

УДК: 519.6

Разработка и применение метода расщепления по физическим факторам для исследования течений несжимаемой жидкости

В. А. Гуцин

Институт автоматизации проектирования РАН,
Россия, 123056, Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19/18

E-mail: gushchin47@mail.ru

Получено 28.12.2021.

Принято к публикации 01.03.2022.

Описано развитие метода расщепления по физическим факторам для исследования течений несжимаемой жидкости (МЕРАНЖ), прошедшее за последние 50 лет. Гибридная явная конечно-разностная схема метода основана на модифицированной схеме с центральными разностями (МСЦР) и модифицированной схеме с ориентированными разностями (МСОР) со специальным условием переключения в зависимости от знака скорости переноса и знаков первой и второй разностей переносимых функций. Показано применение данного метода для решения некоторых задач (пространственный поток около сферы и кругового цилиндра для случаев однородной и стратифицированной жидкостей в широком диапазоне безразмерных параметров задачи, включая переходные режимы обтекания (2D–3D-переход, ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое); плоскостная задача течения жидкости со свободной поверхностью; динамика вихревой пары в воде; коллапс пятен в стратифицированной жидкости; моделирование воздухо-, тепло- и массопереноса в «чистых производственных помещениях»).

Ключевые слова: метод расщепления, гибридная явная конечно-разностная схема, течения несжимаемой жидкости

UDC: 519.6

Development and application of the method of splitting by physical factors for the study of the incompressible fluid flows

V. A. Gushchin

Institute for Computer Aided Design of the RAS,
19/18 2-nd Brestskaya st., Moscow, 123056, Russian Federation

E-mail: gushchin47@mail.ru

Received 28.12.2021.

Accepted for publication 01.03.2022.

The development of the Splitting Method for Incompressible Fluid flows (SMIF) during last 50 years is described. The hybrid explicit finite difference scheme of method SMIF is based on Modified Central Difference Scheme (MCDS) and Modified Upwind Difference Scheme (MUDS) with special switch condition depending on the velocity sign and the signs of the first and second differences of transferred functions. Application of this method for solving of some tasks (the spatial flow around a sphere and a circular cylinder for homogeneous and stratified fluids in a wide range of dimensionless parameters of the problem, including the transitional regimes (2D–3D transition, laminar-turbulent transition in the boundary layer); a plane problem of fluid flows with a free surface; a dynamics of vortex pair in a water; a collapse of spots in stratified fluid; the air-, heat-, and mass transfer in «clean rooms») is demonstrated.

Keywords: splitting method, hybrid explicit finite difference scheme, incompressible fluid flows

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 715–739 (Russian).

1. Введение

Многие явления, наблюдаемые в атмосфере и океане, а также проблемы гидромеханики, гидравлики, акустики, физиологии кровообращения, организации технологических процессов в силу умеренных скоростей перемещения среды можно изучать в рамках модели несжимаемой вязкой жидкости. В настоящее время практика выдвигает перед учеными-прикладниками различного рода задачи, полное исследование которых может быть проведено в большинстве случаев лишь путем вычислительного эксперимента или с помощью тщательно поставленного физического эксперимента. Однако либо представляющие практический интерес явления и технологические процессы не поддаются всестороннему физическому моделированию, либо затраты на проведение таких экспериментов чрезмерно велики.

Задачи, представляющие практический интерес, как правило, характеризуются многомерностью, нестационарностью, нелинейностью, наличием свободных границ и пограничных слоев и описываются уравнениями Навье – Стокса. Нелинейность уравнений Навье – Стокса и наличие малого параметра при старших производных создают серьезные трудности как при их аналитическом исследовании (оно, по существу, возможно лишь для модельных уравнений или частных задач), так и при численном решении этих уравнений с помощью ЭВМ.

Математическое моделирование таких сложных течений, какими являются отрывные течения, особенно при больших числах Рейнольдса, течения со свободной поверхностью, течения стратифицированной по плотности жидкости, а также трехмерные течения в технологических устройствах и производственных помещениях специального назначения, предъявляет целый ряд требований к применяемым и разрабатываемым методам решения уравнений, описывающих эти течения. К таким требованиям относятся: высокий порядок аппроксимации конечно-разностных схем — второй и выше; минимальная схемная диссипация и дисперсия; работоспособность в широком диапазоне исследуемых параметров (чисел Рейнольдса, Фруда и т. д.) и монотонность. Последнее свойство особенно важно при моделировании течений с областями больших градиентов гидродинамических параметров, при расчетах течений со свободной поверхностью, а также течений стратифицированной жидкости.

Разработка эффективных численных методов, обладающих перечисленными выше свойствами, и расчет с их использованием нелинейных течений несжимаемой жидкости являются весьма актуальными.

В настоящее время известно достаточно большое количество численных методов решения уравнений Навье – Стокса, описывающих течения несжимаемой вязкой жидкости. Большая часть этих методов исторически была разработана применительно к системе уравнений в форме Гельмгольца, записанных относительно функции тока ψ и завихренности ω . Общим недостатком этих методов является использование в том или ином виде граничного условия для вихря на твердой поверхности тела, которое отсутствует в физической постановке задачи. Наличие дополнительного итерационного процесса, связанного с указанным граничным условием для завихренности, лимитирует скорость сходимости численных алгоритмов. Очевидно, что разностная схема, позволяющая рассчитывать течения вязкой несжимаемой жидкости без использования граничного условия для завихренности на твердой поверхности, при всех прочих равных условиях обладает большей эффективностью.

Ограниченность методов решения (ψ, ω) -системы связана также с существенным возрастанием объема вычислений при обобщении их на случай пространственных течений, так как в этом случае кроме трех уравнений переноса завихренности необходимо решать три уравнения Пуассона для составляющих векторного потенциала.

Трудности возникают и при попытках распространения указанных подходов для расчетов течений со свободной поверхностью, где необходимо ставить граничные условия для функции

тока и вихря на заранее неизвестной и определяемой в процессе решения границе. Эти обстоятельства объясняют возросший в последнее время интерес к численному решению уравнений Навье – Стокса, записанных в естественных (примитивных) переменных.

Важным этапом в развитии методов решения примитивных уравнений явился метод маркеров и ячеек — МАС, разработанный в Лос-Аламосской лаборатории [Harlow, Welch, 1965]. Основными отличительными чертами этого метода являются: сочетание эйлера и лагранжева подходов для описания движения жидкости, которое достигается использованием маркеров — невесомых и невзаимодействующих частиц, что существенно облегчает слежение за подвижными границами в процессе расчетов; использование разнесенного шаблона конечно-разностной сетки для различных неизвестных функций. Метод «МАС» получил широкое распространение и к настоящему времени имеет целый ряд его модификаций.

Все предложенные к настоящему времени модификации метода «МАС» не позволяют проводить расчеты при больших числах Рейнольдса, а конечно-разностные схемы этих подходов не обладают свойством монотонности.

Как результат появились новые подходы, использующие идею расщепления по физическим процессам [Chorin, 1968; Fortin, Peyret, Temam, 1971]. Один из таких подходов был предложен и нами в начале 70-х годов — Splitting Method for Incompressible Fluids (SMIF) [Белоцерковский, Гуцин, Щенников, 1975]. В течение прошедших 50 лет SMIF постоянно модифицировался. К настоящему времени метод обобщен на случай течений стратифицированной жидкости [Gushchin, Smirnova, 2019], течений со свободной поверхностью [Белоцерковский, Гуцин, Коньшин, 1987] и пространственных течений [Гуцин, 1976; Gushchin, Narayanan, Chafle, 1997]. В данной работе мы кратко отметим эти модификации и продемонстрируем некоторые примеры решенных задач. Распараллеливание алгоритма было сделано и применено на массивных параллельных компьютерах с распределенной памятью и с использованием MPI.

2. Метод расщепления для однородной жидкости

2.1. Схема расщепления

Рассмотрим уравнения Навье – Стокса в примитивных переменных:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости, p — давление, Re — число Рейнольдса. Пусть в некоторый момент времени $t_n = n \cdot \tau$, где τ — величина шага по времени, n — число шагов, известны поля скорости \mathbf{v} и давления p . Тогда схему нахождения неизвестных функций в момент времени $t_{n+1} = (n+1) \cdot \tau$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\tau} = -(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}^n, \quad (3)$$

$$\tau \Delta p = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad (4)$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\tau} = -\nabla p. \quad (5)$$

На I этапе (3) предполагается, что перенос количества движения (импульса единицы массы) осуществляется только за счет конвекции и диффузии. На II этапе (4) по найденному промежуточному полю скорости $\tilde{\mathbf{v}}$ с учетом условия соленоидальности вектора скорости \mathbf{v}^{n+1} из решения уравнения Пуассона находится поле давления. На III этапе (5) предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления (конвекция и диффузия отсутствуют). Очевидно, что сумма уравнений I и III этапов дает нам исходное уравнение движения (1).

