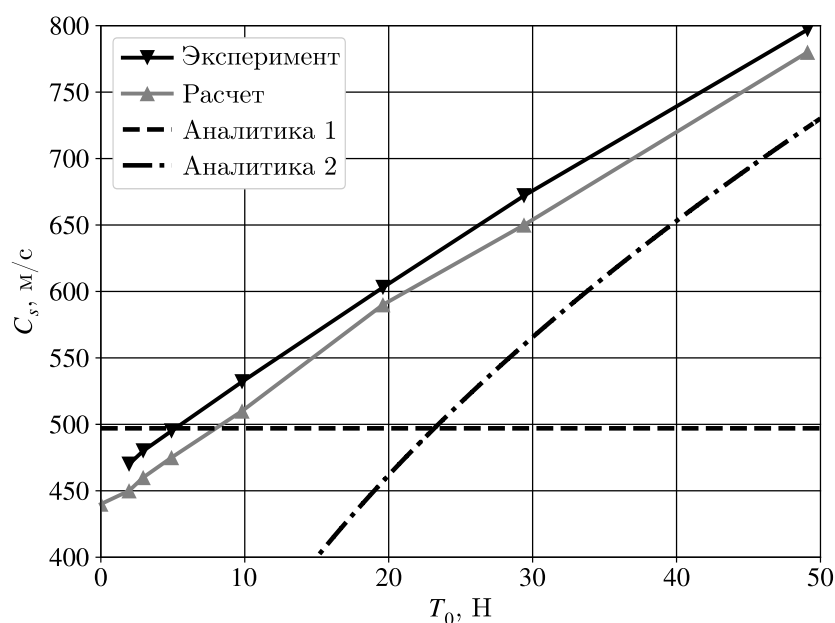


Рис. 7. Скорость поперечной волны в Kevlar 29 для разного предварительного натяжения по данным экспериментов, расчетов, аналитических оценок

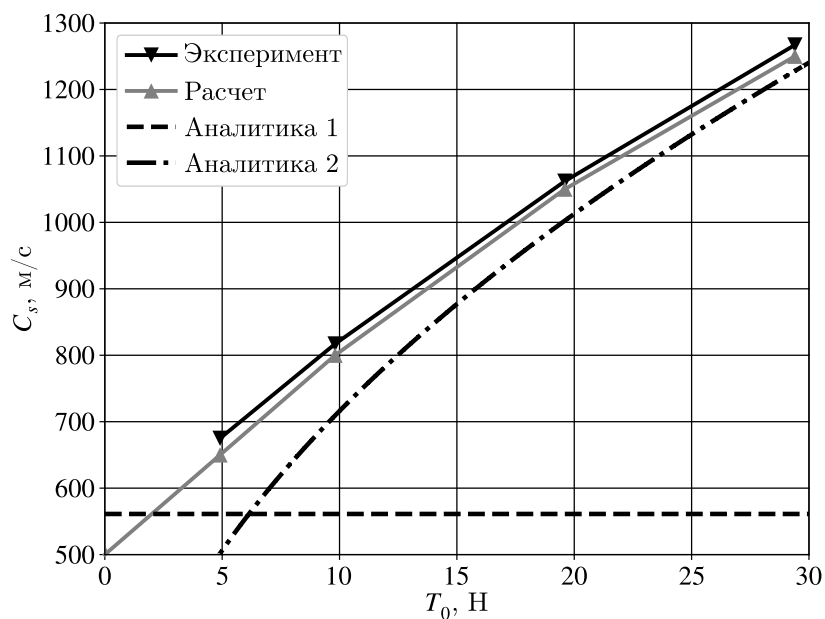


Рис. 8. Скорость поперечной волны в Spectra 1000 для разного предварительного натяжения по данным экспериментов, расчетов, аналитических оценок

Таблица 3. Скорость поперечной волны в Spectra 1000 для разного предварительного натяжения по данным экспериментов, расчетов, аналитических оценок

T_0 , Н	σ_0 , МПа	ϵ_0	$C_{s,exp}$, м/с	$C_{s,num}$, м/с	$C_{s,a1}$, м/с	$C_{s,a2}$, м/с
4,91	250	0,00081	675	650	561	501
9,81	500	0,00161	817	800	561	706
19,6	1010	0,00326	1062	1050	561	1005
29,4	1510	0,00487	1267	1250	561	1229

Заключение

В данной работе показано, что предварительная деформация существенно влияет на скорость поперечной волны в нити. Для рассмотренных постановок скорости в свободной и в нагруженной нити отличались практически в два раза. Таким образом, измерения, основанные на высокоскоростной съемке и анализе наблюдаемых поперечных волн, должны учитывать предварительную деформацию нити.

