

УДК: 519.63

Моделирование усиления спиновых волн в ферромагнитных пленках с помощью применения метода характеристик к нелинейному уравнению переноса

А. Ю. Митрофанова^{1,а}, О. С. Темная², А. Р. Сафин^{2,3},
О. В. Кравченко^{1,2,4}, С. А. Никитов²

¹Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

²Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,
Россия, 125009, Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7

³Московский энергетический институт,
Россия, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14

⁴Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2

E-mail: ^а nastya_mitrofanova_2000@mail.ru

Получено 11.01.2022.

Принято к публикации 19.01.2022.

В работе приведен анализ нелинейного уравнения переноса огибающей магнитостатической спиновой волны (МСВ) с учетом переноса спинового момента методом характеристик. Продемонстрирована зависимость амплитуды МСВ от коэффициента нелинейности. На фазовых портретах наглядно продемонстрирована зависимость искомой функции от коэффициента нелинейности. Посредством исследования характера эволюции начального профиля волны методом фазовой плоскости установлено, что действительная и мнимая части волны осциллируют. Показан переход траекторий из неустойчивого фокуса в предельный цикл, который соответствует осцилляции действительной и мнимой частей. Для амплитуды волны такой переход характеризуется ее усилением или затуханием (в зависимости от коэффициента нелинейности и выбранных начальных условий) до некоторого порогового значения. Показано, что время переходного процесса от усиления (затухания) к стабилизации амплитуды также зависит от параметра нелинейности. Выяснено, что на интервале усиления амплитуды спиновой волны происходит уменьшение времени переходного процесса, а большим параметрам нелинейности соответствуют меньшие значения амплитуды.

Ключевые слова: спиновая волна, спинтроника, ферромагнитные материалы, метод характеристик, уравнение переноса, система гиперболических уравнений

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 21-79-10396.

© 2022 Анастасия Юрьевна Митрофанова, Ольга Станиславовна Темная, Ансар Ризаевич Сафин, Олег Викторович Кравченко, Сергей Аполлонович Никитов

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 519.63

Simulation of spin wave amplification using the method of characteristics to the transport equation

A. Yu. Mitrofanova^{1,a}, O. S. Temnaya², A. R. Safin^{2,3}, O. V. Kravchenko^{1,2,4},
S. A. Nikitov²

¹Bauman Moscow State Technical University,

5/1 2-ya Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia

²Kotel'nikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS,

11/7 Mokhovaya st., Moscow, 125009, Russia

³Moscow Power Engineering Institute,

14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russia

⁴Federal Research Center «Computer Science and Control» of RAS,

44 Vavilova st., Moscow, 119333, Russia

E-mail: ^a nastya_mitrofanova_2000@mail.ru

Received 11.01.2022.

Accepted for publication 19.01.2022.

The paper presents an analysis of the nonlinear equation of spin wave transport by the method of characteristics. The conclusion of a new mathematical model of spin wave propagation is presented for the solution of which the characteristic is applied. The behavior analysis of the behavior of the real and imaginary parts of the wave and its amplitude is performed. The phase portraits demonstrate the dependence of the desired function on the nonlinearity coefficient. It is established that the real and imaginary parts of the wave oscillate by studying the nature of the evolution of the initial wave profile by the phase plane method. The transition of trajectories from an unstable focus to a limiting cycle, which corresponds to the oscillation of the real and imaginary parts, is shown. For the amplitude of the wave, such a transition is characterized by its amplification or attenuation (depending on the nonlinearity coefficient and the chosen initial conditions) up to a certain threshold value. It is shown that the time of the transition process from amplification (attenuation) to stabilization of the amplitude also depends on the nonlinearity parameter. It was found out that at the interval of amplification of the amplitude of the spin wave, the time of the transition process decreases, and lower amplitude values correspond to higher parameters of nonlinearity.

Keywords: spin wave, spintronics, ferromagnetic materials, method of characteristics, transport equation, hyperbolic system of equations

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 795–803 (Russian).

