

УДК: 519.6, 532.5

Математические и вычислительные проблемы, связанные с образованием структур в сложных системах

В. Б. Бетелин¹, В. А. Галкин^{1,2,3,a}

¹Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,
Россия, 117218, Москва, Нахимовский просп., 36, корп. 1

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тюменский индустриальный университет»,
Россия, 625000, Тюмень, ул. Володарского, 38

³Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры
«Сургутский государственный университет»,
Россия, 628412, Ханты-Мансийский автономный округ – Югра, Сургут, пр. Ленина, д. 1

E-mail: ^a val-gal@yandex.ru

Получено 15.12.2021, после доработки — 18.01.2022.

Принято к публикации 01.03.2022.

В данной работе рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики (МГД). Найденные точные решения описывают течения жидкости в пористой среде и связаны с вопросами разработки ячеистого симулятора и задачами управления параметрами несжимаемой жидкости и направлены на создание отечественной технологии «цифровое месторождение». Центральной проблемой, связанной с использованием вычислительной техники, являются сеточные аппроксимации большой размерности и суперЭВМ высокой производительности с большим числом параллельно работающих микропроцессоров. В качестве возможной альтернативы сеточным аппроксимациям большой размерности разрабатываются кинетические методы решения дифференциальных уравнений и методы «склейки» точных решений на грубых сетках. Сравнительный анализ эффективности вычислительных систем позволяет сделать вывод о необходимости развития организации вычислений, основанных на целочисленной арифметике в сочетании с универсальными приближенными методами. Предложен класс точных решений системы Навье–Стокса, описывающий трехмерные течения для несжимаемой жидкости, а также точные решения нестационарной трехмерной магнитной гидродинамики. Эти решения важны для практических задач управляемой динамики минерализованных флюидов, а также для создания библиотек тестов для верификации приближенных методов. Выделены ряд явлений, связанных с образованием макроскопических структур за счет высокой интенсивности взаимодействия элементов пространственно однородных систем, а также их возникновение за счет линейного пространственного переноса в пространственно-неоднородных системах. Принципиальным является то, что возникновение структур — это следствие разрывности операторов в нормах законов сохранения. Наиболее разработанной и универсальной является теория вычислительных методов для линейных задач. Поэтому с этой точки зрения важными являются процедуры «погружения» нелинейных задач в общие классы линейных за счет изменения исходной размерности описания и расширения функциональных пространств. Отождествление функциональных решений с функциями позволяет вычислять интегральные средние неизвестной, но в то же время ее нелинейные суперпозиции, вообще говоря, не являются слабыми пределами нелинейных суперпозиций приближений метода, т. е. существуют функциональные решения, которые не являются обобщенными в смысле С. Л. Соболева.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, точные решения, вычислительные методы малой размерности

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 20-04-60123.

© 2022 Владимир Борисович Бетелин, Валерий Алексеевич Галкин
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 519.6, 532.5

Mathematical and computational problems associated with the formation of structures in complex systems

V. B. Betelin¹, V. A. Galkin^{1,2,3,a}

¹Federal State Institution «Scientific Research Institute for System Analysis
of the Russian Academy of Sciences»,
36, bld. 1, Nakhimovsky prospect, Moscow, 117218, Russia

²Industrial University of Tyumen,
38 Volodarskogo st., Tyumen, 625000, Russia

³Surgut State University,
1 Lenin ave., Surgut, 628412, Russia

E-mail: ^a val-gal@yandex.ru

Received 15.12.2021, after completion — 18.01.2022.

Accepted for publication 01.03.2022.

In this paper, the system of equations of magnetic hydrodynamics (MHD) is considered. The exact solutions found describe fluid flows in a porous medium and are related to the development of a core simulator and are aimed at creating a domestic technology «digital deposit» and the tasks of controlling the parameters of incompressible fluid. The central problem associated with the use of computer technology is large-dimensional grid approximations and high-performance supercomputers with a large number of parallel microprocessors. Kinetic methods for solving differential equations and methods for «gluing» exact solutions on coarse grids are being developed as possible alternatives to large-dimensional grid approximations. A comparative analysis of the efficiency of computing systems allows us to conclude that it is necessary to develop the organization of calculations based on integer arithmetic in combination with universal approximate methods. A class of exact solutions of the Navier–Stokes system is proposed, describing three-dimensional flows for an incompressible fluid, as well as exact solutions of nonstationary three-dimensional magnetic hydrodynamics. These solutions are important for practical problems of controlled dynamics of mineralized fluids, as well as for creating test libraries for verification of approximate methods. A number of phenomena associated with the formation of macroscopic structures due to the high intensity of interaction of elements of spatially homogeneous systems, as well as their occurrence due to linear spatial transfer in spatially inhomogeneous systems, are highlighted. It is fundamental that the emergence of structures is a consequence of the discontinuity of operators in the norms of conservation laws. The most developed and universal is the theory of computational methods for linear problems. Therefore, from this point of view, the procedures of «immersion» of nonlinear problems into general linear classes by changing the initial dimension of the description and expanding the functional spaces are important. Identification of functional solutions with functions makes it possible to calculate integral averages of an unknown, but at the same time its nonlinear superpositions, generally speaking, are not weak limits of nonlinear superpositions of approximations of the method, i. e. there are functional solutions that are not generalized in the sense of S. L. Sobolev.