В работе предложено для натянутых нитей при оценке скорости поперечной волны использовать не только классическую формулу теории Рахматулина – Смита, но и ее аналог (9) для случая большой начальной деформации. На примере рассмотренных постановок для Kevlar 29 и Spectra 1000 показано, что данная формула может давать существенно лучшие результаты, чем классическое приближение. Также показано, что прямой численный расчет дает результаты, которые оказываются значительно ближе к экспериментальным данным, чем любая из рассмотренных аналитических оценок.

Следует отметить, что в параметрическом обеспечении данной задачи большой проблемой являются данные по динамическим модулям Юнга. Значения, полученные из статических испытаний, могут существенно отличаться от тех, которые материал проявляет при действии ударной нагрузки. Полученное в данной работе очень хорошее совпадение численных расчетов и экспериментальных данных основано на доступности динамических параметров для рассмотренных нитей. Для иных материалов получение динамических модулей является отдельной задачей. Однако данные параметры входят как в численный расчет, так и в аналитические оценки, поэтому все рассматриваемые подходы будут равно подвержены зависимости результата от качества параметрического обеспечения.

Список литературы (References)

- Рахматулин Х. А.* О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения // Прикладная математика и механика. — 1945. — Т. IX, № 6. — С. 449–462.
- Rakhmatulin H. A.* O kosom udare po gibkoj niti s bolshimi skorostiami pri nalichii trenija [Oblique Shock with a Great Velocity on a Flexible String in Presence of Friction] // Prikladnaya Matematika i Mekhanika. — 1945. — Vol. 9, No. 6. — P. 449–462 (in Russian).
- Рахматулин Х. А.* Об ударе по гибкой нити // Прикладная математика и механика. — 1947. — Т. XI, № 3. — С. 379–382.
- Rakhmatulin H. A.* Ob udare po gibkoj niti [On the Shock of a Flexible String] // Prikladnaya Matematika i Mekhanika. — 1947. — Vol. 11, No. 3. — P. 379–382 (in Russian).
- Рахматулин Х. А.* Поперечный удар по гибкой нити телом заданной формы // Прикладная математика и механика. — 1952. — Т. XVI, № 1. — С. 23–34.
- Rakhmatulin H. A.* Poperechnyj udar po gibkoj niti telom zadannoj formy [Transverse Shock of a Flexible String by a Body of a Given Shape] // Prikladnaya Matematika i Mekhanika. — 1952. — Vol. 16, No. 1. — P. 23–34 (in Russian).
- Bazhenov S. L., Dukhovskii I. A., Kovalev P. I., Rozhkov A. N.* The Fracture of SVM aramide fibers upon a high-velocity transverse impact // Polymer Science, Ser. A. — 2001. — Vol. 43, No. 1. — P. 61–71.
- Chocron S., Kirchdoerfer T., King N., Freitas C. J.* Modeling of fabric impact with high speed imaging and nickel-chromium wires validation // Journal of Applied Mechanics. — 2011. — Vol. 78, No. 5. — P. 051007-1.
- Field J. E., Sun Q.* A high speed photographic study of impact on fibres and woven fabrics // SPIE Proceedings: 19th International Congress on High-Speed Photography and Photonics. — 1991. — Vol. 1358. — P. 703–712.
- Smith J. C., Blandford J. M., Schiefer H. F.* Stress-strain relationships in yarns subjected to rapid impact loading. Part VI: Velocities of strain waves resulting from impact // Textile Research Journal. — 1960. — Vol. 30, No. 10. — P. 752–760.

-
- Smith J. C., McCrackin F. L., Schiefer H. F.* Stress-strain relationships in yarns subjected to rapid impact loading. Part V: Wave propagation in long textile yarns impacted transversely // *Textile Research Journal*. — 1958. — Vol. 28, No. 4. — P. 288–302.
- Sockalingam S., Chowdhury S. C., Gillespie J. W. Jr., Keefe M.* Recent advances in modeling and experiments of Kevlar ballistic fibrils, fibers, yarns and flexible woven textile fabrics — a review // *Textile Research Journal*. — 2017. — Vol. 87, No. 8. — P. 984–1010.
- Song B., Lu W.-Y.* Effect of twist on transverse impact response of ballistic fiber yarns // *International Journal of Impact Engineering*. — 2015. — Vol. 85. — P. 1–4.
- Vasyukov A. V., Elovenkova M. A., Petrov I. B.* Modeling a thin fiber deformation and destruction under a dynamic load // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2021. — Vol. 13, No. 1. — P. 60–65.
- Walker J. D., Chocron S.* Why impacted yarns break at lower speed than classical theory predicts // *Journal of Applied Mechanics*. — 2011. — Vol. 78, No. 5. — P. 051021-4.