This work was supported by Russian Science Foundation (Grant Nos. 21-79-10396).

Введение

Спинтроника — наука об изучении спин-поляризованного транспорта электронов, которая получила бурное развитие за последние тридцать лет, что привело к сильному росту плотности магнитной записи [Ферт, 2008]. В настоящее время внимание к спинтронике обусловлено ее потенциальной применимостью для создания энергонезависимой памяти [Endoh et al., 2016] и устройств, реализующих резервуарные [Tanaka et al., 2019] и нейроморфные [Indiveri et al., 2013] вычисления, где искусственный нейрон можно создать на основе магнитных гетероструктур [Zhang et al., 2016]. Среди областей спинтроники выделяется магноника, изучающая условия распространения спиновых волн в магнитных материалах. Магноны — кванты спиновых волн в магнитоупорядоченных средах, которые благодаря своим уникальным свойствам могут использоваться как материальные носители информации в новых элементах микро- и наноэлектроники. На основе магнонных систем уже реализованы системы хранения, обработки и передачи информации, сенсоры и метаматериалы [Barman et al., 2021]. Особое внимание уделяется созданию наномасштабных магнонных структур и изучению их свойств; в частности, это относится к таким элементам функциональной электроники, как направленные ответвители, модовые селекторы и другие [Wang et al., 2020].

Одной из важнейших задач, решение которых необходимо для эффективной передачи и обработки информации в магнонных устройствах, является усиление спиновых волн. К способам усиления спиновых волн относятся, например, спиновая накачка [Verba et al., 2014], влияние на магнитную анизотропию образца с помощью изменения напряжения [Rana, Otani, 2019] и использование спинового эффекта Холла [Wang et al., 2011]. Последний способ интересен тем, что он может быть реализован в сравнительно простых гетероструктурах и не требует применения наномасштабных антенн для возбуждения спиновых волн. В линейном приближении модель распространяющейся в ферромагнитной пленке спиновой волны приведена в недавних работах, посвященных спиновому эффекту Холла в двухслойных наноструктурах, состоящих из пленок ферромагнитного диэлектрика и тяжелого металла с сильным спин-орбитальным взаимодействием [Wang et al., 2018].

Многие работы посвящены исследованиям механизмов возникновения [Xiao et al., 2012], распространения [Галишников и др., 2006; Heinz et al., 2020] и усиления спиновых волн [Kalinikos et al., 1997; Graczyk, Krawczyk, 2021]. Для описания распространения спиновых волн в магнитных пленках в [Zvezdin, Popkov, 1983] было предложено использовать нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ). Широкий спектр явлений, описываемых уравнениями типа НУШ, приводит к разнообразию аналитических и численных методов их решений [Wagner, 1996; Pathria, Morris, 1990; Weideman, Herbst, 1986; Reichel, Leble, 2008; Xu, Chang, 2010; Fleischhaker, Evers, 2011]. Альтернативный подход, рассматриваемый в данной статье, состоит в моделировании нелинейного уравнения переноса вместо НУШ, который применим для случая относительно небольших величин магнитного поля и амплитуд возбуждающих колебаний.

Данная работа посвящена моделированию усиления МСВ в гетероструктуре «ферромагнетик – тяжелый металл» с учетом нелинейности, проявляющейся с увеличением угла прецессии магнитных моментов атомов ферромагнетика при увеличении амплитуды сигнала. Моделируется эволюция спиновой волны, описываемой комплекснозначной функцией. В общем случае для действительной и мнимой частей функции получается нелинейная система уравнений в частных производных гиперболического типа, которая решается численно методом характеристик [Петров, Фаворская, Хохлов, 2017; Zenchuk, Santini, 2008; Edelen, 1988; Sarra, 2003]. Такая модель позволяет учесть как нелинейные эффекты при распространении волны, так и ее затухание.

