

УДК: 539.3

## Мультирежимная модель и численный алгоритм расчета квазитрещин различного типа при циклическом нагружении

И. С. Никитин<sup>а</sup>, А. Д. Никитин

Институт автоматизации проектирования РАН,  
Россия, 123056, Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19/18

E-mail: <sup>а</sup> i\_nikitin@list.ru

*Получено 15.12.2021, после доработки – 14.01.2022.  
Принято к публикации 14.01.2022.*

На основе мультирежимной двухкритериальной модели усталостного разрушения предложен метод расчета зарождения и развития узких локализованных зон поврежденности в образцах и элементах конструкций для различных режимов циклического нагружения. Такие узкие зоны повреждаемости можно рассматривать как квазитрещины двух типов, соответствующих механизму нормального отрыва и сдвига. Проведена верификация модели путем численных экспериментов по воспроизведению левых и правых ветвей усталостных кривых для образцов из титановых и алюминиевых сплавов, построенных по испытаниям при различных условиях и схемах циклического нагружения. Приведены примеры моделирования развития квазитрещин двух типов (нормального отрыва и сдвига) при различных режимах циклического нагружения пластины с отверстием в качестве концентратора напряжений. При сложном напряженном состоянии в предлагаемой комплексной модели возможна естественная реализация любого из рассмотренных механизмов развития квазитрещин. Квазитрещины разных типов могут развиваться в разных частях образца, в том числе одновременно.

Ключевые слова: усталостное разрушение, многоцикловая усталость, сверхмногоцикловая усталость, мультирежимная модель, уравнение повреждаемости, критерий разрушения, квазитрещина

Работа выполнена в рамках государственного задания ИАП РАН.

UDC: 539.3

## Multi regime model and numerical algorithm for calculations on various types quasi crack developing under cyclic loading

I. S. Nikitin<sup>a</sup>, A. D. Nikitin

Institute for Computer Aided Design of the RAS,  
19/18 2-nd Brestskaya st., Moscow, 123056, Russia

E-mail: <sup>a</sup> i\_nikitin@list.ru

*Received 15.12.2021, after completion – 14.01.2022.*

*Accepted for publication 14.01.2022.*

A new method for calculating the initiation and development of narrow local damage zones in specimens and structural elements subjected to various modes cyclic loadings is proposed based on multi regime two criteria model of fatigue fracture. Such narrow zones of damage can be considered as quasi-cracks of two different types, corresponding to the mechanism of normal crack opening and shear.

Numerical simulations that are aimed to reproduce the left and right branches of the full fatigue curves for specimens made from titanium and aluminum alloy and to verify the model. These branches were constructed based on tests results obtained under various modes and cyclic loading schemes. Examples of modeling the development of quasi-cracks for two types (normal opening and shear) under different cyclic loading modes for a plate with a hole as a stress concentrator are given. Under a complex stress state in the proposed multi regime model, a natural implementation of any considered mechanisms for the quasi-cracks development is possible. Quasi-cracks of different types can develop in different parts of the specimen, including simultaneously.

Keywords: fatigue fracture, high cycle fatigue, very high cycle fatigue, multi regime model, damage equation, fracture criterion, quasi crack

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 873–885 (Russian).

The work was carried out under the state contract of the ICAD RAS.

## Введение

Теория повреждаемости в механике деформируемого твердого тела [Качанов, 1958; Работнов, 1959] использовалась многими авторами для описания квазистатических, динамических и циклических процессов разрушения (см., например, [Lemaître, 1994; Бураго, 2018; Marmi, 2009]). В [Nikitin, 2020; Никитин, 2020] была предложена мультирежимная модель развития усталостной повреждаемости, учитывающая бимодальный характер поведения усталостной кривой при циклическом нагружении.

Были приведены примеры расчета ряда модельных задач развития локализованных зон усталостной поврежденности (квазитрещин) в окрестности дефектов структуры материала для некоторых типов образцов в вычислительных экспериментах на одноосное циклическое растяжение-сжатие.

В [Nikitin, 2021] эта модель была расширена на случай двух различных механизмов микроповреждаемости материала — развития микротрещин нормального отрыва, микротрещин сдвига и, соответственно, рассмотрения двух типов развития макроскопической повреждаемости. Были рассмотрены примеры моделирования крутильного циклического нагружения экспериментального образца с возможностью развития квазитрещин того или иного типа. В этой обобщенной модели для нахождения коэффициентов предложенного кинетического уравнения для повреждаемости материала использовались известные многоосные критерии усталостного разрушения для однородного напряженного состояния [Carpinteri, 2011; Smith, 1970; Gates, 2016], отражающие тот или иной механизм развития микроповреждений.

В данной статье разработанные модели были применены и верифицированы при воспроизведении усталостных кривых для образцов из авиационных сплавов с дефектами, а также для моделирования развития квазитрещин двух типов (нормального отрыва и сдвига) при различных режимах циклического нагружения пластины с отверстием в качестве концентратора напряжений.

Данную работу можно рассматривать как развитие моделей и методов сквозного счета зарождения и развития множественных трещиноподобных зон повреждений (квазитрещин) разного типа при различных режимах циклического нагружения. Ранее подобная теория с использованием функции повреждаемости и основанный на ней алгоритм расчета применялись для моделирования задач разрушения при квазистатическом и динамическом нагружении [Бураго, 2018].

## Описание мультирежимной модели усталостного разрушения на основе теории повреждаемости

Опишем мультирежимную двухкритериальную модель развития усталостного разрушения, основанную на эволюционном по числу циклов уравнении для функции повреждаемости [Nikitin, 2020, 2021; Никитин, 2020]. В процесс повреждения материала и деградации его упругих свойств закладывается два механизма развития микротрещин — нормального отрыва или сдвига. Им соответствуют ассоциированные с моделью критерии многоосного усталостного разрушения при циклическом однородном нагружении. Усталостному разрушению при развитии поврежденности с микротрещинами нормального отрыва соответствует критерий Smith – Watson – Topper (SWT) [Smith, 1970; Gates, 2016], а усталостному разрушению при развитии поврежденности с микротрещинами сдвига соответствует критерий Carpinteri – Spagnoli – Vantadori (CSV) [Carpinteri, 2011].