Keywords: magnetohydrodynamics, exact solutions, computational methods of small dimension

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 805–815 (Russian).

The work was supported by RFBR grant 20-04-60123.

Последние двадцать пять лет по показателю «производительность/стоимость» лидировали и лидируют в настоящее время суперЭВМ на основе коммуникационной сети параллельно работающих массовых коммерческих микропроцессоров таких зарубежных компаний, как INTEL, AMD и др. [Betelin, Galkin, 2019]. Все эти годы в экономических условиях России именно это обстоятельство являлось и является решающим при выборе и приобретении суперкомпьютера для использования и в науке, и в образовании, и в промышленности, и в бизнесе. Поскольку российской альтернативы массовым коммерческим продуктам INTEL и AMD не было и нет, то практически все отечественные суперЭВМ создавались и создаются на основе этих зарубежных продуктов. Основная проблема, которую решали все эти годы и решают в настоящее время российские пользователи этих суперЭВМ, — разработка, по сути дела, импортозависимых суперкомпьютерных технологий, включающих методы, алгоритмы и программы, обеспечивающих максимальную загрузку при параллельной работе все возрастающего числа массовых коммерческих микропроцессоров INTEL, AMD, а последние годы и NVIDIA, при решении практических задач.

Центральной проблемой, определяющей типовые характеристики применяемой вычислительной техники, связанной с объемом вычислительной работы, является способ получения результата в заданной точке области вычислений. Применение сеточных методов связано с необходимостью постоянной обработки и хранения массивов данных, определяемых количеством элементов сетки, что прямо пропорционально производительности вычислительной системы, необходимой для достижения цели за заданное время. Собственно говоря, размерность систем линейных алгебраических уравнений, порожденных сеткой, и временные рамки их решения определяют растущие требования в гонке роста производительности ЭВМ. В частности, источниками задач такого уровня сложности служат модели порового пространства в нефтегазовой промышленности, газовая и гидродинамика, физическая кинетика [Betelin, Galkin, 2019].

Это одна из основных причин того, что разрабатываемые в нашей стране и за рубежом технологии моделирования сложных физических процессов существенно основываются на использовании сеточных аппроксимаций большой размерности и суперЭВМ высокой производительности с большим числом параллельно работающих микропроцессоров. Например, гидродинамическое моделирование месторождения с 1000 скважинами требует сетки с размерностью порядка 1,5 млрд ячеек и суперЭВМ с производительностью более 0,5 Пфлопс.

Важнейшей задачей математического моделирования в нефтегазовом секторе ТЭК является повышение коэффициента извлечения нефти (КИН) из матрицы нефтесодержащей породы, представляющей собой пористую среду, в микроструктуре которой содержатся флюиды различной природы. В связи с этой высокотехнологичной задачей возникает проблема управления динамикой нефтесодержащих флюидов в пористой среде. Создание реальных моделей месторождений затруднено без глубокого и детального изучения фильтрационно-емкостных свойств материала матрицы, в том числе его основного параметра — размера порового пространства, его топологической связности на реальных масштабах залежи.

В течении многофазных жидкостей типичным является образование локальных зон — структур, заполненных жидкостью одной фазы. Это явление специфично для выдавливания нефти посредством воды или газа. Причиной служит существенное различие коэффициентов вязкости жидкостей. Обычно вода и газ обтекают целики нефти, которые остаются неподвижными в матрице среды. Одним из способов выделения структур служит возникновение пространственно-временных областей, в которых макроскопические параметры состояния системы приобретают сингулярности, *a priori* не включенные в язык описания системы. В этом случае имеет место неполнота языка математической модели, приводящая к понятиям обобщенных решений и требующая уточнения постановки исходной задачи. По существу, это зачастую означает отсутствие корректности рассматриваемых задач в исходной постановке.

Масштабы вычислительной трудоемкости требуют для решения реальных задач моделирования течения в $\sim 10^{18}$ каналах.

Традиционные подходы к решению таких задач опираются на сеточные, проекционные методы, которые весьма затратны с точки зрения их реализации с помощью вычислительной техники. В конечном счете гонку в этой области деятельности определяет размерность вычислительных сеток, что неумолимо диктует гонку в области суперкомпьютерных технологий. При этом возможность верификации проектных расчетов крайне ограничена и вызывает существенные сомнения в их применимости в широком диапазоне параметров течения.

Выделим ряд важных задач математической физики и математического моделирования, которые оказывают существенное влияние на разработку и построение современных вычислительных методов. Это следует подчеркнуть в связи с их востребованностью во многих промышленных проектах, и прежде всего — в реализации крупномасштабных программ ТЭК.

Рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики (МГД) [Betelin, Galkin, 2019; Galkin, 2013], описывающая течение вязкой проводящей жидкости в области с учетом наличия примесей в области $\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)\} \subset D, t > 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{H}] + \mu_m \Delta \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left(p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) n = \chi \Delta n, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \nu \Delta T, \quad (4)$$

где $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{u}$ — вектор скорости жидкости, t — время, μ_m — магнитная вязкость жидкости, ρ_0 — плотность жидкости, p — давление, T — температура, μ — кинематическая вязкость, n — концентрация примесей в жидкости, χ — коэффициент диффузии, ν — коэффициент теплопроводности. Все коэффициенты предполагаются положительными. Отметим, что поле давления p определяется из уравнений (1)–(4) с точностью до произвольной функции времени.

Система МГД (1)–(4) переходит в систему уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в случае $\mathbf{H} \equiv 0$. Для практических задач важен случай течения несжимаемой жидкости в открытой пространственной области $\{x\} \in D(t) \subset \mathbb{R}_n$ с меняющейся во времени t границей $\partial D(t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho_0^{-1} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \text{div}(\mu \text{grad } u_i) + \rho_0^{-1} F_i, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in D(t). \quad (5)$$

Условие несжимаемости жидкости предполагает неизменность объема области $D(t)$. Предполагается, что в указанной области жидкость имеет постоянную плотность $\rho_0 > 0$.

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в открытой пространственной области $\{x\} \in D(t) \subset \mathbb{R}_n$ с границей $\partial D(t)$. В указанной области динамика жидкости задается полем скоростей $\mathbf{u} = \{u_i(\mathbf{x}, t)\}_1^n$ и давлением $p(\mathbf{x}, t)$, которые подчиняются уравнениям Навье–Стокса (5), где $\mu = \eta\rho_0^{-1}$ — кинематическая вязкость жидкости, η — динамическая вязкость, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \{F_i\}_1^n$ — плотность объемных сил. Ниже рассматривается случай, когда $\mu = \text{const} \geq 0$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, $\rho_0 \equiv 1$. Задачи управления течением жидкости особую актуальность приобретают в связи с необходимостью создания технологии «цифровое месторождение».

Одним из важнейших вопросов построения ячеистого симулятора является получение точной динамики несжимаемой жидкости в пористой среде.

Рассмотрим простейшую модель пористой среды, состоящей из дискретного набора точек — препятствий в матрице порового пространства $\partial D(t) \subset \mathbb{R}_n$. В этом случае область течения $D(t) \equiv \mathbb{R}_n \setminus \partial D(t)$. На препятствиях $\partial D(t)$, составляющих границу области течения, потребуем выполнение условия прилипания

$$\mathbf{u}|_{\partial D(t)} = 0. \quad (6)$$

Для построения точных решений системы (5) с условиями прилипания (6) используем нетривиальные точные решения $(\mathbf{V}, \Phi)$ задачи

$$[\mathbf{V}, \operatorname{rot} \mathbf{V}] = \nabla \Phi, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (7)$$

где отысканию подлежат гладкий потенциал Φ и векторное поле $\mathbf{V}$ на $D(t)$.

Рассмотрим пример точного решения для модели пористой среды с условиями прилипания на препятствиях. 3D-течение осуществляется между препятствиями $\partial D = \pi \times \mathbb{Z}_3 + 0,25(\pi, \pi, \pi)$ в пространстве $\mathbb{R}_3 \setminus \partial D$. Соответствующее точное решение задачи для системы уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости (5), (6) в этой области имеет вид

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} \sin(x_2) - \cos(x_3) \\ \sin(x_3) - \cos(x_1) \\ \sin(x_1) - \cos(x_2) \end{pmatrix} \exp(-\mu t), \quad p(x, t) = -\frac{1}{2}(u, u).$$

На рис. 1 изображены линии тока в окрестности точки прилипания, где давление равно нулю.

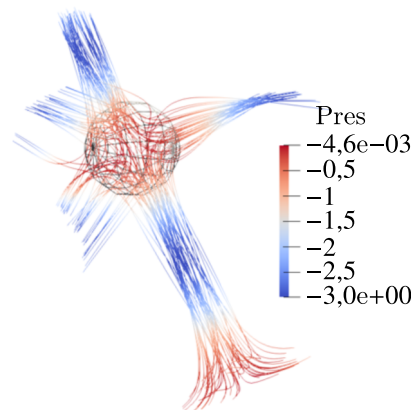


Рис. 1. Линии тока, проходящие через сферу радиусом 1 с центром в точке $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\pi}{4}$

Этот пример точного решения описывает чисто вихревые течения.