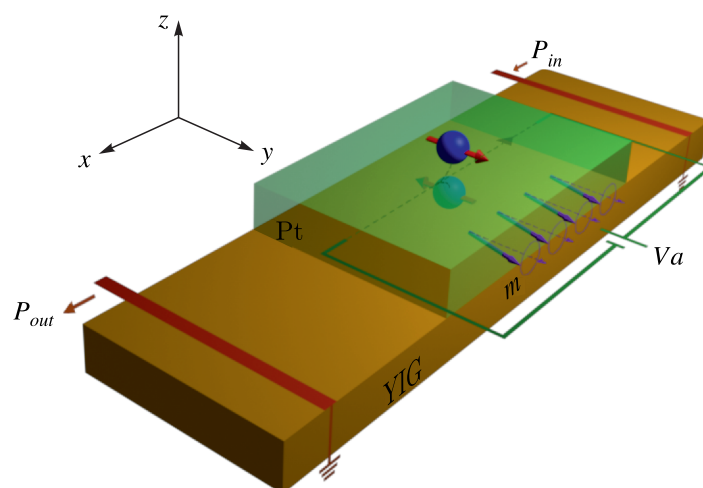


Рис. 1. Структура, состоящая из пленки ЖИГ (YIG) и слоя тяжелого металла (Pt). Возбуждение и прием колебаний в системе осуществляются с помощью микрополосковых антенн спиновых волн, а усиление — посредством пропускания спинового тока через слой тяжелого металла

Математическая модель

Рассматриваемая структура представлена на рис. 1. Здесь на пленке железо-иттриевого граната (ЖИГ, YIG) находится тонкая пленка тяжелого металла — платины (Pt) толщиной порядка 5 нм. Возбуждение и прием колебаний осуществляются с помощью микрополосковых антенн спиновых волн, а усиление колебаний — посредством пропускания электрического тока через слой тяжелого металла (ТМ). При пропускании электрического тока за счет спинового эффекта Холла в ТМ возникает спиновый ток, несущий нескомпенсированный магнитный момент в ЖИГ и компенсирующий гильбертово затухание. Направление поляризации спинового тока в ТМ выбирается коллинеарно стационарному направлению намагниченности ЖИГ [Wang et al., 2011]. При этом условие компенсации затухания спиновых волн выполнено.

Рассмотрим математическую модель рассматриваемой структуры (рис. 1) в виде уравнения переноса для огибающей $u(t)$ магнитостатической спиновой волны следующего вида [Wang et al., 2011; Zvezdin, Popkov, 1983]:

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha |u|^2 \right) u = (\omega_0 - i\eta)u + v_g \left(-i \frac{\partial}{\partial x} - k_0 \right) u. \quad (1)$$

Здесь α — коэффициент нелинейного сдвига частоты (параметр неизохронности), ω_0 — частота возбуждения, η — линейный коэффициент затухания спиновой волны, v_g — групповая скорость и k_0 — волновое число вдоль направления распространения волны x . Обезразмерим уравнение (1), поделив его на ω_0 и вынеся волновое число k_0 за скобки:

$$i \left(\frac{\partial}{\partial(\omega_0 t)} - \frac{\alpha}{\omega_0} |u|^2 \right) u = \left(1 - i \frac{\eta}{\omega_0} \right) u + \frac{v_g k_0}{\omega_0} \left(-i \frac{\partial}{\partial(k_0 x)} - 1 \right) u. \quad (2)$$

Обозначим новые безразмерные переменные $\tau = \omega_0 t$ и $\xi = k_0 x$. Представим искомую комплекснозначную функцию $u(\xi, \tau)$ в виде $u = v + iw$, где $v = v(\xi, \tau)$ и $w = w(\xi, \tau)$ соответственно. Так как $|u|^2 = (v^2 + w^2)$, а частные производные по времени и пространственной переменной ξ выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial v}{\partial \tau} + i \frac{\partial w}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + i \frac{\partial w}{\partial \xi},$$