2.2. Принцип построения конечно-разностной схемы

Прежде чем приступить к построению конечно-разностной схемы для различных систем координат в случае двух и трех пространственных переменных, напомним, что она должна удовлетворять следующим требованиям: высокий порядок аппроксимации — второй и выше; минимальная схемная диссипация; устойчивость в широком диапазоне чисел Рейнольдса и монотонность. Идею построения неоднородной (гибридной) схемы, удовлетворяющей перечисленным выше требованиям, рассмотрим на примере одномерного модельного линейного уравнения переноса:

$$f_t + af_x = 0, \quad a = \text{const.} \quad (6)$$

Введем равномерную по пространству сетку $\Omega_n = \{x_i = \frac{1}{n}, i = 0, 1, 2, \dots\}$ и шаг по времени τ . Определим на Ω_n сеточную функцию f_i^n , совпадающую в узлах сетки с искомой функцией f . Пусть

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\tau} + a \frac{f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n}{h} = 0 \quad (7)$$

есть конечно-разностная аппроксимация уравнения (6). При этом рассматривается потоковый вариант метода в предположении, что a — скорость переноса некоторой субстанции f , а f — несомая субстанция.

Исследуем класс разностных схем, который можно записать в виде двухпараметрического семейства, зависящего от параметров α и β следующим образом:

$$f_{i+1/2}^n = \begin{cases} \alpha f_{i-1}^n + (1 - \alpha - \beta) f_i^n + \beta f_{i+1}^n, & a \geq 0, \\ \alpha f_{i+2}^n + (1 - \alpha - \beta) f_{i+1}^n + \beta f_i^n, & a < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Выписав аналогично представление для $f_{i-1/2}^n$ и разложив входящие в (7), (8) сеточные функции по формуле Тейлора в окрестности точки (i, n) , первое дифференциальное приближение для уравнения (6) можно записать в виде

$$f_t + af_x = \left[\frac{h}{2} |a| (1 + 2\alpha - 2\beta) - \frac{\tau a^2}{2} \right] f_{xx}. \quad (9)$$

Отметим, что такой подход для анализа конечно-разностных схем впервые использовали А. И. Жуков (см. [Рождественский, Яненко, 1968; Hirt, 1968]). Обоснование этого подхода для одномерных квазилинейных уравнений гиперболического типа проведено в работах Н. Н. Яненко и Ю. И. Шокина [Яненко, Шокин, 1968; Шокин, 1979].

При $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ из (7), (8) получается хорошо известная схема Годунова первого порядка аппроксимации, при $\alpha = 0, \beta = 0,5$ получается схема второго порядка с центральными разностями (ЦР), а при $\alpha = -0,5, \beta = 0$ — схема второго порядка с ориентированными разностями (ОР).

Известно [Годунов, 1959; Холодов, 1978], что для уравнения (6) нельзя построить однородную монотонную разностную схему выше первого порядка аппроксимации. Поэтому построение монотонной схемы высокого порядка осуществляется либо на основе однородных схем второго порядка с применением операторов сглаживания [Колган, 1978; Лобановский, 1979], либо на основе гибридных схем с применением различных критериев переключения с одной схемы на другую в зависимости от характера решения [Гольдин и др., 1965; Федоренко, 1962; Van Leer, 1977; Копченков, Крайко, 1983], возможно с использованием сглаживания [Boris, Book, 1973; Жмакин, Фурсенко, 1980].

В данной работе строится гибридная (неоднородная) монотонная разностная схема, основанная на комбинации модифицированных схем с ЦР и ОР.

Исследуем схемы с ЦР и ОР с учетом сформулированных выше требований.

Рассмотрим класс модифицированных схем с ОР (МОР), т. е. при $\beta = 0$. Требование минимума аппроксимационной вязкости, как легко видеть из первого дифференциального приближения (9), налагает условие

$$\alpha = -0,5(1 - C), \quad (10)$$

где $0 < C = \frac{\tau|a|}{h} \leq 1$ — число Куранта. Для модифицированных схем с ЦР (МЦР) ($\alpha = 0$) требование минимума аппроксимационной вязкости налагает условие

$$\beta = 0,5(1 - C). \quad (11)$$

Таким образом, получаемые модифицированные схемы МЦР при $\alpha = 0$, $\beta = 0,5(1 - C)$ и МОР при $\alpha = -0,5(1 - C)$, $\beta = 0$ являются схемами второго порядка аппроксимации как по пространственной, так и по временной переменным и обладают нулевой схемной вязкостью в смысле равенства нулю коэффициента при второй производной в первом дифференциальном приближении. Очевидно, что каждая из этих схем работоспособна при любом неотрицательном коэффициенте вязкости ν (числе Рейнольдса) при решении уравнения

$$f_t + af_x = \nu f_{xx}. \quad (12)$$

Сводная информация о рассмотренных схемах для уравнения (6) приведена в таблице 1.

Таблица 1. Сводная информация о рассмотренных схемах для уравнения (6)

	Схема первого порядка	ЦР	ОР	МЦР	МОР
α	0	0	-0,5	0	-0,5(1 - C)
β	0	0,5	0	0,5(1 - C)	0
$O(h^n, \tau^m)$	$O(h, \tau)$	$O(h^2, \tau)$	$O(h^2, \tau)$	$O(h^2, \tau^2)$	$O(h^2, \tau^2)$
ν	$\frac{h}{2} a - \frac{\tau a^2}{2}$	$-\frac{\tau a^2}{2}$	$-\frac{\tau a^2}{2}$	0	0

Проведем теперь исследование монотонности построенных выше модифицированных схем МЦР и МОР. В соответствии с определением, введенным С.К. Годуновым, схема обладает свойством монотонности, если из того, что $\Delta f_{i+1/2}^n \equiv f_{i+1}^n - f_i^n \geq 0$ для всех i , следует, что $\Delta f_{i+1/2}^{n+1} > 0$ для всех i .

Записывая уравнение (7) в точке $i + 1$ и вычитая из полученного уравнение (7) в точке i , опуская громоздкие выкладки, для схемы МЦР имеем, что она монотонна при условии

$$\Delta f_{i+1/2}^n \geq \zeta(C) \Delta f_{i-1/2}^n, \quad \text{где } \zeta(C) = 0,5 \frac{1 - C}{2 - C},$$

а схема МОР — при условии

$$\Delta f_{i+1/2}^n \leq \sigma(C) \Delta f_{i-1/2}^n, \quad \text{где } \sigma(C) = 0,5 \frac{1 + C}{C},$$

т. е. обе схемы монотонны, если

$$\Delta f_{i+1/2}^n = \delta \Delta f_{i-1/2}^n, \quad \text{где } \zeta(C) \leq \delta \leq \sigma(C). \quad (13)$$

Принимая во внимание, что $0 \leq \zeta(C) \leq 0,25$, $4 \leq \sigma(C) \leq +\infty$, видно, что области монотонности рассматриваемых однородных схем имеют непустое пересечение. Таким образом, существует целый класс неоднородных схем, отличающихся условием переключения с одной однородной схемы на другую. Более общий анализ с учетом знаков коэффициента a , первых $\Delta f_{i+1/2}^n$ и вторых разностей $\Delta^2 f_{i+1/2}^n = \Delta f_{i+1}^n - \Delta f_i^n$ позволяет получить следующее условие переключения: если

$$(a \cdot \Delta f \cdot \Delta^2 f)_{i+1/2}^n \geq 0, \quad (14)$$

то используется схема МОР, т. е. в (7)

$$f_{i+1/2}^n = \begin{cases} 0,5 \cdot (3 - C)f_i^n - 0,5 \cdot (1 - C)f_{i-1}^n, & \text{если } a \geq 0, \\ 0,5 \cdot (3 - C)f_{i+1}^n - 0,5 \cdot (1 - C)f_{i+2}^n, & \text{если } a < 0; \end{cases} \quad (15)$$

для $f_{i-1/2}^n$ индекс i в (15) уменьшается на единицу, а при

$$(a \cdot \Delta f \cdot \Delta^2 f)_{i+1/2}^n < 0 \quad (16)$$

используется схема МЦР, т. е.

$$f_{i+1/2}^n = 0,5 \cdot (1 - C \cdot \text{sing } a)f_{i+1}^n + 0,5 \cdot (1 + C \cdot \text{sing } a)f_i^n. \quad (17)$$

Построенная таким образом гибридная конечно-разностная схема (7) для уравнения (6) удовлетворяет перечисленным выше требованиям: на гладких решениях имеет второй порядок аппроксимации по временной и пространственной переменным; обладает минимальной схемной вязкостью и диссипацией; устойчива при выполнении условия Куранта $0 < C \leq 1$ и монотонна.

Такая же идея используется при построении конечно-разностной схемы по каждому направлению при изучении 2D- и 3D-задач. Для случая двух пространственных переменных (2D) конечно-разностная схема подробно описана в работе [Гущин, Смирнова, 2020].

2.3. Некоторые примеры решенных задач

2.3.1. Динамика вихревой пары

Пусть два вихря радиусом r_0 и с одинаковой интенсивностью Γ , но с противоположными направлениями вращения, расположены симметрично относительно вертикальной оси (рис. 1). Расстояние между центрами вихрей равно b . В силу симметрии задачи можно рассмотреть течение только в правой полуплоскости. Для определенности пусть правый вихрь вращается по часовой стрелке. Известно, что такая вихревая пара будет подниматься вверх со скоростью $U = \frac{\Gamma}{2\pi b}$, где Γ — интенсивность вихря $\Gamma(\mathbf{v}) = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \omega r^2 d\varphi = 2\pi\omega r_0^2$, ω — величина вихря.