Эти многоосные критерии получены обобщением закономерностей, установленных для одноосных циклических нагружений в виде аналитического выражения для классической ниспадающей ветви усталостной кривой Веллера S-N-типа. В [Burago, 2018] был предложен подход

для экстраполяции многоосных критериев разрушения, построенных для режима малоциклового (МЦУ) и многоциклового усталости (МНЦУ), на правые ветви усталостных кривых в режиме сверхмногоциклового усталости (СВМУ). Для экстраполяции критериев SWT и CSV на случай СВМУ был также использован этот аналитический подход.

Для выделения различных режимов усталостного разрушения используется схема мультирежимной (бимодальной) усталостной кривой с амплитудой  $\sigma_a$  при одноосном циклическом нагружении. Вплоть до значения  $N \sim 10^3$  реализуется режим повторно-статического нагружения с амплитудой, мало отличающейся от статического предела прочности  $\sigma_B$ . Далее левая часть бимодальной усталостной кривой (кривая Веллера) описывает режимы МЦУ–МНЦУ вплоть до  $N \sim 10^7$  и значений амплитуды порядка предела усталости  $\sigma_u$ . Сами эти режимы на левой ветви усталостной кривой отделяются величиной амплитуды нагружения, равной пределу текучести материала  $\sigma_T$ . Затем начинается зона смены механизмов разрушения и дальнейшее падение усталостной прочности, начиная с величин  $N \sim 10^8$ , до нового предельного значения  $\tilde{\sigma}_u$  в соответствии с правой ветвью бимодальной усталостной S-N-кривой. Эта ветвь описывает режим СВМУ [Burago, 2018].

Формулировка предложенной мультирежимной двухкритериальной модели развития повреждений при циклическом нагружении выглядит следующим образом [Nikitin, 2020, 2021; Никитин, 2020].

Кинетическое уравнение для функции повреждаемости материала  $\psi$  имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} = B(\sigma, \Delta\sigma) \frac{\psi^\gamma}{1 - \psi^{1-\gamma}}.$$

В результате развития процесса накопления повреждений и достижения значения  $\psi = 1$  при определенном числе циклов и уровне напряжений материал переходит в состояние полного разрушения и достигает соответствующей точки на бимодальной усталостной кривой.

Многоосный критерий усталостного разрушения для описания классической (левой) ветви усталостной кривой в режиме МЦУ–МНЦУ выглядит следующим образом:

$$\sigma_{eq} = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta_L}, \quad \sigma_L = 10^{3\beta_L}(\sigma_B - \sigma_u).$$

В этих формулах  $\sigma_B$  – статический предел прочности материала,  $\sigma_u$  – классический предел усталости материала при реверсивном цикле (коэффициент асимметрии цикла  $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1$ ).

С учетом подхода [Burago, 2018] для экстраполяции многоосных критериев разрушения на режим СВМУ путем замен  $\sigma_B \rightarrow \sigma_u$ ,  $\sigma_u \rightarrow \tilde{\sigma}_u$  многоосный критерий усталостного разрушения в режиме СВМУ имеет вид

$$\sigma_{eq} = \tilde{\sigma}_u + \sigma_V N^{-\beta_V}, \quad \sigma_V = 10^{8\beta_V}(\sigma_u - \tilde{\sigma}_u).$$

В этих формулах  $\sigma_{eq}$  – эквивалентное напряжение, обобщающее понятие амплитуды при одноосном циклическом нагружении на случай многоосного нагружения, для выбранного критерия усталостного разрушения, а  $\beta_L$  и  $\beta_V$  – показатели, характеризующие степень ниспадения левой и правой ветвей бимодальной усталостной кривой.

Интегрирование кинетического уравнения для повреждаемости до величины  $\psi = 1$ , соответствующей полному разрушению материальной частицы, дает значения коэффициента  $B$  [Nikitin, 2020, 2021; Никитин, 2020]:

при  $\sigma_u + \Delta\sigma_u < \sigma_{eq} < \sigma_B$  (режим МНЦУ,  $\Delta\sigma_u = 10^{-5\beta_L}(\sigma_B - \sigma_u)$ )

$$B = B_L = \frac{10^{-3}}{2(1-\gamma)} \left[ \frac{\langle \sigma_{eq} - \sigma_u \rangle}{\sigma_B - \sigma_u} \right]^{1/\beta_L},$$

при  $\tilde{\sigma}_u < \sigma_{eq} \leq \sigma_u + \Delta\sigma_u$  (режим СВМУ)

$$B = B_V = \frac{10^{-8}}{2(1-\gamma)} \left[ \frac{\langle \sigma_{eq} - \tilde{\sigma}_u \rangle}{\sigma_u - \tilde{\sigma}_u} \right]^{1/\beta_V},$$

при  $\sigma_{eq} \leq \tilde{\sigma}_u$  усталостного разрушения не происходит, при  $\sigma_{eq} \geq \sigma_B$  оно наступает мгновенно.

Здесь и далее приняты обозначения  $\langle f \rangle = fH(f)$ ,  $H(f)$  — функция Хэвисайда. Значение коэффициента  $0 < \gamma < 1$  определяется по результатам согласования расчетных и экспериментально построенных усталостных кривых. Выражения для эквивалентных напряжений  $\sigma_{eq}$  определяются выбранными критериями полного усталостного разрушения для двух типов повреждаемости, связанных с механизмами развития микротрещин нормального отрыва или сдвига.