то (2) примет вид

$$i\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\alpha}{\omega_0}(v^2 + w^2)\right)(v + wi) = \left(1 - i\frac{\eta}{\omega_0}\right)(v + wi) + \frac{v_g k_0}{\omega_0}\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi} - 1\right)(v + wi).$$

Раскрыв скобки и приравняв левые и правые действительные и мнимые части равенства, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial\tau} + \frac{v_g k_0}{\omega_0} \frac{\partial v}{\partial\xi} = \frac{\alpha}{\omega_0}(v^2 + w^2)v + \left(1 - \frac{v_g k_0}{\omega_0}\right)w - \frac{\eta}{\omega_0}v, \\ \frac{\partial w}{\partial\tau} + \frac{v_g k_0}{\omega_0} \frac{\partial w}{\partial\xi} = \frac{\alpha}{\omega_0}(v^2 + w^2)v - \left(1 - \frac{v_g k_0}{\omega_0}\right)v - \frac{\eta}{\omega_0}w. \end{cases}$$

Вводя обозначения $a = \frac{v_g k_0}{\omega_0}$, $b = -\frac{\eta}{\omega_0}$, $c = \left(1 - \frac{v_g k_0}{\omega_0}\right)$ и $\alpha' = \frac{\alpha}{\omega_0}$, получим нелинейную гиперболическую систему в безразмерных переменных вида

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial\tau} + a\frac{\partial v}{\partial\xi} = \alpha'(v^2 + w^2)v + bv + cw, \\ \frac{\partial w}{\partial\tau} + a\frac{\partial w}{\partial\xi} = \alpha'(v^2 + w^2)w + bw - cv. \end{cases} \tag{3}$$

Численное моделирование

Дополнив (3) начальными и граничным условиями, будем решать систему методом характеристик. Введем параметр s и сведем задачу решения уравнения в частных производных к задаче решения обыкновенного дифференциального уравнения. Выражение для полной производной по параметру s для действительной части v имеет вид

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\partial v}{\partial\tau} \frac{d\tau}{ds} + \frac{\partial v}{\partial\xi} \frac{d\xi}{ds}. \tag{4}$$

Приравняв правую часть выражения (4) к левой части уравнения для действительной составляющей системы (3):

$$\frac{\partial v}{\partial\tau} \frac{d\tau}{ds} + \frac{\partial v}{\partial\xi} \frac{d\xi}{ds} = \frac{\partial v}{\partial\tau} + a\frac{\partial v}{\partial\xi},$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = 1, \\ \frac{d\xi}{ds} = a, \end{cases}$$

дополненных начальными условиями $t(0) = 0$, $x(0) = 0$. Далее запишем выражения через параметр s для временной и пространственной переменных $\tau = s$ и $\xi = as = a\tau$. Найдя производную $\frac{dw}{ds}$, аналогичную выражению (4), и произведя с ней те же операции, что и для v , приддем к вышеописанной замене. После этого получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dv}{ds} = \alpha'(v^2 + w^2)v + bv + cw, \\ \frac{dw}{ds} = \alpha'(v^2 + w^2)w + bw - cv, \end{cases} \tag{5}$$

которую можно решить с помощью метода Рунге – Кутты численно. Обратим внимание, что в линейном случае система (5) имеет аналитическое решение. Алгоритм решения уравнения (2) реализован в системе компьютерной математики **MATLAB** с помощью встроенной функции `ode23s` при коэффициентах $a = 1$, $b = c = 0,1$, $\alpha' = -0,1$ на интервале $\tau \in [0; 150]$, с учетом начально-краевых условий. Предполагается, что длина пленки в безразмерных координатах равна $X = 150$.