В следующем примере, визуализация которого приведена на рис. 2, рассматривается интересный класс точных решений системы Навье–Стокса (5), описывающий трехмерные слоистые течения. Нитевидные препятствия течению, напоминающие по своей структуре «лес» или «маску», расположены с периодом $\lambda > 0$ ортогонально к плоскости $x_3 = 0$, вдоль которой слоистым образом течет несжимаемая жидкость. Предполагается, что на препятствиях выполнены условия прилипания (6). Семейство точных решений системы уравнений Навье–Стокса (5), (6) в этом случае имеет следующий вид:

$$\mathbf{u} = \exp\left((\varepsilon^2 - \lambda^2)\mu t\right) \begin{pmatrix} \exp(\varepsilon x_3) \sin \lambda x_2 \\ \exp(-\varepsilon x_3) \sin \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$p = \exp\left(2\mu t(\varepsilon^2 - \lambda^2)\right) \cos(\lambda x_1) \cos(\lambda x_2).$$

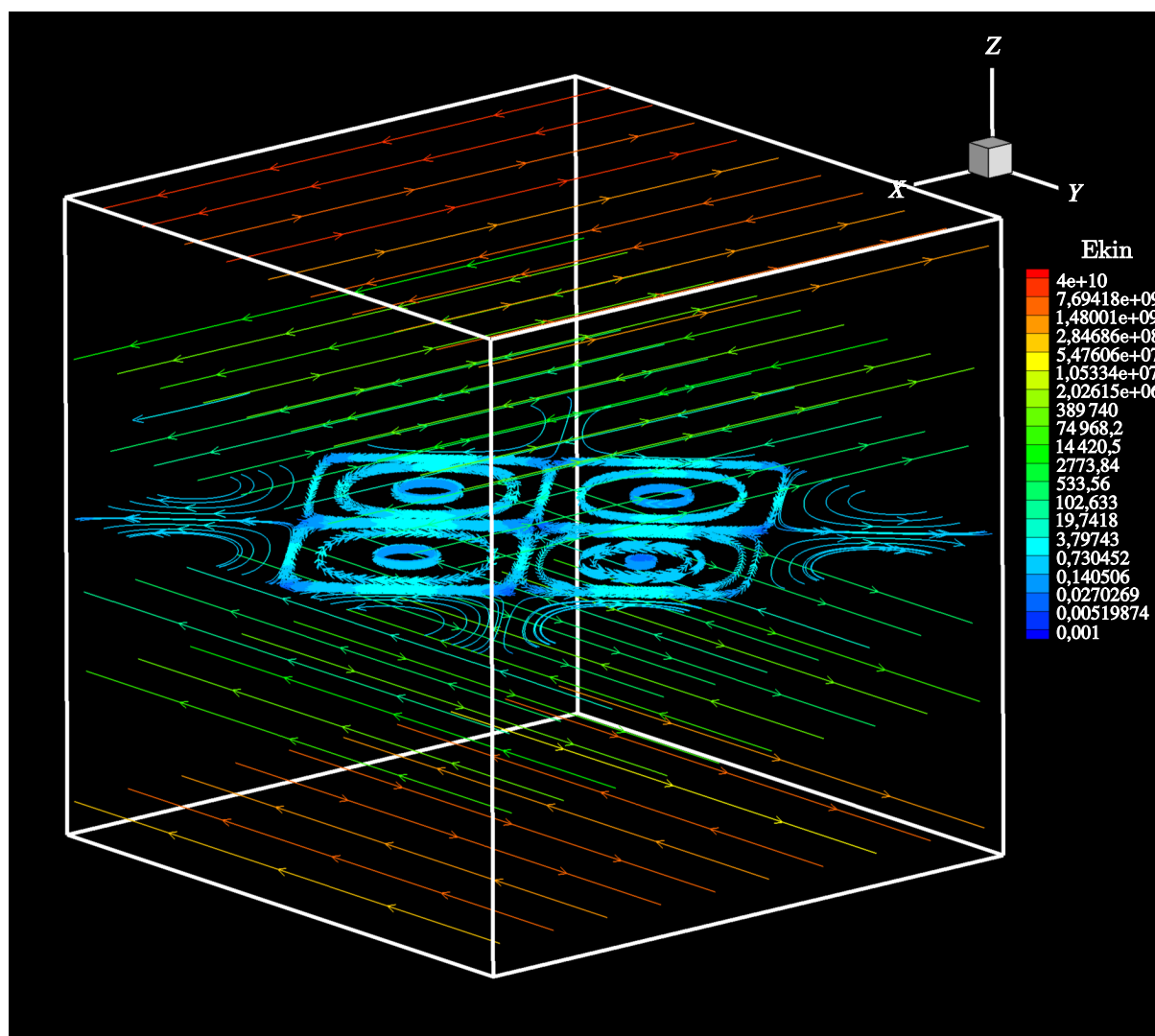


Рис. 2. Пример визуализации точного решения уравнений трехмерной гидродинамики в пористой среде, состоящей из нитевидного «леса» вертикальных препятствий

Как правило, технология вычислений в промышленных задачах существенно опирается на подгоночные параметры, специфические для конкретной установки. Поэтому весьма важно иметь точно решаемые задачи уравнений гидродинамики, позволяющие сделать квалифицированное заключение о работоспособности вычислительных комплексов, возможности переноса результатов моделирования на конструкции с принципиально различными параметрами.