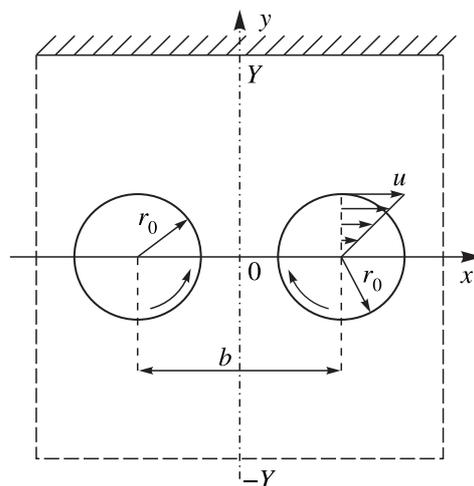


Рис. 1. Постановка задачи о динамике вихревой пары

Задача описывается уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\mathbf{g}}{g},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

где \mathbf{v} — вектор скорости с составляющими u, v соответственно вдоль осей x и y прямоугольной декартовой системы координат, выбранной как показано на рис. 1; p — давление; $Re = \frac{r_0 U_0}{\nu}$ — число Рейнольдса; $Fr = \frac{U_0^2}{gr_0}$ — число Фруда; r_0 — радиус вихря в момент времени $t = 0$; U_0 — скорость вихревого вращения при $t = 0$; ν — коэффициент кинематической вязкости; $\mathbf{g} = (0, -g)$, где g — ускорение свободного падения. Мы намеренно используем уравнения в примитивных переменных (\mathbf{v}, p) , чтобы в дальнейшем обобщить данный подход на случай течений стратифицированной жидкости и пространственных течений.

Начальные условия. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ внутри области начального вихря A частицы жидкости движутся со скоростью $\mathbf{v} = (u, v)$ и описываются уравнениями (18), а в остальной части площади жидкость находится в состоянии покоя $v = 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2} &\leq 1, \quad (x, y) \in A, \\ u(x, y) &= \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2} \cdot \text{sing}(y), \\ v(x, y) &= -\sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2} \cdot \text{sing}\left(x - \frac{b}{2}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Граничные условия. На левой границе ($x = 0$) используются условия симметрии. На верхней границе ставится условие, принятое в океанологии как приближение твердой крышки (твердой непроницаемой стенка с проскальзыванием). На нижней и правой границах, если считать их достаточно удаленными от вихря, ставятся условия покоя.

Для исследования влияния чисел Рейнольдса и Фруда на процесс формирования и динамику вихревой пары выполнен следующий набор расчетов (табл. 2). Во всех тестовых расчетах радиус вихря, горизонтальный и вертикальный размеры расчетной области, шаги пространственной сетки и шаг во времени были следующими: $x = 0-10$, $y = \pm 10$, $h_x = h_y = 0,1$, $\tau = 0,01$, $r_0 = 1$, $b = 2$.

Таблица 2. Варианты расчетов

	1	2	3	4	5	6	7	8
Re	—	—	—	—	—	100	100	1000
Fr	—	10	1	0,1	0,01	10	0,1	0,1

Поведение центральной точки главного вихря в рассматриваемой области для варианта 1 показано на рис. 2. Видно, что эта траектория не является линейной. Вихрь поднимается вверх к верхней границе, а затем перемещается вправо под твердой крышкой.

Более подробно результаты опубликованы в [Gushchin, Smirnova, 2020].

2.3.2. Моделирование гидравлического прыжка

Рассмотрим течение слоя жидкости толщины H по наклонной под углом α к горизонту поверхности со скоростью U , натекающего на препятствие высотой $h_{\text{пр}}$ (рис. 3). Структура поверхностной волны в таком течении зависит как от параметров набегающего потока (скорости U и высоты H), так и от геометрических характеристик преграды (высоты $h_{\text{пр}}$, длины $L_{\text{пр}}$, площади $S_{\text{пр}}$ и т. д.). Основными характерными параметрами задачи являются число Фруда $Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$ и относительная высота препятствия $k = \frac{h_{\text{пр}}}{H}$. Из эксперимента [Белоцерковский и др., 1985]

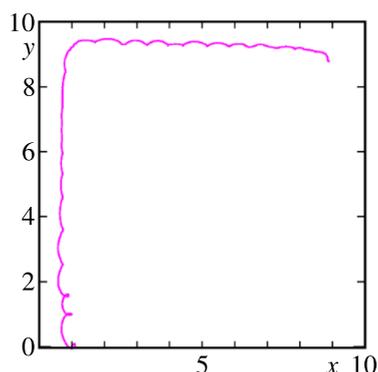


Рис. 2. Поведение центральной точки главного вихря в рассматриваемой области для варианта 1

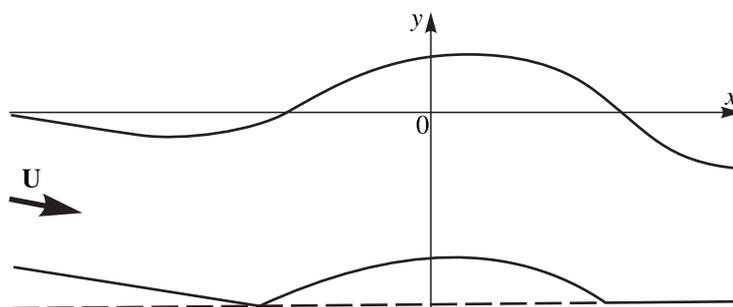


Рис. 3. Течение слоя жидкости около подводного препятствия

известно, что даже в режимах с опрокидыванием фронта волны области опрокидывания и пограничного слоя около препятствия разделены зоной квазипотенциального течения. Это позволяет сделать предположение о слабой зависимости режимов течения от вида граничных условий на поверхности препятствия. В приводимых ниже расчетах жидкость считалась невязкой.

Общая картина течения представлена на рис. 4, где приведены линии тока, полученные в результате численного эксперимента. Для сравнения на свободной поверхности крестиками отмечены точки, соответствующие экспериментальным данным [Белоцерковский и др., 1985]. Профили свободной поверхности, полученные численно и экспериментально, практически совпадают. Высота прыжка оказывается равной $1,7 \cdot H$, что хорошо согласуется с теоретическим значением $1,65 \cdot H$ [Stoker, 1959]. Отметим, что точка на свободной поверхности, где скатывающийся вихрь сталкивается с набегающим потоком, беспорядочно перемещается точно так же, как и в работе [Banner, Phillips, 1974]. Однако эти пульсации не приводят к каким-либо значительным изменениям параметров области опрокидывания.

На рис. 5 приведены профили продольной составляющей вектора скорости в различных сечениях. Сечение AA соответствует набегающему потоку. Как следует из результатов эксперимента, в указанном диапазоне чисел Фруда наличие эффектов вязкости около дна канала приводит к появлению пограничного слоя, который тем не менее отделен от области опрокидывания зоной квазипотенциального течения. Это позволяет пренебречь действием области пограничного слоя на область опрокидывания, т. е. исключить из рассмотрения эффекты вязкости около твердой поверхности. Измерения продольной составляющей вектора скорости течения показали наличие обратных токов в приповерхностном слое зоны опрокидывания (сечения BB, CC, DD) и их отсутствие вне ее (сечения EE, FF). Следовательно, можно предположить, что течение в зоне опрокидывания носит вихревой характер, что подтверждается результатами численного расчета при указанных выше параметрах течения в тех же сечениях, где проводилось экспери-

ментальное измерение профилей скорости (см. рис. 4). Отметим, что вне зоны пограничного слоя совпадение результатов достаточно хорошее. Максимальное различие не превосходит 7%, что лежит в пределах точности лабораторного эксперимента и численного расчета.