Рассмотрим в качестве начальных условий для действительной и мнимой частей в (5) финитные импульсы вида $v(\xi, 0) = \chi_{[0;15]}(\xi)$, где $\chi_{[a;b]}(\xi)$ — характеристическая функция отрезка $[a; b]$. Поведение действительной и мнимой частей волны во времени продемонстрировано на рис. 2. Заметим, что амплитуды $|v|$ и $|w|$ осциллируют на протяжении всего времени, что подтверждается предельными циклами на фазовых портретах, изображенных на рис. 3. При этом для $\alpha' = -0,1$ динамика показывает уменьшение квадрата амплитуды волны. Изменение $|u|^2$ происходит от начального значения $u_0^2 = v_0^2(0, 0) + w_0^2(0, 0)$ до некоторого предельного значения u_{th}^2 , равного 1 для $\alpha' = -0,1$. Характер поведения квадрата амплитуды волны зависит от коэффициента нелинейности α' (рис. 3, 4).

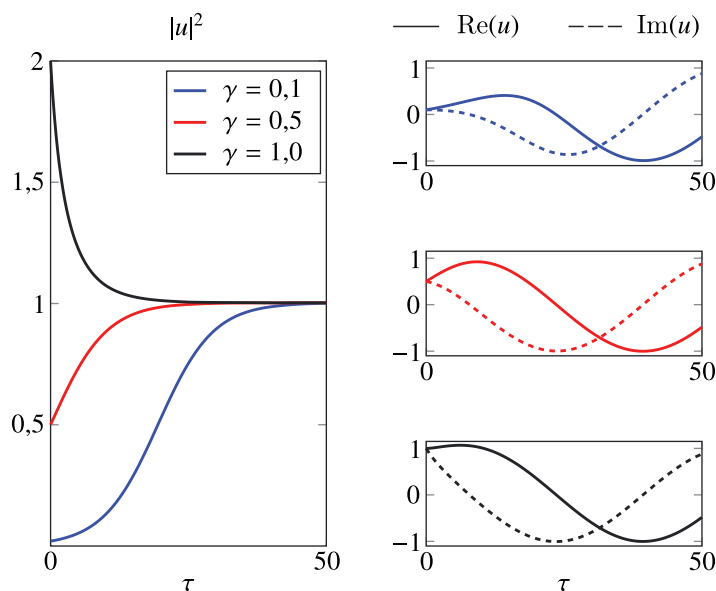


Рис. 2. Зависимость $|u|^2$, а также действительной и мнимой частей (справа) от времени при $\alpha' = -0,1$ и разных амплитудах начальных профилей γ

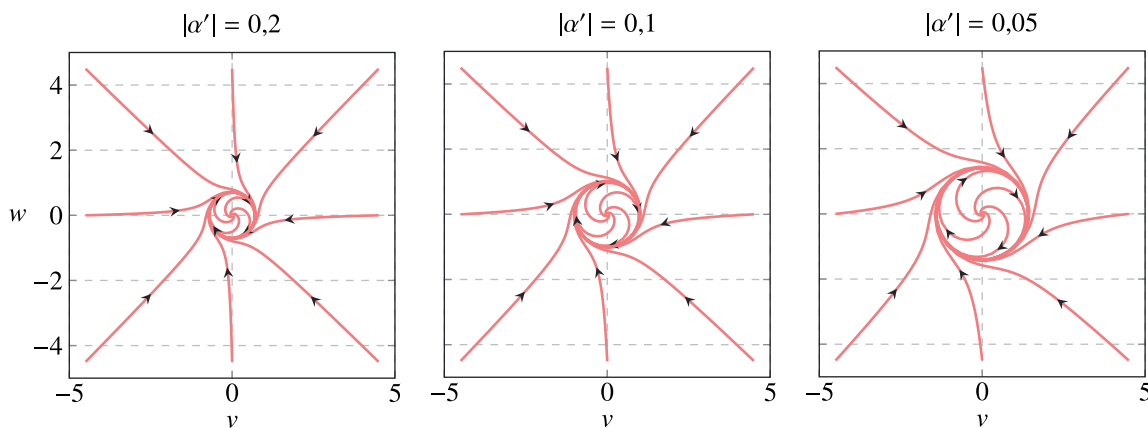


Рис. 3. Эволюция предельного цикла на фазовой плоскости при $\alpha' \rightarrow 0$