В ряде проектов расчет позволяет обсуждать только один объект, для которого выполнена настройка расчетных параметров. Поэтому огромное значение имеет библиотека точных нестационарных решений уравнений гидродинамики в условиях сложной геометрии. Более того, эта библиотека может служить основой малоразмерных кусочных аппроксимаций течений аналогично сплайнам, позволяя существенно снизить вычислительную нагрузку за счет использования грубых сеток с прецизионными решениями в межсеточном пространстве.

Прогресс в этих технологиях в настоящее время связывается только с увеличением размерности сеточных аппроксимаций и, как следствие, с ростом требований к производительности, а значит, стоимости суперЭВМ. В конечном счете это приводит к увеличению числа параллельно работающих микропроцессоров и их производительности. Поскольку производительность мик-

ропроцессора в основном определяется технологическим уровнем его производства, то, по сути дела, в настоящее время прогресс в вычислительных технологиях на основе сеточных аппроксимаций большой размерности определяется прогрессом в области микроэлектронных технологий. Отставание в микроэлектронных технологиях влечет за собой отставание в технологиях моделирования на основе сеточных аппроксимаций большой размерности.

Аналогичные по масштабу сложности проблемы связаны с моделированием динамики крови в кровеносных сосудах человека. Математически классы упомянутых задач характеризуются существенно нелинейной динамикой на крайне сложно устроенном многообразии. В связи с этим представляется важным выработать подходы, альтернативные сеточным аппроксимациям, основываясь на идее построения алгоритмов, в которых нелинейная динамика реализуется в виде проекции (информационного сжатия) посредством усреднения данных простой динамики в окрестности заданной точки расчетной области. Следует подчеркнуть, что данная точка выбирается произвольно в зависимости от потребностей вычислителя.

Общий класс таких методов назовем несеточными методами, чтобы подчеркнуть отличие от сеточных методов, связанных с построением приближений на основе замены производных конечными разностями, либо проекциями на некоторое функциональное пространство, например, на основе построения сплайнов, конечных элементов, контрольных объемов, или средних значений истории блужданий по заданной сетке на основе случайных розыгрышей по схеме Монте-Карло и т. п.

В частности, реализация упомянутых подходов, основанных на сочетании точных решений задач гидродинамики, магнитной гидродинамики и физической кинетики на сложных многообразиях, позволяет выявить тонкую структуру трехмерных течений, интерпретация которой стандартными средствами компьютерной визуализации представляется весьма затруднительной из-за крайней сложности их структуры (см. [Бетелин, Галкин, Дубовик, 2020]). Для практических задач управляемой динамики минерализованных флюидов существенно построение точных решений для задач, основанных на системе МГД с учетом динамики примесей в потоке. При этом важно иметь примеры точных решений, позволяющих провести надежную верификацию применяемых приближенных методов и служить надежной основой для построения аппроксимаций малой размерности на грубых сетках. Простое наращивание размерности вычислительных сеток — это крайне затратный путь, имеющий вполне ясные физические ограничения.

Структура довольно нерегулярного точного 3D-решения системы МГД (1)–(4) на шаре (аналогично течению в пористой среде на рис. 1 в случае уравнений Навье – Стокса) приведена на рис. 3.

Точные решения системы МГД, визуализация которых приведена на рис. 1–3, могут служить структурными единицами для построения нового класса алгоритмов малой сеточной размерности [Бетелин, Галкин, 2021].

Сравнительный анализ эффективности вычислительных систем позволяет сделать вывод о необходимости развития организации вычислений, основанных на целочисленной арифметике в сочетании с универсальными приближенными методами [Galkin, 2013].

Описание глобальных структур в пористой среде связано с решениями кинетического уравнения Смолуховского, которое непосредственно приводит к нелокальному уравнению Хопфа:

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial t} + [F(p, t) - F(0, t)] \frac{\partial F(p, t)}{\partial p} = 0, \quad p > 0, \quad t > 0,$$

для функции распределения плотности глобальной проводимости пути в структуре пористой среды. Характерной особенностью рассматриваемого класса задач является нарушение непрерывности операторов, описывающих эволюцию системы в естественных нормах, которые определяются локальными соотношениями сохранения. В рамках данного подхода выделен ряд яв-