Многоосный критерий SWT описывает усталостное разрушение с развитием повреждений в виде микротрещин нормального отрыва [Smith, 1970; Gates, 2016], в этом случае

$$\sigma_{eq} = \sigma^n = \sqrt{\frac{\langle \sigma_{1\max} \rangle \Delta\sigma_1}{2}},$$

где  $\sigma_{1\max}$  — максимальное значение главного (растягивающего) напряжения,  $\Delta\sigma_1$  — его размах в цикле нагружения.

Многоосный критерий CSV описывает усталостное разрушение с развитием повреждений в виде микротрещин сдвига [Carpinteri, 2011], в этом случае

$$\sigma_{eq} = \sigma^\tau = \sqrt{\left(\frac{\langle \Delta\sigma_n \rangle}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\Delta\tau_n}{2}\right)^2},$$

где  $\Delta\tau_n$  — размах касательного напряжения на площадке, где оно достигает максимального значения (критической площадке),  $\Delta\sigma_n$  — размах нормального напряжения на этой площадке.

Среди достаточно большого числа многоосных критериев усталостного разрушения (см., например, [Bugago, 2016]) критерии SWT и CSV и соответствующие им выражения для эквивалентных напряжений были выбраны по двум причинам.

Во-первых, эквивалентные напряжения не содержат дополнительных параметров, учитывающих влияние средних напряжений в цикле, для определения которых необходимо иметь усталостные кривые при нулевом коэффициенте асимметрии  $R = 0$ .

Во-вторых, для базовых испытаний на растяжение-сжатие при  $R = -1$  оба этих критерия дают естественный переход к амплитуде реверсивного цикла  $\sigma_a$ . Действительно, в этом случае при  $\sigma_a = \sigma_{1\max}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  для критерия SWT имеем

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{\langle \sigma_{1\max} \rangle \Delta\sigma_1}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma_{1\max} (2\sigma_{1\max})}{2}} = \sigma_a.$$

Аналогично: для критерия CSV с учетом, что при  $R = -1$ ,  $\Delta\tau_n = \frac{\sigma_{1\max} - \sigma_{3\max}}{2}$ ,  $\Delta\sigma_n = \frac{\sigma_{1\max} + \sigma_{3\max}}{2}$ , получим

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{\langle \Delta\sigma_n \rangle}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\Delta\tau_n}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{1\max}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_{1\max}}{2}\right)^2} = \sigma_a.$$

Предполагается, что начальное зарождение зоны повреждения в частице материала с ростом числа циклов нагружения, связанное с появлением отличного от нуля значения коэффициента  $B$  в кинетическом уравнении, определяет дальнейший тип повреждаемости в этой частице

по механизму развития микротрещин нормального отрыва, или по механизму развития микротрещин сдвига.

Развитие повреждаемости в материальной частице приводит к эффективному уменьшению модулей упругости, в общем случае — по нелинейному закону, а в предложенном варианте модели — по кусочно-линейному закону следующего вида:

деградация материала при  $\psi < \psi_*$  —

$$\lambda(\psi) = \lambda_0(1 - \kappa\psi), \quad \mu(\psi) = \mu_0(1 - \kappa\psi),$$

полное разрушение при  $\psi_* \leq \psi \leq 1$  —

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0.$$

Здесь  $\psi_* \leq 1$  — критическое значение повреждаемости, при котором наступает состояние полного разрушения (рис. 1).

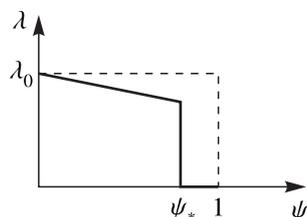


Рис. 1. Зависимость модуля упругости от повреждаемости

## Численный метод расчета повреждаемости

Численный метод расчета зон повреждаемости заключается в пошаговом (по циклам нагружения) расчете напряженного состояния образца материала или элемента конструкции, численного решения нелинейного уравнения для повреждаемости с последующей корректировкой модулей упругости среды в областях, где функция повреждаемости отлична от нуля. Такие области становятся дополнительными развивающимися концентраторами напряжений, а вытянутые локализованные зоны полного разрушения (если таковые возникают) в указанном выше смысле выделяются как квазитрещины. Выход квазитрещин на границы нагружаемого тела рассматривается как его окончательное макроразрушение.

Для интегрирования нелинейного уравнения для повреждаемости применялась аппроксимация функции  $\psi$  в  $k$ -узле расчетной сетки при заданных дискретных значениях  $\psi_k^n$  в моменты  $N^n$  и искомым значениях  $\psi_k^{n+1}$  в моменты  $N^{n+1}$ .

Вблизи состояния полного разрушения знаменатель правой части уравнения для повреждаемости становится малым, уравнение становится «жестким», и обычные явные методы его численного решения становятся непригодными.

С учетом этого обстоятельства схема аппроксимации нелинейного уравнения для повреждаемости

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} = \frac{B\psi^\gamma}{1 - \psi^{1-\gamma}}$$

построена на пошаговом аналитическом интегрировании кинетического уравнения при фиксированном напряженном состоянии с предыдущего шага расчета по циклам нагружения:

$$\left[ \frac{\psi^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\psi^{2(1-\gamma)}}{2(1-\gamma)} \right] \Big|_{\psi_k^n}^{\psi_k^{n+1}} = B^n N \Big|_{N^n}^{N^{n+1}},$$

где  $k$  — номер узла расчетной сетки,  $n$  — номер шага по числу циклов. Такой алгоритм соответствует явно- неявной схеме (явной по расчету поля напряжений и неявной по расчету функции повреждаемости).