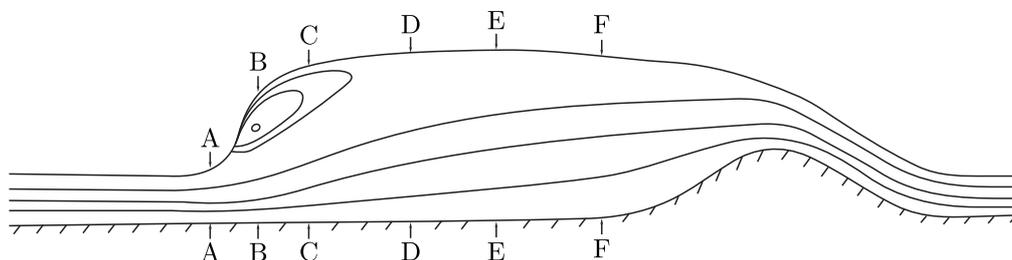


Рис. 4. $\psi = \text{const}$, $Fr^2 = 4,8$, $k = 1,4$, $\alpha = 1,5^\circ$

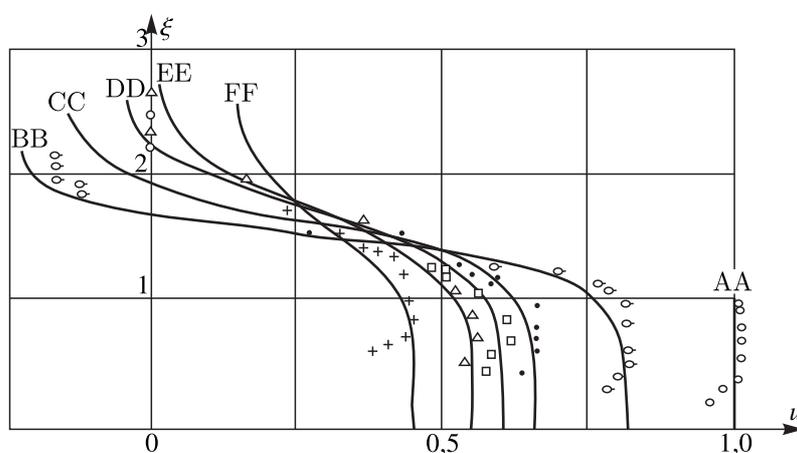


Рис. 5. Профили горизонтальной составляющей вектора скорости в различных вертикальных сечениях: значки — эксперимент, линии — расчеты

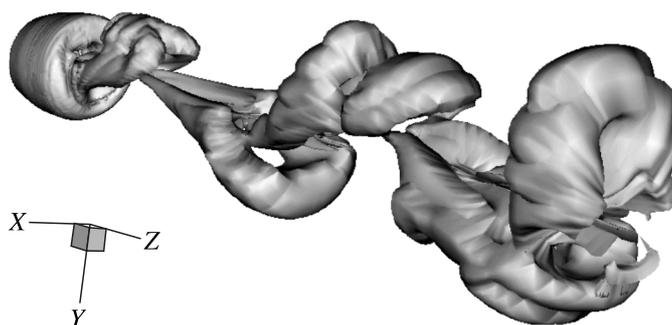


Рис. 6. Течение около сферы. $Re = 350$

2.3.3. Обтекание сферы однородной жидкостью

В однородной несжимаемой вязкой жидкости вихревая структура следа зависит от одного безразмерного параметра — числа Рейнольдса. Были промоделированы следующие режимы течений: 1) $Re \leq 20,5$ — стационарный, осесимметричный, безотрывный; 2) $20,5 < Re \leq 200$ — стационарный, осесимметричный, отрывный; 3) $200 < Re \leq 270$ — стационарный, неосесимметричный (двухнитевой след); 4) $270 < Re \leq 400$ — периодический нестационарный, характери-

зующийся периодическим формированием в ближнем следе вихревых петель, ориентированных в одну сторону (рис. 6); 5) $400 < Re \leq 3 \cdot 10^3$ — периодический нестационарный, с хаотической ориентацией вихревых петель в следе; 6) $3 \cdot 10^3 < Re \leq 5 \cdot 10^4$ — докритический режим (турбулентный след); 7) $5 \cdot 10^4 < Re \leq 5 \cdot 10^5$ — критический режим (ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на сфере; осредненный по времени коэффициент сопротивления сферы монотонно уменьшается от 0,45 до 0,15); 8) $Re > 5 \cdot 10^5$ — закритический режим течения.

2.3.4. Течение около кругового цилиндра (2D–3D-переход в топологии следа)

Рассматривается задача об обтекании кругового цилиндра конечной длины L (с периодическими граничными условиями на его торцах) равномерным на бесконечности потоком однородной несжимаемой вязкой жидкости. Таким образом, симулируется обтекание «бесконечного» кругового цилиндра. В экспериментах при $Re < 40$ в следе за цилиндром моделируется стационарное отрывное течение, симметричное относительно горизонтальной плоскости, проходящей через центральную ось цилиндра. При $40 < Re < 191$ вязкость жидкости уменьшается и реализуется новая степень свободы течения — отрывное течение за цилиндром остается двухмерным (картина течения одинакова во всех вертикальных плоскостях вдоль оси цилиндра z), но теряет стационарность. В следе формируется вихревая дорожка Кармана — бесконечные горизонтальные вихревые трубки с осями, параллельными оси z , как бы клонируют форму цилиндра, формируясь поочередно то в нижней, то в верхней полуплоскости следа. При $Re > 191$ вязкость жидкости еще уменьшается и последовательно реализуются все новые и новые степени свободы течения, все более усложняющие его топологию. Если при $Re = 40$ появляется нестационарность в направлении движения цилиндра x , то при $Re > 191$ на поверхности цилиндра развивается дополнительная нестационарность в поперечном направлении (вдоль оси z), приводящая к волновой форме линии первичного отрыва на цилиндре (с длиной периодичности λ вдоль оси z). В работах [Barkley, Henderson, 1996; König, Eckelmann, 1995; Persillon, Braza, 1998; Williamson, 1996] было показано, что при $191 < Re < 270$ реализуется режим течения «мода А» ($3,5d \leq \lambda \leq 4d$), а при $250 < Re < 400$ — «мода В» ($0,8d \leq \lambda \leq 1,0d$). В частности, впервые были найдены максимальные значения разности фаз вдоль оси цилиндра, приблизительно равные $0,1 \cdot T$ и $0,02 \cdot T$ для моды А и моды В соответственно (рис. 7), где T — период отрыва. λ — поперечный (вдоль оси цилиндра) размер периодических вихревых структур следа [Gushchin, Kostomarov, Matyushin, 2004].

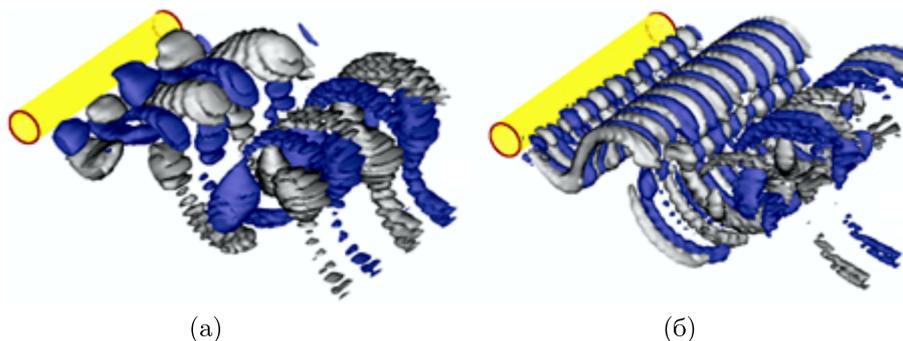


Рис. 7. Две изоповерхности потоковой компоненты завихренности ω_x для (а) $Re = 230$, $z_{\max} = 7,5 \cdot d$, $\frac{\lambda}{d} = 3,75$ (мода А) и (б) $Re = 320$, $z_{\max} = 7,5 \cdot d$, $\frac{\lambda}{d} = 0,83$ (мода В)

2.3.5. Пример расчета воздухопереноса в «чистой комнате»

Рассматривается проблема разработки эффективных методов и средств проектирования, контроля и управления воздушными и тепловыми потоками в «чистых комнатах», предназна-

ченных для производства изделий микроэлектроники, фармацевтики, медицины, биотехнологии и используемых в таких областях промышленности, как космическая, химическая, пищевая и т. п., а также в ожоговых центрах и родильных домах [Гушин, 1998а, 1998б]. Такой подход можно использовать на различных этапах создания чистых производственных помещений: аттестация помещений, экспертиза проекта, эскизное проектирование.

Пример математического моделирования воздушных потоков в действующей «чистой комнате» «Озон-1», предназначенной для производства изделий микроэлектроники, приведен на рис. 8. Скорость вертикальной подачи воздуха через всю поверхность потолка составляет 0,45 м/с. Скорости откачки воздуха из одиннадцати отверстий под фальшьполом различны (рис. 8, а). Математическое моделирование показало, что отклонение линий тока от вертикали в коридоре «чистой комнаты» «Озон-1» превышает предельно допустимые значения (см. рис. 8, б). В результате проведения нескольких численных экспериментов для различных расположений отверстий в полу было показано, что при помощи перемещения двух отверстий (см. рис. 8, в) отклонение линий тока от вертикали во всей «чистой комнате» «Озон-1» становится удовлетворительным (см. рис. 8, г). Таким образом, при помощи минимальных изменений конструкции пола «чистой комнаты» «Озон-1» удалось существенно улучшить ее характеристики.