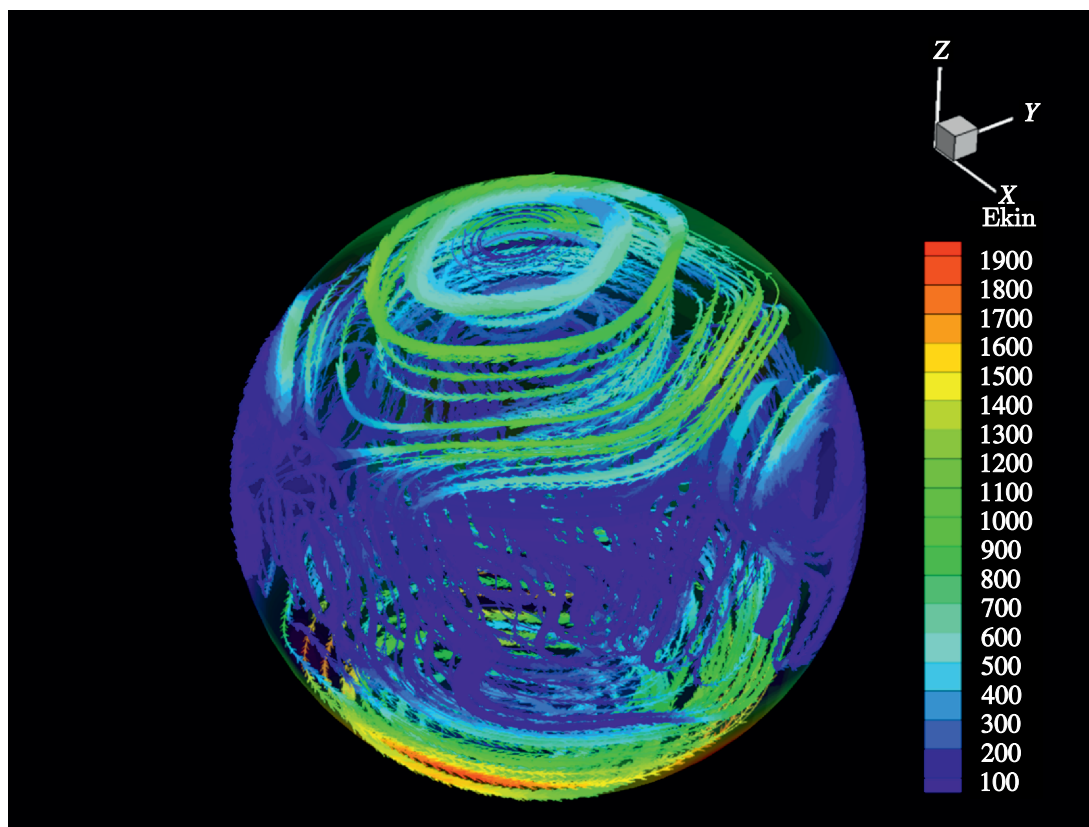


Рис. 3. Пример визуализации точного 3D-решения МГД течения в шаре с условием касания на внешней сфере

лений, связанных с образованием макроскопических структур за счет высокой интенсивности взаимодействия элементов пространственно однородных систем, а также их возникновение за счет линейного пространственного переноса в пространственно неоднородных системах. Принципиальным является то, что возникновение структур — это следствие разрывности операторов в нормах законов сохранения.

На этом направлении исследований можно отметить следующие важные результаты:

- кинетический подход, основанный на многочастичном процессе коагуляции для локально-однородной среды на основе прямого моделирования функции распределения плотности для числа связанных пор;
- построение искусственной сети связанных пор в однородных средах на основе фрактального сжатия информации для функций распределения;
- упрощенная гидродинамика на фрактальных структурах.

Следует подчеркнуть, что в некотором смысле наиболее разработанной и универсальной является теория вычислительных методов для линейных задач. Поэтому с этой точки зрения важными являются процедуры «погружения» нелинейных задач в общие классы линейных за счет изменения исходной размерности описания и расширения функциональных пространств.

Отмеченное выше погружение нелинейных систем в линейную динамику может быть универсальным образом реализовано в рамках концепции функциональных решений для квазилинейных систем на основе вложения Янга соболевских обобщенных решений в пространство

линейных функционалов, снабженное тихоновской топологией, на основе следующей конструкции [Galkin, 2013]. Обозначим символами d_x и d_t лебеговы меры на $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$ и $\mathbb{R}_1 = \{t\}$ соответственно; $Q = \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+$, $Q_0 = \mathbb{R}_n$, $\dot{B}$ — множество всех конечных линейных комбинаций индикатор-функций I_{K_n} , сосредоточенных на счетном множестве полуоткрытых кубов $K_n \subset Q$, $n \in \mathbb{N}$. Семейство $\{K_n\}$ выбирается так, чтобы конечные линейные комбинации с рациональными коэффициентами индикатор-функций I_{K_n} разделяли различные классы эквивалентности относительно меры $\mu = d_x \otimes d_t$ в пространстве локально-суммируемых функций $L_1^{loc}(Q, \mu)$. Для каждой индикатор-функции рассматривается поточечно сходящаяся к ней равномерно ограниченная счетная последовательность финитных бесконечно-дифференцируемых сглаживаний $\tilde{I}_{K_{n_i}}$. Обозначим через $\dot{B}^\infty$ пространство конечных линейных комбинаций функций $\tilde{I}_{K_{n_i}}$. Тем же символом будем обозначать вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}_m$, не вводя дополнительные обозначения. Пусть определены измеримые отображения

$$f_j: \mathbb{R}_m \times Q \rightarrow \mathbb{R}_m, \quad 1 \leq j \leq n+1,$$

такие, что для каждой функции $u \in L_1^{loc}(Q, \mu)$ суперпозиции $(f_j \circ u) \in L_1^{loc}(Q, \mu)$. Для $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_m$ положим $(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m w_i v_i$.