Нелинейное алгебраическое уравнение для повреждаемости на верхнем слое по циклам нагружения примет вид

$$(\psi_k^{n+1})^{2(1-\gamma)} - 2(\psi_k^{n+1})^{1-\gamma} + 2(\psi_k^n)^{1-\gamma} - (\psi_k^n)^{2(1-\gamma)} + 2(1-\gamma)B^n \Delta N^n = 0.$$

Его аналитическое решение с учетом условия  $\psi_k^{n+1} < 1$  дает формулу для расчета функции повреждаемости на верхнем слое:

$$\psi_k^{n+1} = \left( 1 - \sqrt{\left(1 - (\psi_k^n)^{1-\gamma}\right)^2 - 2(1-\gamma)B^n \Delta N^n} \right)^{1/(1-\gamma)}.$$

Шаг расчета по числу циклов определяется следующим образом:

$$\Delta \tilde{N}_k^n = \frac{1}{B^n} \left[ \frac{\psi^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\psi^{2(1-\gamma)}}{2(1-\gamma)} \right] \Bigg|_{\psi_k^n}^1,$$

$$\Delta N^n = \min_k 0,5 \Delta \tilde{N}_k^n.$$

При численной реализации коэффициент Пуассона материала не меняется, а модуль упругости Юнга с ростом функции повреждаемости уменьшается по закону, в котором заложено его малое остаточное значение в состоянии полного разрушения, равное для определенности тысячной доле от начального значения:

$$E_k^{n+1} = E_0 (1 - \kappa \psi_k^{n+1}) (H(\psi_* - \psi_k^{n+1}) + 0,001).$$

Такой алгоритм позволяет вести сквозной расчет усталостного разрушения с образованием и распространением квазитрещин без их явного выделения и на фиксированной сетке.

Отметим существенные особенности и отличия постановок задач динамического разрушения в реальном времени и задач усталостного разрушения при нарастании числа циклов нагружения.

В моделях и постановках задач динамического разрушения на основе теории повреждаемости, ранее предложенных в работе [Бураго, 2018], численное решение заключается в расчете сеточного массива искомых функций (напряжений, скоростей упругой и пластической деформации, повреждаемости, «новых» модулей упругости) на новом временном слое при последовательном движении шагами по времени.

Алгоритм расчета кинетики усталостных квазитрещин при циклическом нагружении требует многократного (до 1000 раз) численного решения краевой задачи МДТТ (квазистатической для режима МЦУ–МНЦУ или задачи о стационарных колебаниях для режима СВМУ) для образца с деградирующими модулями упругости с шагами по циклам нагружения. Поэтому возникают высокие требования к скорости расчета неоднородной краевой задачи МДТТ на цикле нагружения.

Высокоэффективным инструментом для этой вычислительной процедуры является безматричный вариант метода конечных элементов [Бураго, 2016], реализованный в программном комплексе АСТРА. Поэтому упругие расчеты цикла нагружения выполнялись с помощью этого пакета программ. Пакет был дополнен кодом для расчета кинетики усталостной повреждаемости и изменения модулей упругости в соответствии с изложенным выше алгоритмом.

## Примеры расчетов

Для определения работоспособности предложенной модели и алгоритма расчета усталостного разрушения образца была проведена серия численных экспериментов по моделированию развития квазитрещин двух типов (нормального отрыва и сдвига) при различных режимах циклического нагружения.

Предполагается, что в численных примерах и в соответствующих им экспериментах напряжения не превышают предела текучести, поэтому можно ограничиться рассмотрением усталостной кривой в режиме МНЦУ или СВМУ, и, следовательно, задачу определения напряженного состояния в пределах цикла нагружения можно решать в упругой постановке.

Расчеты проводились для пластинки с центральным отверстием шириной  $a = 60$  мм, высотой  $h = 170$  мм, диаметр отверстия  $D = 30$  мм, толщина  $b = 1,75$  мм. Прикладывались вертикальные смещения (растяжение-сжатие) и/или горизонтальные (сдвиговые) к торцам образца. Во всех численных экспериментах коэффициент асимметрии циклического нагружения  $R = 0,5$ .

Материал пластины — титановый сплав с прочностными и усталостными параметрами  $\sigma_B = 1135$  МПа,  $\sigma_u = 330$  МПа,  $\beta = 0,31$ . Модуль упругости неповрежденного сплава  $\lambda_0 = 77$  ГПа,  $\mu_0 = 44$  ГПа.

Первый численный эксперимент проводился на чистом растяжении-сжатии. Амплитуда растяжения составляла 0,2 мм. Распределение эквивалентных напряжений до зарождения квазитрещины представлено на рис. 2, а; соответствующее количество циклов  $N = 1,1e5$ . Распределение эквивалентных напряжений и сформировавшаяся квазитрещина (светлые зоны сбоку от кругового отверстия) представлены на рис. 2, б. Тип квазитрещины отмечен стрелками, их направление указывает на развитие микротрещин нормального отрыва; соответствующее количество циклов  $N = 1,5e5$ .

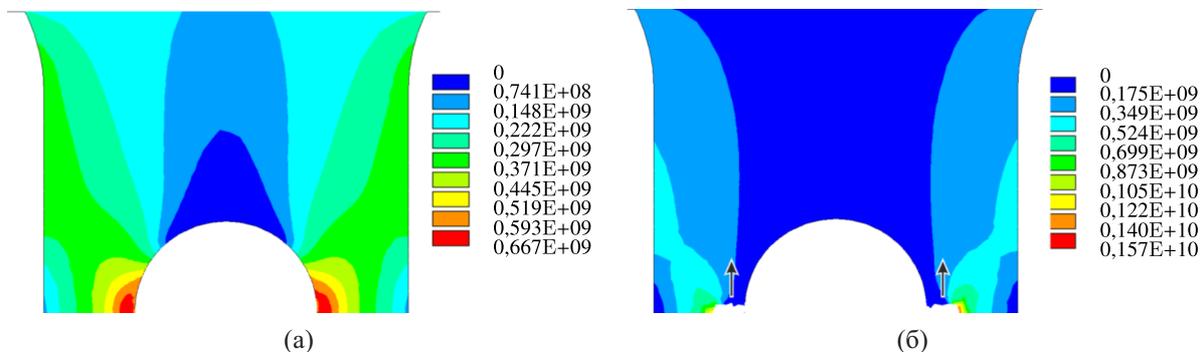


Рис. 2. Численный эксперимент на чистое растяжение (а) перед зарождением квазитрещины, (б) процесс роста квазитрещины