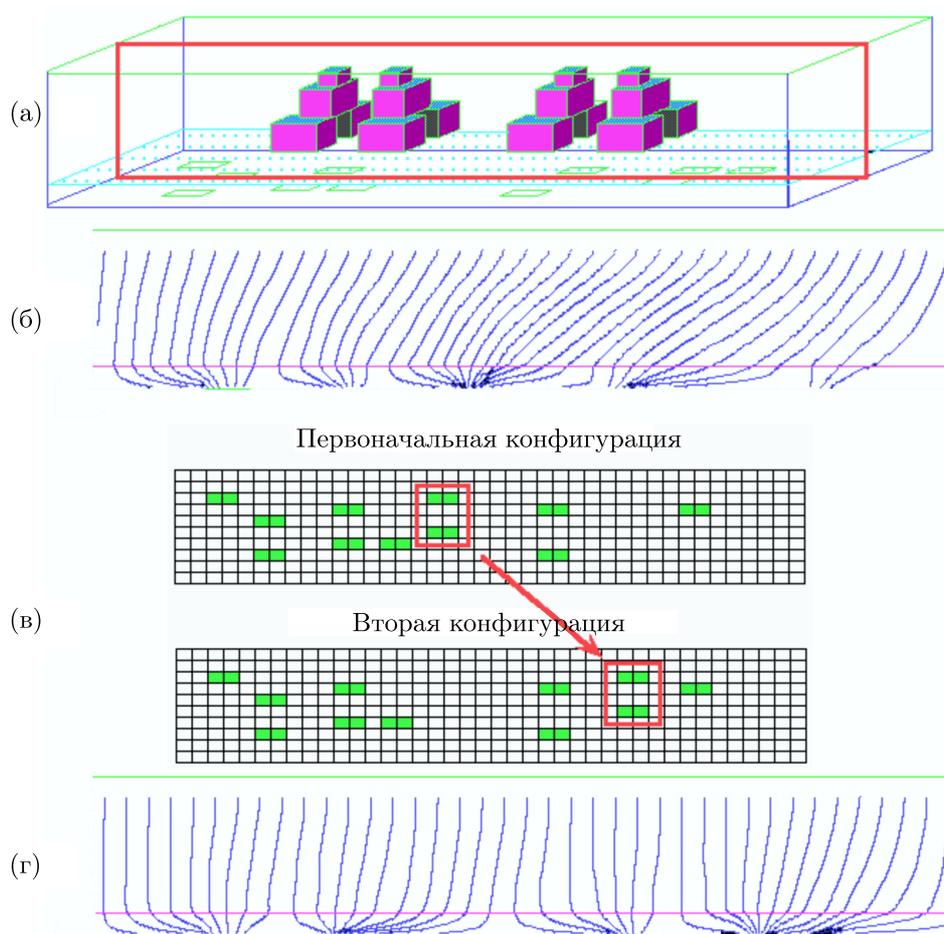


Рис. 8. «Чистая комната» «Озон-1»: а) первоначальная конфигурация; б) линии тока в вертикальной плоскости для первоначальной конфигурации комнаты; в) изменение конфигурации расположения вентиляционных отверстий в полу; г) линии тока в вертикальной плоскости для второй конфигурации расположения отверстий

3. Метод расщепления для стратифицированной жидкости

Изучение различного рода явлений и процессов, наблюдаемых в таких неоднородных средах, как атмосфера и океан, представляет как научный, так и практический интерес. Неоднородность этих сред связана с эффектами плавучести — наличием силы тяжести. Плотность среды меняется по вертикали. Известно, что плотность среды в морях и океанах зависит от температуры, давления и солёности. Мгновенное распределение гидрофизических параметров (плотности, температуры, солёности) по глубине никогда не бывает гладким, а носит ступенчатый характер: участки, где гидродинамические характеристики постоянны, сменяются участками с большими их градиентами. Это связано с тем, что в турбулентном потоке с сильно устойчивой стратификацией турбулентность распространена не повсеместно, а пятнами. Неоднородный и сильно анизотропный характер турбулентности в условиях сильной устойчивой стратификации был предсказан А. Н. Колмогоровым еще в конце 40-х годов. На существование блинообразных пятен турбулентности в океане было указано в [Phillips, 1973]. Пятна перемешанной жидкости — это следствие взаимодействия внутренних волн, которые при определенных условиях могут опрокидываться. Необходимо изучение динамики этих пятен. Другая интерпретация этой задачи — это срез поперечного сечения следа за движущимся в стратифицированной среде подводным объектом. Турбулентность сосредоточена в блинообразных областях — пятнах, простирающихся в горизонтальном направлении на расстояния, значительно превышающие их вертикальные размеры [Федоров, 1976; Turner, 1973; Scorer, 1978; Монин, Озмидов, 1981]. Эти блинообразные пятна оказываются резко ограниченными и долго живущими. Поэтому возникновение и развитие пятен перемешанной жидкости в стратифицированной среде представляет существенный интерес в связи с изучением тонкой структуры океана, а также исследованием динамики следа за движущимся подводным объектом.

Пятна эволюционируют, постепенно сплющиваясь и внедряясь в окружающую среду языками-интрузиями. Перемешанность жидкости в пятне создает в нем избыточное по сравнению с окружающей средой давление, которое и порождает движущую силу интрузии. Под влиянием этой силы происходит расплывание (коллапс) пятна.

Эта задача исследовалась аналитически [Као, 1976; Баренблатт, 1978], изучалась в лабораторных условиях [Schooley, Stewart, 1963; Wu, 1969; Зацепин и др., 1978], а с появлением приемлемых вычислительных машин стала объектом и математического моделирования [Кузнецов, Черных, 1973; Wessel, 1969; Joung, Hirt, 1972; Гуцин, 1981; Гуцин, Копысов, 1991].

В настоящее время известен целый ряд численных методов, разработанных для исследования течений неоднородной вязкой жидкости, например [Кузнецов, Черных, 1973; Wessel, 1969; Joung, Hirt, 1972; Гуцин, 1981]. Некоторые из них исторически основаны на решении уравнений Навье–Стокса в форме Гельмгольца (в переменных «вихрь – функция тока») [Кузнецов, Черных, 1973], что ограничивает область их применимости случаем двумерных течений. В последние годы все большее внимание уделяется разработке численных методов решения уравнений Навье–Стокса в переменных «вектор скорости – давление» [Wessel, 1969; Joung, Hirt, 1972; Гуцин, 1981]. Во всех работах, кроме [Кузнецов, Черных, 1973; Joung, Hirt, 1972], принимается приближение Буссинеска, согласно которому изменение плотности жидкости учитывается лишь в силах плавучести. В [Кузнецов, Черных, 1973] исследования проводятся для идеальной жидкости, а в [Joung, Hirt, 1972] рассматривается только случай слабой стратификации.

За прошедшие 40 лет с момента выхода нашей работы [Гуцин, 1981] в области математического моделирования подобных течений произошло много изменений. Предложены новые физические и математические модели [Гуцин и др., 2007; Гуцин, Матюшин, 2016]. Существенно повысилось качество методов решения поставленных задач [Белоцерковский, Гуцин, Коньшин, 1987; Гуцин, 2016]. А прогресс в развитии вычислительной технике колоссальный.

В данной работе нам хотелось бы адаптировать математическую модель [Гушин и др., 2007], использованную нами ранее в задачах обтекания сферы и кругового цилиндра стратифицированной жидкостью [Гушин и др., 2007; Гушин, Матюшин, 2016] к задаче о коллапсе (схлоповании) пятен, которую мы решали ранее без учета диффузии стратифицирующего компонента [Гушин, 1981; Гушин, Копысов, 1991]. Метод также может быть обобщен на случай турбулентных течений.

Система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Fr}} s \frac{\mathbf{g}}{g}, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s &= \frac{1}{\text{Sc} \cdot \text{Re}} \Delta s + \frac{v}{C}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}\tag{19}$$

где \mathbf{v} — вектор скорости с составляющими u, v соответственно вдоль осей x и y декартовой системы координат; ρ — плотность; p — давление; s — возмущение солёности; k_s — коэффициент диффузии соли; μ — коэффициент динамической вязкости, в рассматриваемой задаче предполагается, что $\mu = \text{const}$; $\mathbf{g} = (0, -g)$, g — ускорение свободного падения; число Рейнольдса $\text{Re} = \frac{\rho_0 R_0^2 N}{\mu}$; число Фруда $\text{Fr} = \frac{R_0 N^2}{g}$; число Шмидта $\text{Sc} = \frac{\mu}{\rho_0 k_s}$; $C = \frac{\Delta}{R_0}$ — отношение масштабов; N — частота Брента–Вайсяля.

3.1. Схема расщепления, конечно-разностная схема

Для исследования течений стратифицированной жидкости используется одна из последних версий МЕРАНЖ. Конечно-разностная схема этого метода обладает такими свойствами, как второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, минимальная схемная вязкость и дисперсия, работоспособная в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Фруда и, что особенно важно при решении подобных задач, монотонность [Гушин, Смирнова, 2020].

Пусть в некоторый момент времени $t_n = n \cdot \tau$, где τ — величина шага по времени, n — число шагов, известны поля скорости \mathbf{v} , давления p и возмущения солёности s . Тогда схему нахождения неизвестных функций в момент времени $t_{n+1} = (n+1) \cdot \tau$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\tau} = -(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}^n + \frac{1}{\text{Fr}} s^n \frac{\mathbf{g}}{g},\tag{20}$$

$$\tau \Delta p = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}},\tag{21}$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\tau} = -\nabla p,\tag{22}$$

$$\frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} = -(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla) s^n + \frac{1}{\text{Sc} \cdot \text{Re}} \Delta s^n + \frac{v_y^{n+1}}{C}.\tag{23}$$

На I этапе (20) предполагается, что перенос количества движения (импульса единицы массы) осуществляется только за счет конвекции, диффузии и сил плавучести. На II этапе (21) по найденному промежуточному полю скорости $\tilde{\mathbf{v}}$ с учетом условия солёности вектора скорости \mathbf{v}^{n+1} из решения уравнения Пуассона находится поле давления. На III этапе (22) предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления (конвекция и диффузия отсутствуют). На IV этапе (23) по найденному полю скорости \mathbf{v}^{n+1} рассчитывается поле возмущения солёности.