На множестве локально-суммируемых по мере μ функций со значениями в $\mathbb{R}_m$ —

$$M = \{u \in L_1^{loc}(Q, \mu): (f_j \circ u) \in L_1^{loc}(Q, \mu), \quad 1 \leq j \leq n+1\}$$

— рассматривается система интегральных уравнений относительно неизвестной переменной $u \in M$:

$$\int_Q \left[(u, \partial_t g) + \sum_{j=1}^n ((f_j \circ u), \partial_{x_j} g) + ((f_{n+1} \circ u), g) \right] \mu(dQ) + \int_{Q_0} (g|_{t=0}, u_0) d_x = 0 \quad \forall g \in \dot{B}^\infty, \quad (8)$$

где u_0 — заданная функция из множества $L_1^{loc}(Q_0, d_x)$. Задача (8) определяет обобщенное решение С. Л. Соболева задачи Коши для квазилинейной системы законов сохранения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(u, x, t)}{\partial x_j} = f_{n+1}(u, x, t), \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0, \quad (9)$$

с начальными данными u_0 . Расширение понятия решения (функциональные решения в метрическом пространстве линейных функционалов) позволяет обосновать разрешимость задачи и сходимость приближенных методов в рамках сходимости счетных последовательностей аппроксимаций.

Обозначим через $\mathcal{E}$ векторное пространство, состоящее из линейных комбинаций

$$F_{g, g_1} = \sum_{j=0}^n (f_j, \partial_{x_j} g) + (f_{n+1}, g) + (u, g_1), \quad u \in \mathbb{R}_m, \quad (10)$$

где $f_0(u, x, t) = u$, $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} t$, с произвольными $g \in \dot{B}^\infty$, $g_1 \in \dot{B}$. Для каждого вектора $F \in \mathcal{E}$ определим операторы π , π_0 , π_1 следующими соотношениями:

$$\pi(F) \stackrel{\text{def}}{=} F_{g, 0}, \quad \pi_1(F) \stackrel{\text{def}}{=} g|_{t=0} f_0|_{t=0} + g_1|_{t=0} u, \quad \pi_0(F) = \pi_1(F_{g, 0}). \quad (11)$$

Пусть $\mathcal{E}^+ = \{l\}$ — алгебраически сопряженное пространство к $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}^+$ по определению состоит из конечных линейных функционалов на линейном пространстве $\mathcal{E}$). На $\mathcal{E}^+$ зададим топологию $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ посредством счетной системы полунорм $\{p_F\}_{F \in \mathcal{E}}$, где $p_F(l) = |l(F)| \ \forall l \in \mathcal{E}^+$, $F = F_{g, g_1}$, где функции g являются конечными линейными комбинациями с рациональными коэффициентами индикатор-функций I_{K_n} ; аналогично определяются g_1 через $\widetilde{I}_{K_{n_1}}$. Топологическое пространство $\mathcal{E}^+$, $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ метризуемо. В данном метрическом пространстве каждое отображение $l \mapsto l(F)$, $l \in \mathcal{E}^+$, непрерывное (здесь переменными являются l , а произвольные значения $F \in \mathcal{E}$ фиксированы).

Рассмотрим вложение Янга множества M в $\mathcal{E}^+$, которое определим формулой

$$\forall u \in M: u \mapsto l_u \in \mathcal{E}^+, \quad l_u(F) \stackrel{\text{def}}{=} \int_Q (F \circ u) \nu(dQ), \quad F \in \mathcal{E}. \quad (12)$$

Вложение (12) мономорфно на классах эквивалентности функций из M , совпадающих почти везде на множестве Q относительно меры μ .

Положим $[M]$ — замыкание образа вложения (12) множества M в пространство $\{\mathcal{E}^+, \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$. На множестве $[M]$ рассмотрим индуцированную тихоновскую топологию $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ (в которой открытыми множествами служат пересечения элементов системы $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ с множеством $[M]$).

Аналогичным способом вложим множество начальных данных M_0 , состоящее из функций u_0 , которые принадлежат пространству $L_1^{\text{loc}}(Q_0, \mu_0)$, в пространство $\mathcal{E}_0^+$, являющееся алгебраически сопряженным к векторному пространству $\mathcal{E}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1(\mathcal{E})$.