Качественное исследование характера эволюции начального профиля волны выполнено методом фазовой плоскости для разных коэффициентов нелинейности (рис. 3). На фазовой плоскости точка $(0, 0)$ является неустойчивым фокусом, что соответствует изменению амплитуды волны на интервале $[0, T_0]$, за который она изменяется от u_0 до u_{th} . Фазовые траектории из неустойчивого фокуса попадают на предельный цикл в форме окружности, радиус которой зависит от коэффициента нелинейности, поэтому на интервале $[T_0; +\infty]$ амплитуда волны, а значит, и ее квадрат постоянны. Алгоритм расчета применим и к предельному случаю, когда $\alpha \rightarrow 0$. В этом случае амплитуда не ограничена значением нелинейного коэффициента и растет экспоненциально. Зависимость разности двух значений квадратов амплитуды $\Delta|u|^2 = u_{th}^2 - u_0^2$ и времени выхода на предельный цикл τ_{const} от $\alpha' < 0$ для заданных начальных условий проиллюстрирована на рис. 4. Также для выбранных начальных условий на интервале $|\alpha'| \in (0; 0,0495)$ затухание мало и амплитуда волны растет до значения u_{th} , а для больших $|\alpha'|$ амплитуда волны убывает. Напротив, на интервале $|\alpha'| \in (0; 0,0495)$ время переходного процесса (от непостоянной амплитуды волны до ее стабилизации) уменьшается, далее для $|\alpha'| \in (0,0495; 0,0970)$ оно возрастает и вновь уменьшается уже с более низкой скоростью для $|\alpha'| > 0,0970$.

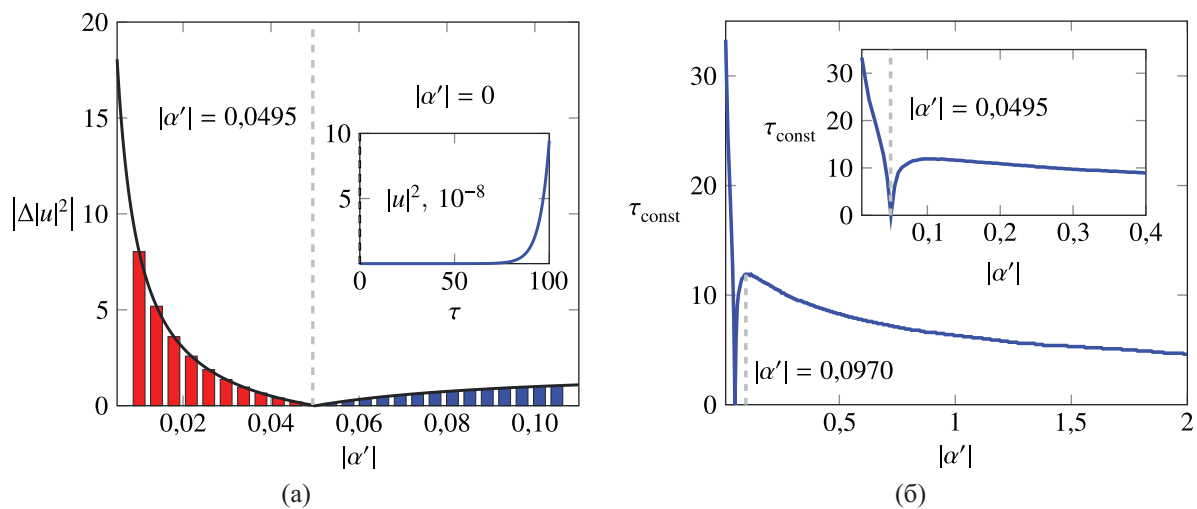


Рис. 4. а) Зависимость модуля функции $\Delta|u|^2 = u_{th}^2 - u_0^2$ от отрицательного коэффициента нелинейности. На внутреннем графике показан неограниченный рост амплитуды для случая отсутствия затухания $\alpha = 0$; б) зависимость времени процесса перехода от непостоянной амплитуды к ее стабилизации τ_{const} от коэффициента нелинейности