Конечно-разностная схема аналогична случаю однородной жидкости. Для 2D-случая схема подробно описана в работе [Гушин, Смирнова, 2020].

3.2. Некоторые примеры решенных задач

3.2.1. Моделирование отрывных течений стратифицированной вязкой жидкости около кругового цилиндра

Для прямого численного моделирования отрывных течений линейно стратифицированной по плотности вязкой жидкости около кругового цилиндра используются уравнения (19), записанные либо в полярной (R, θ) (2D-случай), либо в цилиндрической (R, θ, z) (3D-случай) системах координат: $x = R \cdot \cos \theta$, $y = R \cdot \sin \theta$, $z = z$.

На рис. 9, а приведена типичная теневая картина ламинарного стратифицированного течения около цилиндра при $Fr = 0,16$ ($Re = 25$), наблюдаемая в эксперименте при времени $10 \cdot T_b$, прошедшем после импульсного старта цилиндра ($d = 2,5$ см, $T_b = 25,2$ с). Это цветное теневое изображение, полученное методом «вертикальные “щель-нить” в фокусе», иллюстрирует структуру поля модуля градиента плотности $\frac{\partial \rho}{\partial R}$, визуализируя внутренние волны и высокоградиентную прослойку (скачок) плотности в следе за цилиндром (на линии движения его геометрического центра). Более того, на рис. 9, а визуализированы профили скорости в опережающем возмущении течения и в следе позади цилиндра. На рис. 9, б приведены изолинии возмущения солёности, рассчитанные при тех же параметрах, что и в эксперименте ($Fr = 0,16$, $Re = 25$, $d = 2,5$ см, $T_b = 25,2$ с, $t = 10 \cdot T_b$) [Гущин и др., 2007]. Здесь было получено хорошее согласование с экспериментом. Впервые были численно промоделированы высокоградиентные прослойки (скачки) плотности в следе за цилиндром (на линии движения геометрического центра цилиндра), ранее обнаруженные в эксперименте (рис. 9, а).

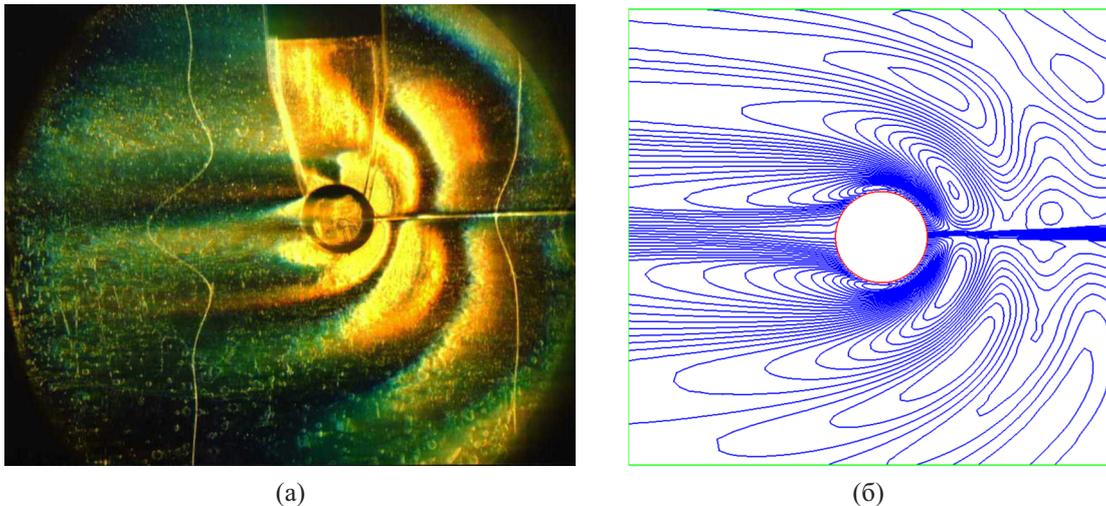


Рис. 9. Картины течений стратифицированной вязкой жидкости около поперечно обтекаемого кругового цилиндра: $Fr = 0,16$, $Re = 25$; а) теневая фотография; б) изолинии возмущения солёности S

3.2.2. Режимы течений стратифицированной вязкой жидкости около сферы

Несмотря на имеющиеся экспериментальные [Lin et al., 1992] и теоретические данные об обтекании сферы равномерным потоком стратифицированной вязкой жидкости, многие детали течения и его трансформации при уменьшении числа Fr остаются неисследованными. Математическое моделирование течения стратифицированной вязкой жидкости около сферы и визуализация пространственных вихревых структур этого течения позволяют изучить эти детали [Гущин, Матюшин, 2011; Matyushin, Gushchin, 2009]. На основании расчетов построена следующая классификация режимов течений стратифицированной вязкой жидкости около сферы:

1) $10 < Fr < \infty$ — «однородный» режим; 2) $1,5 \leq Fr \leq 10$ — след с четырьмя доминирующими вихревыми нитями, соединенными с вихревой оболочкой сферы (квазиоднородный режим); 3) $0,9 < Fr < 1,5$ — несимметричный прикрепленный вихрь в рециркуляционной области; 4) $0,6 < Fr \leq 0,9$ — две симметричные вихревые петли в рециркуляционной области; 5) $0,4 \leq Fr \leq 0,6$ — отсутствие рециркуляционной области; 6) $0,25 < Fr < 0,4$ — новая рециркуляционная область; 7) $Fr \leq 0,25$ — вихри с вертикальной осью вращения в новой рециркуляционной области, ограниченные внутренними волнами сверху и снизу [Гуцин, Матюшин, 2011]. Данная классификация при $Fr < 0,4$ совпадает с классификацией, приведенной в [Lin et al., 1992], а при $Fr > 0,4$ уточняет ее. Если сравнивать зависимость полученных вертикальных углов первичного отрыва от Fr с экспериментальными данными [Lin et al., 1992] при $Re = 100$, то при $Fr < 0,3$ и $Fr > 1,5$ наблюдается хорошее согласование с экспериментом.

3.2.3. Моделирование динамики пятен в стратифицированной среде

Согласно модели, предложенной в [Баренблатт, 1978], возникновение и развитие турбулентности в устойчиво стратифицированной по плотности жидкости неотделимы от внутренних волн и происходят следующим образом. Под действием внешних сил в стратифицированной жидкости возникают внутренние волны большого масштаба. В результате их нелинейного взаимодействия и последующего опрокидывания или потери устойчивости возникают области перемешанной жидкости — пятна (иногда их называют зонами смешения). Эти пятна перемешанной жидкости эволюционируют, постепенно сплющиваясь (схлопывание, или коллапс, пятен), что в свою очередь приводит к образованию новых пятен, и т. д.

Рассмотрим плоскую нестационарную задачу о течении, возникающем при коллапсе (схлопывании по вертикали) области однородной жидкости A , окруженной устойчиво и непрерывно стратифицированной по плотности (для определенности — по линейному закону) жидкостью (рис. 10).

Течение развивается в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения g .

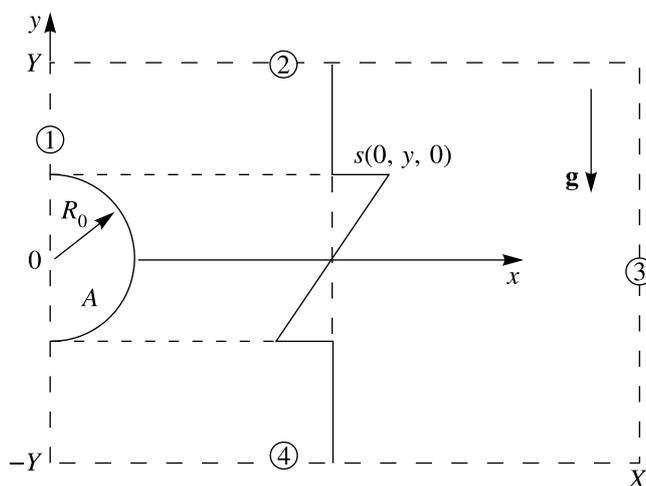


Рис. 10. Постановка задачи о коллапсе пятна. Начальные условия для возмущения солёности

В силу симметрии задачи относительно плоскости $x = 0$, естественно искать решение только в одной полуплоскости, например при $x \geq 0$. Симметрия относительно оси x не предполагается. Решение задачи будем искать в прямоугольной области $\{x, y: 0 \leq x \leq X, -Y \leq y \leq Y\}$. На левой границе (линия 1 на рис. 1) этой области ставятся условия симметрии течения:

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Верхняя (линия 2), нижняя (линия 4) и правая (линия 3) границы должны быть выбраны на достаточно большом расстоянии от источника возмущений (от пятна) так, чтобы постановка каких-либо граничных условий на этих границах, необходимых для решения задачи, не оказывала существенного влияния на картину течения.