Второй численный эксперимент проводился при циклическом нагружении чистым сдвигом. Амплитуда сдвига составляла 0,5 мм. Распределение эквивалентных напряжений до зарождения квазитрещины представлено на рис. 3, а; соответствующее количество циклов  $N = 6,2e5$ . Распределение эквивалентных напряжений и квазитрещина представлены на рис. 3, б. И в этом случае квазитрещина выросла из-за развития микротрещин при нормальном напряжении, но в ином направлении под углом  $45^\circ$ ; соответствующее количество циклов  $N = 7,2e5$ .

Третий численный эксперимент включает сжатие и сдвиг. Амплитуда сжатия составляла 0,06 мм, а амплитуда сдвига — 0,5 мм. Распределение эквивалентных напряжений до зарождения квазитрещины представлено на рис. 4, а; соответствующее количество циклов  $N = 9,0e5$ . Распределение эквивалентных напряжений представлено на рис. 4, б. Видны две квазитрещины

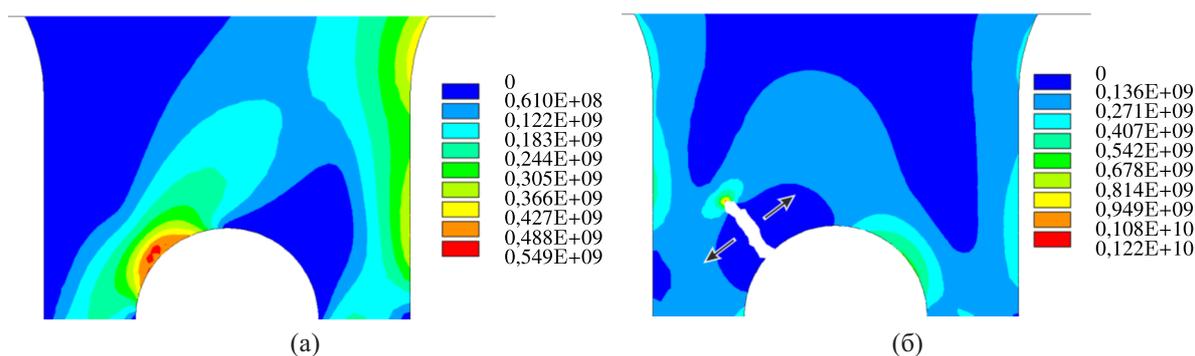


Рис. 3. Численный эксперимент на чистый сдвиг (а) перед зарождением квазитрещины, (б) процесс роста квазитрещины

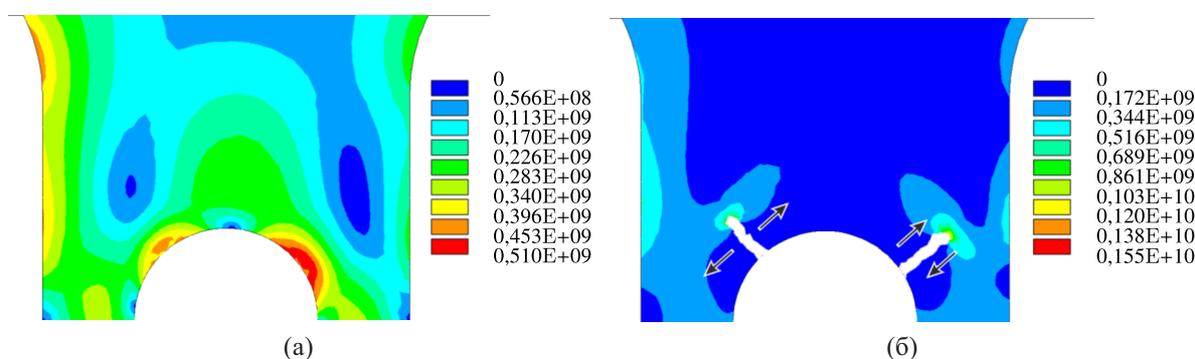


Рис. 4. Численный эксперимент на комбинированное сжатие и сдвиг (а) перед зарождением квазитрещины, (б) процесс роста квазитрещины

разных типов: левая выросла за счет развития микротрещин нормального отрыва, а правая — из микротрещин сдвига; соответствующее количество циклов  $N = 9,8e5$ .

Четвертый и последний численный эксперимент снова включает сжатие и сдвиг, но с другой амплитудой. Амплитуда сжатия составляла 0,1 мм, а амплитуда сдвига — 0,5 мм. Распределение эквивалентных напряжений до зарождения квазитрещины представлено на рис. 5, а; соответствующее количество циклов  $N = 3,2e5$ . Распределение эквивалентных напряжений и сформировавшаяся квазитрещина представлены на рис. 5, б. В этом случае комбинированного нагружения возникла только одна квазитрещина, и она выросла по механизму сдвига; соответствующее количество циклов  $N = 4,3e5$ .

Таким образом, с использованием мультирежимной модели повреждаемости показано, что наличие двух критериев, учитывающих разные режимы зарождения трещины, может приводить к случаям, когда один из критериев приводит к росту трещины, а другой — нет, и наоборот.