Заключение

В работе рассмотрена задача моделирования распространения спиновой волны (1) с учетом нелинейного затухания и переноса спинового момента. Представлено численное решение системы (3) методом характеристик. Получены графики эволюции финитных начальных профилей спиновой волны в нелинейном случае. Выполнен качественный анализ поведения решений методом фазовой плоскости. Показано, что в предельном случае, когда коэффициент нелинейности $\alpha \rightarrow 0$, происходит неограниченное усиление амплитуды спиновой волны (экспоненциальный рост амплитуды). Вместе с этим усиление или затухание спиновой волны в нелинейном случае зависит от абсолютного значения отрицательного нормированного коэффициента нелинейности α' и выбранных начальных условий. Для начальных профилей в виде прямоугольных импульсов единичной амплитуды получены следующие значения. При $|\alpha'| = 0,0495$ модуль стационарной амплитуды постоянен на всем интервале наблюдения. В остальных случаях

большим значениям α' соответствуют меньшие значения модуля стационарной амплитуды, при этом на интервале $(0; 0,0495)$ происходит усиление амплитуды спиновой волны, а на интервале $(0,0495, +\infty)$ — ее затухание.

Список литературы (References)

- Галишиников А. А. и др. Распространение прямоугольных импульсов магнитостатических волн в пленках железо-иттриевого граната // Журнал технической физики. — 2006. — Т. 76, № 5. — С. 62–70.
Galishnikov A. A. Rasprostranenie pryamougol'nykh impul'sov magnitostaticeskikh voln v plenkakh zhelezoittriyevo granata [Propagation of rectangular pulses of magnetostatic waves in iron-yttrium garnet films] // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki. — 2006. — No. 5. — P. 62–70 (in Russian).
- Петров И. Б., Фаворская А. В., Хохлов Н. И. Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2017. — Т. 57, № 11. — С. 1804–1811.
Petrov I. B., Favorskaya A. V., Khokhlov N. I. Setochno-kharakteristicheskii metod na sistemakh vlozhennykh ierarkhicheskikh setok i ego primeneniye dlya issledovaniya seismicheskikh voln [Grid-characteristic method on the systems of nested hierarchical grids and its application for the study of seismic waves] // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2017. — No. 11. — P. 1804–1811 (in Russian).
- Ферт А. Происхождение, развитие и перспективы спинтроники // Успехи физических наук. — 2008. — Т. 178, № 12. — С. 1336–1348.
Fert A. The origin, development and future of spintronics // Soviet Physics Uspekhi. — 2008. — Vol. 178, No. 12. — P. 1336–1348. (Original Russian paper: *Fert A. Proiskhozhdeniye, razvitiye i perspektivy spintroniki* // Uspekhi fizicheskikh nauk. — 2008. — Vol. 178, No. 12. — P. 1336–1348.)
- Barman A. et al. The 2021 magnonics roadmap // Journal of Physics: Condensed Matter. — 2021.
- Edelen D. G. B. On solving problems in the mechanics of solids and fluids by a generalized method of characteristics // International journal of engineering science. — 1988. — Vol. 26, No. 4. — P. 361–372.
- Endoh T. et al. An overview of nonvolatile emerging memories — Spintronics for working memories // IEEE journal on emerging and selected topics in circuits and systems. — 2016. — Vol. 6, No. 2. — P. 109–119.
- Fleischhaker R., Evers J. A Maxwell–Schrödinger solver for quantum optical few-level systems // Computer Physics Communications. — 2011. — Vol. 182, No. 3. — P. 739–747.
- Graczyk P., Krawczyk M. Nonresonant amplification of spin waves through interface magnetoelectric effect and spin-transfer torque // Scientific Reports. — 2021. — Vol. 11, No. 1. — P. 1–9.
- Heinz B. et al. Propagation of spin-wave packets in individual nanosized yttrium iron garnet magnonic conduits // Nano letters. — 2020. — Vol. 20, No. 6. — P. 4220–4227.
- Indiveri G. et al. Integration of nanoscale memristor synapses in neuromorphic computing architectures // Nanotechnology. — 2013. — Vol. 24, No. 38. — P. 384010.
- Kalinikos B. A. et al. Observation of the amplification of spin-wave envelope solitons in ferromagnetic films by parallel magnetic pumping // Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. — 1997. — Vol. 66, No. 5. — P. 371–375.
- Pathria D., Morris J. L. Pseudo-spectral solution of nonlinear Schrödinger equations // Journal of Computational Physics. — 1990. — Vol. 87, No. 1. — P. 108–125.
- Rana B., Otani Y. C. Towards magnonic devices based on voltage-controlled magnetic anisotropy // Communications Physics. — 2019. — Vol. 2, No. 1. — P. 1–12.
- Reichel B., Leble S. On convergence and stability of a numerical scheme of coupled nonlinear Schrödinger equations // Computers & Mathematics with Applications. — 2008. — Vol. 55, No. 4. — P. 745–759.
- Sarra S. A. The method of characteristics with applications to conservation laws // Journal of Online mathematics and its Applications. — 2003. — Vol. 3. — P. 1–16.