Пусть радиус пятна $R_0 = 1$. Расчеты выполнены в области с размерами $X = 15$, $Y = 5$ при следующих значениях коэффициентов и параметров: $\frac{\mu}{\rho_0} = 0,01$ см²/с, $k_s = 1,41 \cdot 10^{-5}$ см²/с, $N = 1$ с⁻¹, $T_b = \frac{2\pi}{N}$ с, $\Lambda = 10$ см, $C = 10$, $Re = 100$, $Fr = 0,1$, $Sc = 709,2$, что близко к лабораторным экспериментальным условиям. В качестве граничных условий на верхней, нижней и правой границах расчетной области, в предположении, что они достаточно удалены от пятна, выбрано состояние покоя, т.е. $u = v = s = 0$. Расчетная область была покрыта равномерной сеткой с шагами в обоих направлениях $h_x = h_y = 0,1$.

Здесь следует также отметить, что изменение линейных размеров пятна со временем происходит немонотонно (рис. 11). Это связано с генерацией и динамикой внутренних волн в процессе коллапса пятна, и впервые было обнаружено в нашей работе [Гущин, 1981].

На рис. 11 приведены результаты сравнения динамики вертикальных размеров пятна с расчетами [Гущин, 1981].

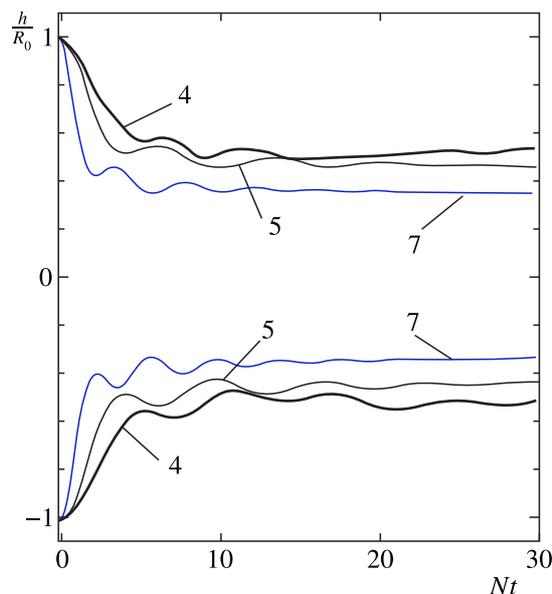


Рис. 11. Результаты сравнения динамики линейных размеров пятна данной работы: кривые 5 — $X = 15$, $Y = 5$, 150×100 , $h_x = 0,1$, $h_y = 0,1$; кривые 7 — $X = 30$, $Y = 10$, 300×200 , $h_x = 0,1$, $h_y = 0,1$; с расчетами [Гущин, 1981] — кривые 4

Подробнее результаты обсуждаются в работе [Гущин, Смирнова, 2020].

3.2.4. Цепочка пятен

В данном разделе рассматривается задача о динамике цепочки пятен перемешанной жидкости в стратифицированной среде. Изначально цепочка пятен расположена на горизонтальном уровне с периодическими пограничными условиями вдоль горизонтальной оси. Под влиянием гидродинамических сил эта цепочка трансформируется в полосу шириной $\frac{\pi}{2}$, если радиус пятна 1. Соленость выбирается в качестве стратифицирующего компонента, точно так же, как она может быть реализована в лабораторных условиях. Эта задача представляет интерес как для теоретиков с точки зрения теоретической гидродинамики стратифицированной жидкости, так и для

экспериментаторов с точки зрения времени создания стационарного поля. Задача также представляет интерес для ученых-вычислителей с точки зрения проверки качества вычислительных алгоритмов.

Задача решается в прямоугольной области $\{x, y: 0 \leq x \leq X, -Y \leq y \leq Y\}$, которая показана на рис. 12. На левой и правой границах области (линии 1, 3, рис. 12) заданы условия периодичности течения. На верхней границе задано условие твердой крышки (линия 2, рис. 12). На нижней границе области (линия 4, рис. 12) задано состояние покоя. Используется стандартная схема расщепления и конечно-разностная схема [Гуцин, Смирнова, 2020а].

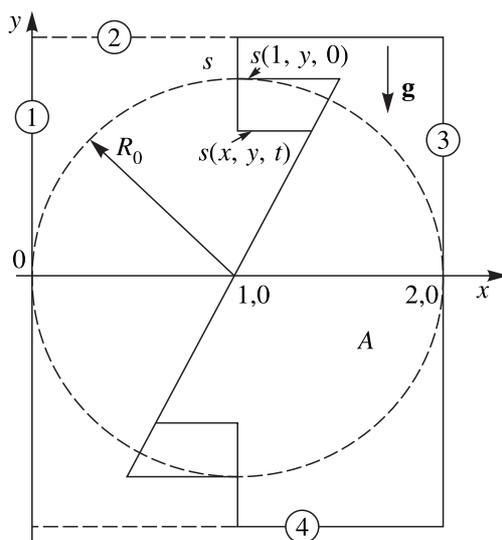


Рис. 12. Начальное $s(1, y, 0)$ и установившееся $s(x, y, t)$ поля возмущения солёности

Проведено численное исследование динамики цепочки пятен перемешанной в стратифицированной вязкой жидкости с целью выявления закономерностей динамики при различных числах Рейнольдса и Фруда (табл. 3).

Результаты численного исследования дополнены изображениями изоклин возмущения солёности и функции тока. На рисунках изоклины показаны цветом. Шкала возмущения солёности и функции тока соответствует цветам радуги.

Таблица 3. Варианты расчета численного исследования динамики цепочки пятен

№	1	2	3	4	5	6	7
Re	100	200	316	500	1000	3162	5000
Fr	0,001	0,004	0,01	0,025	0,1	1	2,5

Математическое моделирование динамики цепочки пятен перемешанной жидкости показало следующее. В вариантах 2–7 (табл. 3) цепочка круглых пятен под действием поля силы тяжести преобразуется в горизонтальную полосу. А при малых числах Рейнольдса и Фруда, как в варианте 1 (табл. 3), цепочка пятен начинает преобразовываться в горизонтальную полосу, но пятно растворяется в окружающей среде раньше, чем приобретает устойчивую форму ровной полосы.

Рассмотрим подробнее характерные особенности динамики цепочки пятен на примере варианта 4 (табл. 3), где $R_0 = 1$, $\frac{\mu}{\rho_0} = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$, $k_s = 1,41 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$, $Sc = 709,2$, $Re = 500$, $Fr = 0,025$.

В начальный момент времени $t = 0$ возмущение солёности внутри круглых пятен распределено горизонтальными слоями (рис. 13, *a*). В окружающей среде возмущение солёности $s = 0$.

Под влиянием поля силы тяжести с течением времени состояние цепочки пятен изменяется. Круглое пятно начинает постепенно сплющиваться, но сохраняет в середине горизонтальные изоклины возмущения солёности (рис. 13, *a-c*). Через $t = 1,5$ в центральной части образуются небольшие пятна возмущения солёности (рис. 13, *c*). Эти окрестные пятна образуются над и под центром основного пятна, а также на стыке пятен. Соседние окрестные пятна чередуются по уровню возмущения солёности. Через $t = 3$ окрестные пятна становятся более четкими из-за увеличения перепадов возмущения солёности, и образуется прогиб центральной части основного пятна (рис. 13, *d*). Прогиб сначала увеличивается, а затем к $t = 4$ уменьшается (рис. 13, *e*). Рядом с ними образуется несколько новых пятен. Через $t = 6$ основное пятно становится выпуклым (рис. 13, *f*).

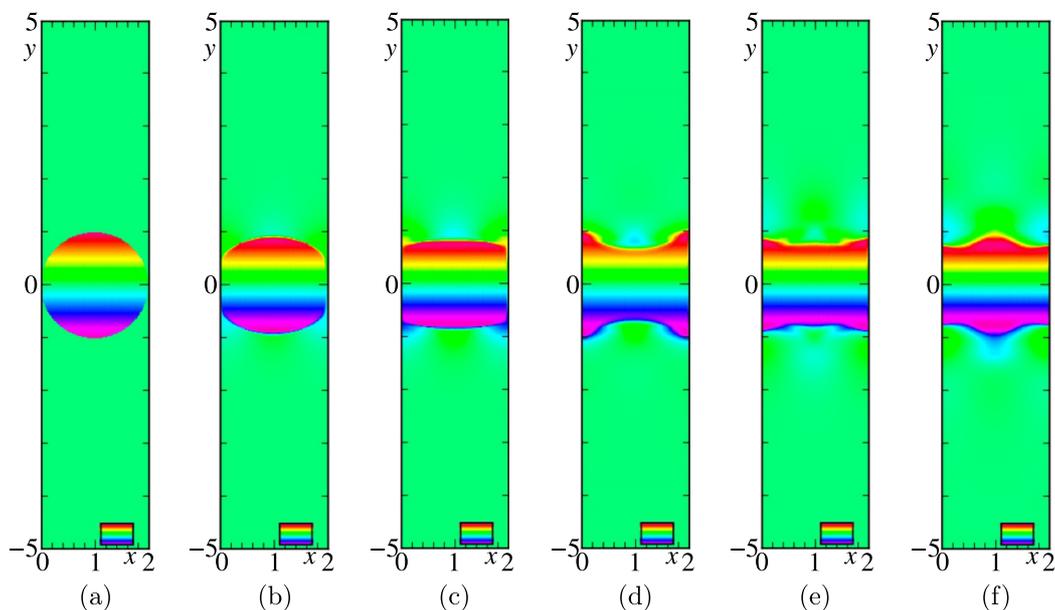


Рис. 13. Динамика поля возмущения солёности при коллапсе цепочки пятен для параметров $R_0 = 1$, $\frac{\mu}{\rho_0} = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$, $k_s = 1,41 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$, $Sc = 709,2$, $Re = 500$, $Fr = 0,025$: а) $t = 0$; б) $t = 1$; в) $t = 1,5$; д) $t = 3$; е) $t = 4$; ф) $t = 6$