С целью сопоставления с результатами усталостных испытаний [Marmi, 2009] были проведены численные эксперименты по циклическому нагружению образца с V-образным надрезом. Образец имел ширину 15 мм без надреза, толщину 1,7 мм, глубину надреза 1,32 мм, угол V-образного надреза 60 градусов и радиус закругления надреза 0,675 мм. Циклическое нагружение верхней и нижней границ образца амплитудой 0,096 мм (режим МНЦУ) с развитием зон повреждения вплоть до макроскопического разрушения было смоделировано и сопоставлено с результатами работы [Marmi, 2009]. Материал пластины — титановый сплав с прочностными и усталостными параметрами  $\sigma_B = 1135$  МПа,  $\sigma_u = 330$  МПа,  $\beta = 0,31$ .

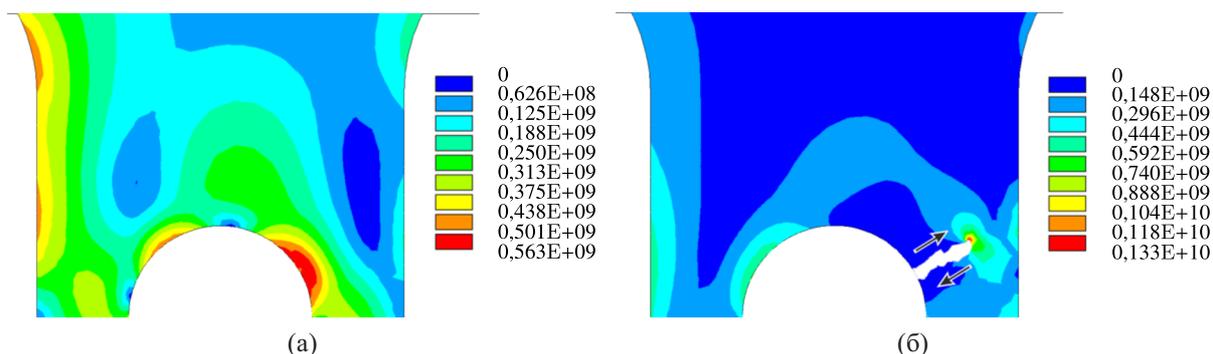


Рис. 5. Численный эксперимент на комбинированное сжатие и сдвиг (а) перед зарождением квазитрещины, (б) процесс роста квазитрещины

Модуль упругости неповрежденного сплава  $\lambda_0 = 77$  ГПа,  $\mu_0 = 44$  ГПа. На рис. 6 показаны линии уровня эквивалентных напряжений для образца с надрезом в двух состояниях — до зарождения усталостной квазитрещины и в момент, когда он прошел примерно половину пути до макроразрушения.

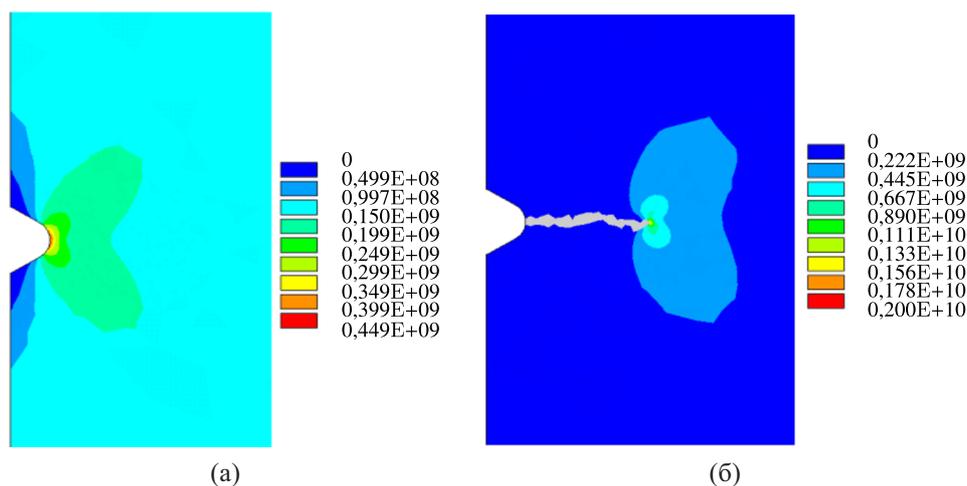


Рис. 6. Образец из титанового сплава с V-образным надрезом при  $R = -0,5$ : а) зарождение «квазитрещины»; б) рост «квазитрещины»

На рис. 7 представлены результаты реальных и вычислительных экспериментов по построению усталостных кривых для образцов с боковым надрезом. Кривые на рисунках аппроксимируют экспериментальные точки для образца с надрезом, коэффициент асимметрии цикла  $R = -0,5$  и  $0,1$ . Средние относительные ошибки на рис. 7, а и 7, б составляют 7% и 6% соответственно. Получено удовлетворительное количественное и качественное воспроизведение реальных усталостных экспериментов в режиме МНЦУ.

Для численного исследования развития трещиноподобных участков усталостного разрушения в режиме СВМУ было рассчитано циклическое нагружение образца из алюминиевого сплава с амплитудой вертикального смещения 0,1 мм. Соответствующие экспериментальные результаты взяты из [Perez-Mora, 2008]. Механические свойства алюминиевого сплава: плотность  $\rho = 2680$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 68$  ГПа, предел прочности  $\sigma_B = 288$  МПа, классический предел усталости  $\sigma_u = 130$  МПа, СВМУ предел усталости  $\tilde{\sigma}_u = 60$  МПа,  $\beta = 0,3$ .