Если функция $u \in M$ является решением задачи (8) (т. е. обобщенным решением задачи Коши для системы (9) с начальными данными u_0), то равенства (8) эквивалентны соотношениям

$$l_u(\pi(F)) + l_{u_0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0 \quad \forall F \in \mathcal{E}. \quad (13)$$

Элемент $l \in [M]$ называется функциональным решением уравнения (9) с начальным условием $u_0 \in M_0$, если для каждого элемента $F \in \mathcal{E}$ справедливо равенство

$$l(\pi(F)) + l_{u_0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0. \quad (14)$$

Отметим, что задача (14) относительно неизвестного функционала $l \in \mathcal{E}^+$ является линейной. Это позволяет выработать единый подход к обоснованию приближенных методов решения широкого класса задач на основе универсальных принципов, связанных со свойством слабой аппроксимации и слабой устойчивости.

Будем говорить, что задан приближенный метод решения задачи (8), обозначаемый как $\mathcal{AM}$, если указан выбор параметрического семейства элементов во множестве M :

$$\alpha \mapsto u_\alpha \in M, \quad \alpha \in A.$$

Приближенный метод $\mathcal{AM}$ слабо аппроксимирует задачу (8), если можно указать заданную этим методом последовательность приближений $u_\alpha \in M$, для которой значения невязки

$$\delta_\alpha(F) \stackrel{\text{def}}{=} \left| l_{u_\alpha}(\pi(F)) + l_{u_{\alpha|_{t=0}}}^{(0)}(\pi_0(F)) \right| + \left| \left(l_{u_0}^{(0)} - l_{u_{\alpha|_{t=0}}}^{(0)} \right)(\pi_0(F)) \right|$$

стремятся к нулю при каждом $F \in \mathcal{E}$ на заданной последовательности параметров из множества значений параметров A .

Метод $\mathcal{AM}$ сходится, если он определяет сходящуюся в пространстве $\{[M], \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$ последовательность $\{l_{u_{\alpha_n}}\}$, пределом которой является функциональное решение $l \in [M]$ задачи (8).

Назовем метод $\mathcal{AM}$ слабоустойчивым, если имеет место равномерная оценка приближений u_α в пространстве $L_1^{loc}(Q, \mu)$:

$$\sup_{\alpha \in A} \int_K |u_\alpha| \mu(dQ) < \infty, \quad (15)$$

выполняющаяся на каждом компакте $K \subset Q$.

Теорема 1. Пусть приближенный метод $\mathcal{AM}$ слабо аппроксимирует задачу (8) и является слабоустойчивым. Тогда он сходится к функциональному решению $l \in [M]$ задачи (8).

Отождествление функциональных решений с функциями позволяет вычислять интегральные средние неизвестной, но в то же время ее нелинейные суперпозиции, вообще говоря, не являются слабыми пределами нелинейных суперпозиций приближений метода, т. е. существуют функциональные решения, которые не являются обобщенными в смысле С. Л. Соболева.

Следует подчеркнуть, что условие слабой устойчивости (15) по своей природе значительно проще понятия устойчивости в теории разностных схем для нелинейных задач, оно отражает «правильное» воспроизведение основных законов сохранения. Поэтому предложенный метод погружения посредством вложения Янга (12) нелинейных законов сохранения (9) в линейные задачи (14) на пространстве функциональных решений, снабженном топологией А. Н. Тихонова, имеет универсальный вычислительный характер.

Список литературы (References)

- Бетелин В. Б., Галкин В. А. О проблеме снижения размерности сеточных аппроксимаций // Успехи кибернетики. — 2021. — № 2 (4). — С. 75–77. — DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-8
- Betelin V. B., Galkin V. A. O probleme snizheniya razmernosti setochnykh approksimatsiy [Reducing the Dimensionality of Grid Approximations] // Russian Journal of Cybernetics. — 2021. — No. 2 (4). — P. 75–77. — DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-8 (in Russian).
- Бетелин В. Б., Галкин В. А., Дубовик А. О. Точные решения системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в случае задач, связанных с нефтегазовой отраслью // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 495. — С. 13–16.
- Betelin V. B., Galkin V. A., Dubovik A. O. Exact solutions of incompressible Navier–Stokes equations in the case of oil and gas industrial problems // Doklady Mathematics. — 2020. — Vol. 102, No. 3. — P. 456–459. (Original Russian paper: Betelin V. B., Galkin V. A., Dubovik A. O. Tochnyye resheniya sistemy Nav'ye–Stoksa dlya neszhimayemoy zhidkosti v sluchaye zadach, svyazannykh s neftegazovoy otrasl'yu // Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Matematika, informatika, protsessy upravleniya. — 2020. — Vol. 495. — P. 13–16.)
- Betelin V. B., Galkin V. A. On the formation of structures in nonlinear problems of physical kinetics // Doklady Mathematics. — 2019. — Vol. 99, No. 1. — P. 99–103.
- Galkin V. A. Kinetic method for solving systems of differential equations // Doklady Mathematics. — 2013. — Vol. 88, No. 2. — P. 508–509.