- Tanaka G. et al.* Recent advances in physical reservoir computing: A review // *Neural Networks*. — 2019. — Vol. 115. — P. 100–123.
- Verba R. et al.* Parametric excitation of spin waves by voltage-controlled magnetic anisotropy // *Physical Review Applied*. — 2014. — Vol. 1, No. 4. — P. 044006.
- Wagner M.* Strongly driven quantum wells: an analytical solution to the time-dependent Schrödinger equation // *Physical review letters*. — 1996. — Vol. 76, No. 21. — P. 4010.
- Wang Q. et al.* A magnonic directional coupler for integrated magnonic half-adders // *Nature Electronics*. — 2020. — Vol. 3, No. 12. — P. 765–774.
- Wang Q. et al.* Reconfigurable nanoscale spin-wave directional coupler // *Science advances*. — 2018. — Vol. 4, No. 1. — P. e1701517.
- Wang Z. et al.* Control of spin waves in a thin film ferromagnetic insulator through interfacial spin scattering // *Physical review letters*. — 2011. — Vol. 107, No. 14. — P. 146602.
- Xiao J. et al.* Spin-wave excitation in magnetic insulators by spin-transfer torque // *Physical review letters*. — 2012. — Vol. 108, No. 21. — P. 217204.
- Zhang D. et al.* All spin artificial neural networks based on compound spintronic synapse and neuron // *IEEE transactions on biomedical circuits and systems*. — 2016. — Vol. 10, No. 4. — P. 828–836.
- Zvezdin A. K., Popkov A. F.* Contribution to the nonlinear theory of magnetostatic spin waves // *Sov. Phys. JETP*. — 1983. — Vol. 2, No. 350. — P. 150.
- Weideman J. A. C., Herbst B. M.* Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 1986. — Vol. 23, No. 3. — P. 485–507.
- Xu Q., Chang Q.* New numerical methods for the coupled nonlinear Schrödinger equations // *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*. — 2010. — Vol. 26, No. 2. — P. 205–218.
- Zenchuk A. I., Santini P. M.* The remarkable relations among PDEs integrable by the inverse spectral transform method, by the method of characteristics and by the Hopf–Cole transformation // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2008. — Vol. 41, No. 18. — P. 185209.