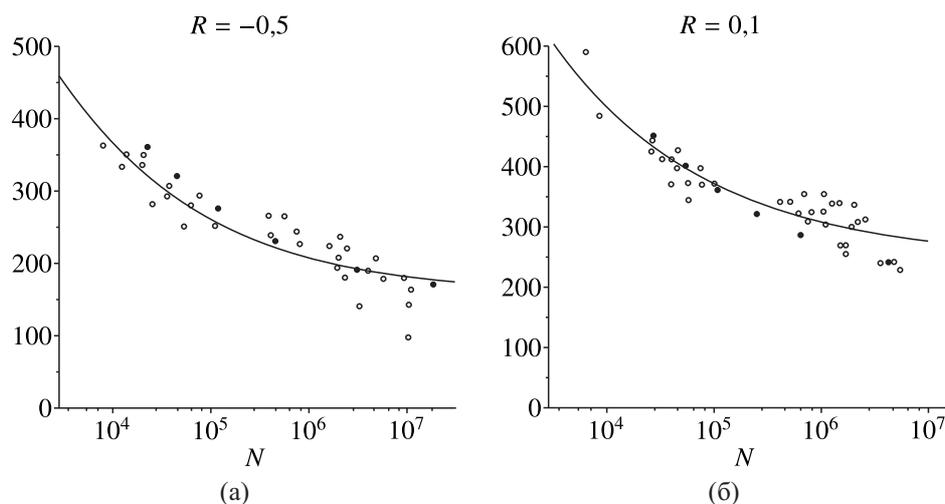


Рис. 7. Усталостные кривые для образца из титанового сплава с V-образным надрезом:  $\circ$  — реальные контрольные точки,  $\bullet$  — рассчитанные точки; а)  $R = -0,5$ ; б)  $R = 0,1$

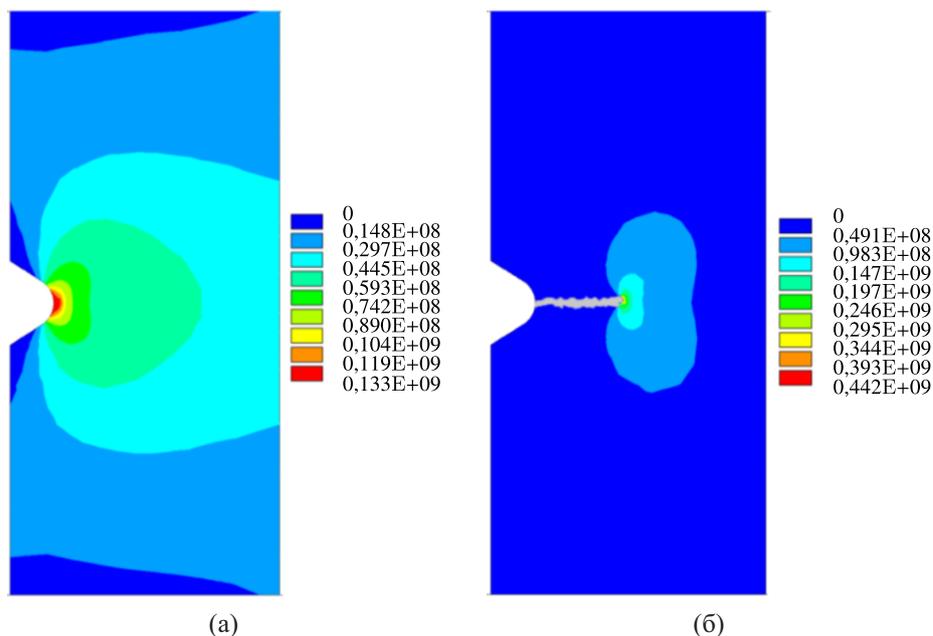


Рис. 8. Образец из алюминиевого сплава с V-образным надрезом при  $R = -1$ : а) зарождение «квazitрещины»; б) рост «квazitрещины»

В серии испытаний использовался образец с надрезом. В узкой части он имеет квазиплоскую форму шириной 6,18 мм и толщиной 3 мм. Надрез имел глубину 1 мм, радиус кривизны в вершине надреза 0,5 мм и угол раствора  $60^\circ$ .

На рис. 8 показаны результаты расчетов для режима СВМУ. Представлены линии уровня эквивалентных напряжений для образца с надрезом в двух состояниях — до зарождения усталостной квазитрещины и в момент, когда он прошел примерно половину пути до макроразрушения.

На рис. 9 представлены результаты реальных и вычислительных экспериментов по построению усталостных кривых для образцов с боковым надрезом. Кривые на рисунках аппроксимируют экспериментальные точки для образца с надрезом, коэффициент асимметрии цикла  $R = -1$  и  $R = 0,01$  в режиме СВМУ.

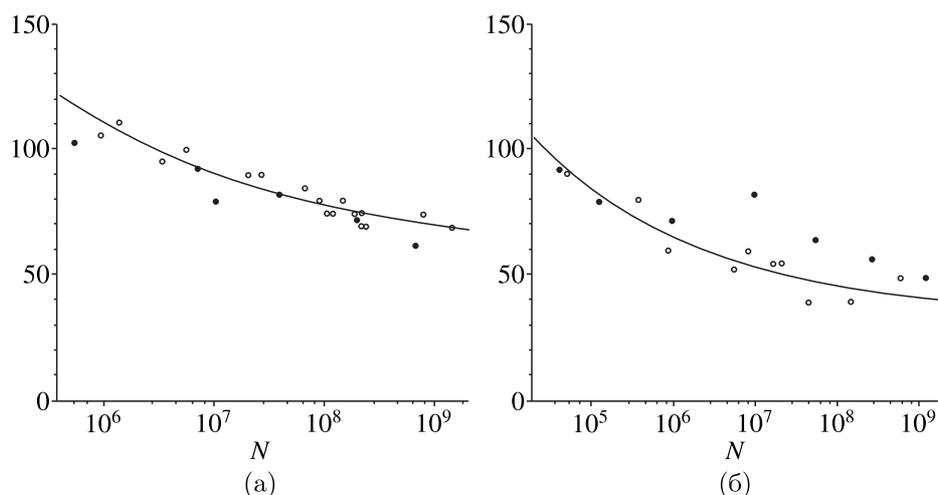


Рис. 9. Усталостные кривые для образца из алюминиевого сплава с V-образным надрезом:  $\circ$  — реальные контрольные точки,  $\bullet$  — рассчитанные точки; а)  $R = -1$ ; б)  $R = 0,01$

Во всех приведенных примерах расчетов для параметров кинетического уравнения повреждаемости были подобраны достаточно универсальные значения  $\kappa = 0,5$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $\psi_* = 0,98$ , при которых получено удовлетворительное качественное и количественное воспроизведение реальных усталостных кривых как в режиме МНЦУ, так и в режиме СВМУ.

В целом можно отметить, что численные результаты моделирования процесса зарождения и развития усталостных квазитрещин в различных режимах циклического нагружения свидетельствуют об работоспособности модели и алгоритма расчета.

Рассматриваемая модель представляет собой развитие модели повреждаемости при динамическом нагружении, представленной в [Бураго, 2018], на случай циклического нагружения и усталостного разрушения.

## Заключение

Предложена, развита и верифицирована мультирежимная двухкритериальная кинетическая модель развития повреждаемости при многоосном циклическом нагружении для описания развития процесса усталостного разрушения. Для определения коэффициентов кинетического уравнения повреждаемости использованы известные критерии многоосного усталостного разрушения SWT, в котором заложен механизм, связанный с развитием микротрещин нормального отрыва, и CSV, в котором заложен механизм, связанный с развитием микротрещин сдвига.

Приведены примеры численного решения задачи о циклическом нагружении плоской пластины с круговым отверстием (концентратором напряжений) путем растяжения-сжатия торцов, их сдвигового нагружения и комбинированного нагружения. Показано, что в зависимости от соотношения нормальных и касательных составляющих внешней циклической нагрузки естественным образом могут зарождаться и развиваться квазитрещины нормального отрыва или сдвига или и те, и другие одновременно.

## Список литературы (References)

- Бураго Н. Г., Никитин И. С. Алгоритмы сквозного счета для процессов разрушения // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 5. — С. 645–666.  
 Burago N. G., Nikitin I. S. Algoritmi skvoznogo scheta dlya processov razrusheniya [Algorithms of through calculation for damage processes] // Computer research and modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 5. — P. 645–666 (in Russian).

- Бурого Н. Г., Никитин И. С., Якушев В. Л.* Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток // ЖВММФ. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 1082–1092.
- Burago N. G., Nikitin I. S., Yakushev V. L.* Hybrid numerical method with adaptive overlapping meshes for solving nonstationary problems in continuum mechanics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56. — P. 1065–1074. (Original Russian paper: *Burago N. G., Nikitin I. S., Yakushev V. L.* Gibridniy chislennyi metod resheniya nestacionarnih zadach mekhaniki sploshnih sred s primeneniem adaptivnih nalozhennih setok // Zurnal vichislitelnoy matematiki i vichislitelnoy phisiki. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1082–1092.)
- Качанов Л. М.* О времени до разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. — 1958. — № 8. — С. 26–31.
- Kachanov L. M.* O vremeni do razrusheniya v usloviyakh polzuchesti [On the time to failure under creep conditions] // Izvestiya AN SSSR. OTN. — 1958. — No. 8. — P. 26–31 (in Russian).
- Никитин И. С., Никитин А. Д., Стратула Б. А.* Развитие повреждений при сверхмногоцикловой усталости // Вестник ПНИПУ. Механика. — 2020. — № 4. — С. 120–129.
- Nikitin I. S., Nikitin A. D., Stratula B. A.* Razvitie povrezhdeniy pri sverhmnogociklovoy ustalosti [Damage development under very-high-cycle fatigue regime] // PNRPU Mechanics Bulletin. — 2020. — No. 4. — P. 120–129 (in Russian).
- Работнов Ю. Н.* О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 5–7.
- Rabotnov Yu. N.* O mekhanizme dlitel'nogo razrusheniya [On the mechanism of long-term destruction] // Voprosy prochnosti materialov i konstruksii. — Moscow: Izdatelstvo AN SSSR, 1959. — P. 5–7 (in Russian).
- Burago N. G., Nikitin I. S.* Multiaxial fatigue criteria and durability of titanium compressor disks in low- and giga-cycle fatigue modes // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. — Heidelberg: Springer, 2016. — P. 117–130.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S.* Multiaxial assessment using a simplified critical plane based criterion // Int. J. of Fatigue. — 2011. — Vol. 33. — P. 969–976.
- Gates N., Fatemi A.* Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects // Int. J. of fatigue. — 2016. — Vol. 91. — P. 337–351.
- Lemaitre J., Chaboche J. L.* Mechanics of solid materials. — Cambridge University Press, 1994. — 582 p.
- Marmi A. K., Habraken A. M., Duchene L.* Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // Int. J. of fatigue. — 2009. — Vol. 31. — P. 2031–2040.
- Nikitin I. S., Burago N. G., Zhuravlev A. B., Nikitin A. D.* Multimode model for fatigue damage development // Mechanics of Solids. — 2020. — Vol. 55, No. 8. — P. 298–306.
- Nikitin I. S., Nikitin A. D., Stratula B. A.* Study on the resonant torsion vibration in hourglass specimens under VHCF loading // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1945, No. 1. — P. 012043.
- Perez-Mora R.* Study of the fatigue strength in the gigacycle regime of metallic alloys used in the aeronautics and off-shore industries. — Thèse de doctorate Mécanique. — 2008.
- Smith R. N., Watson P., Topper T. H.* A stress-strain parameter for the fatigue of metals // J. of Materials. — 1970. — Vol. 5, No. 4. — P. 767–778.