В период с $t = 3$ по $t = 20$ в центре расчетной области наблюдаются заметные колебания пятна. Окрестные пятна становятся более четкими и увеличиваются в размере. Пятно приобретает форму, близкую к горизонтальной полосе. Но по-прежнему полоса сначала выгибается, затем выпрямляется, становится выпуклой и снова выгибается (рис. 14, *a-e*). Колебания постепенно затухают. Через $t = 9$ над полосой и под полосой почти вдвое увеличивается зона возмущения солёности и увеличиваются перепады возмущения солёности в этой области (рис. 14, *c*). Окрестные пятна увеличиваются и располагаются в два ряда над и под полосой. Соседние окрестные пятна чередуются в шахматном порядке по уровню возмущения солёности.

К моменту времени $t = 20$ центральная часть приобретает все более отчетливые очертания горизонтальной полосы (рис. 14, *e*). К этому времени возмущение солёности распространяется еще дальше и занимает всю расчетную область. Колебания центральной части постепенно затухают. Этот процесс вызывает постепенное затухание окрестных возмущений солёности в периферийной области (рис. 15, *a, b*). Заметим, что существенная динамика цепочки пятен длится

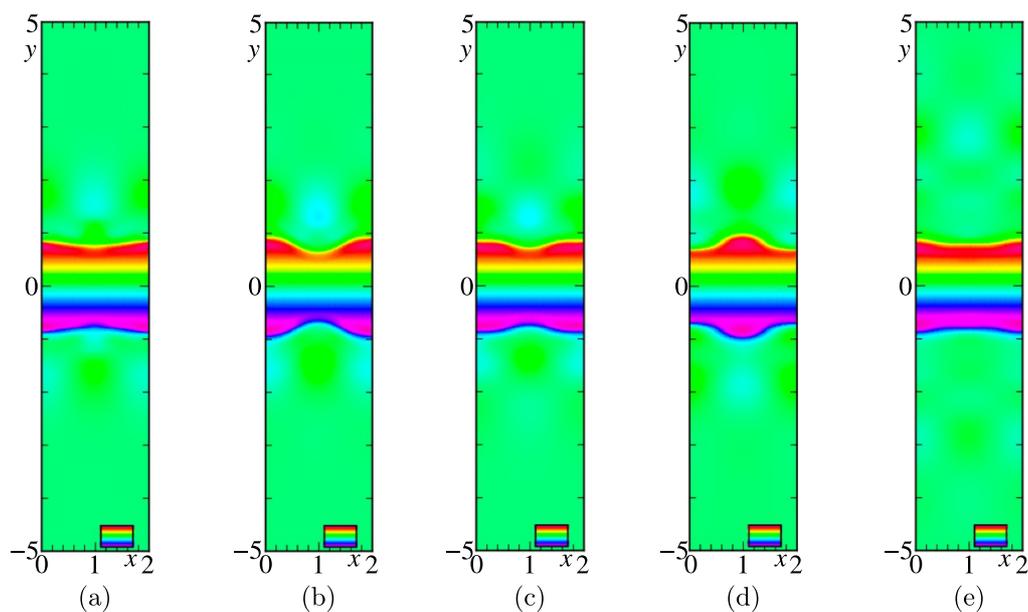


Рис. 14. Динамика поля возмущения солености при коллапсе цепочки пятен для параметров $R_0 = 1$, $\frac{\mu}{\rho_0} = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$, $k_s = 1,41 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$, $Sc = 709,2$, $Re = 500$, $Fr = 0,025$: а) $t = 7$; б) $t = 8$; в) $t = 9$; д) $t = 11$; е) $t = 20$

до $t = 60$ (рис. 15, б), а затухание возмущения солености и установление среды занимает более продолжительное время — до $t = 140$ (рис. 15, ф).

В итоге через $t = 140$ цепочка пятен трансформируется в горизонтальную полосу толщиной $\frac{\pi}{2}$ (рис. 15, ф). Толщина полосы зависит от начального радиуса пятна $R_0 = 1$. Изоклины возмущения солености располагаются горизонтально по всей длине полосы.

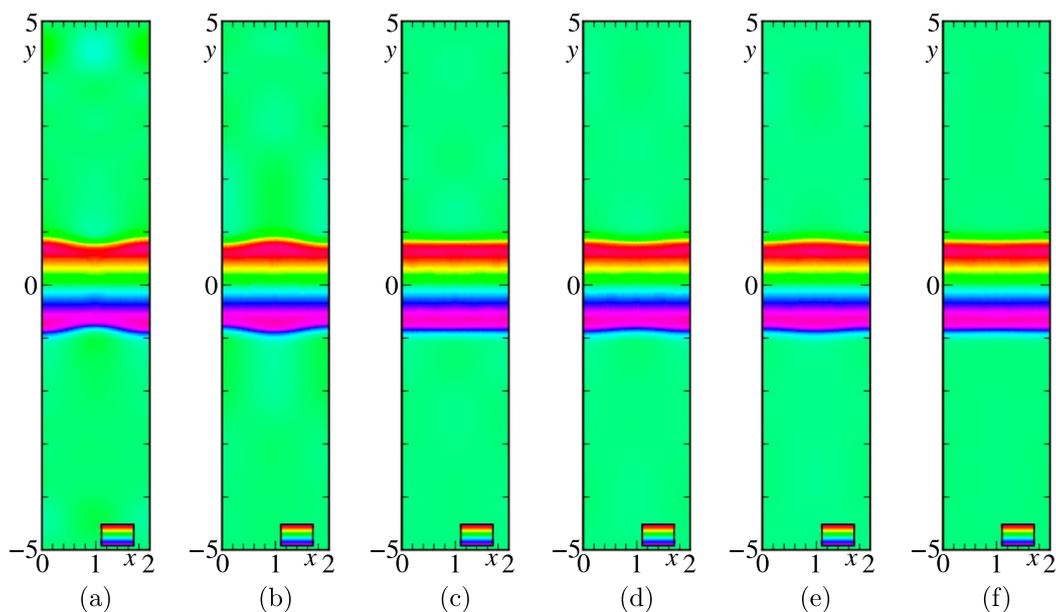


Рис. 15. Динамика поля возмущения солености при коллапсе цепочки пятен для параметров $R_0 = 1$, $\frac{\mu}{\rho_0} = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$, $k_s = 1,41 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$, $Sc = 709,2$, $Re = 500$, $Fr = 0,025$: а) $t = 40$; б) $t = 60$; в) $t = 80$; д) $t = 100$; е) $t = 120$; ф) $t = 140$

Таким образом, выявлено, что динамика цепочки пятен делится на три стадии. На первой стадии динамики пятно сплющивается и приобретает форму выгнутой полосы. На второй стадии динамики выгнутая полоса совершает колебательные движения, со временем колебания уменьшаются. На третьей стадии полоса становится горизонтальной, одинаковой ширины.

4. Заключение

Описано развитие метода расщепления по физическим факторам для исследования течений несжимаемой жидкости (МЕРАНЖ), прошедшее за последние 50 лет. Гибридная явная конечно-разностная схема метода основана на модифицированной схеме с центральными разностями (МСЦР) и модифицированной схеме с ориентированными разностями (МСОР) со специальным условием переключения в зависимости от знака скорости переноса и знаков первой и второй разностей переносимых функций. Показано применение данного метода для решения некоторых задач: пространственный поток около сферы и кругового цилиндра для случаев однородной и стратифицированной жидкостей (в широком диапазоне безразмерных параметров задачи, включая переходные режимы обтекания (2D–3D-переход, ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое)); плоскостная задача течения жидкости со свободной поверхностью; динамика вихревой пары в воде; коллапс пятен в стратифицированной жидкости; моделирование воздухо-, тепло и массопереноса в «чистых производственных помещениях» (Clean Rooms), предназначенных для производства изделий микроэлектроники, фармацевтики, медицины и биотехнологии.

Благодарности

В заключение автор благодарит сотрудников ИАП РАН, студентов МФТИ (ГУ) и Международного института информационных технологий (г. Пуна, Индия), принимавших участие в данной работе на разных этапах, а также академика РАН О. М. Белоцерковского за предложенную 50 лет назад тему и постоянное внимание к этой работе.

Список литературы (References)

- Баренблатт Г. И.* Динамика турбулентных пятен и интрузии в устойчиво-стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. — 1978. — Т. 14, № 2. — С. 195–205.
Barenblatt G. I. Dinamika turbulentnykh pyaten i intruzii v ustoychivo-stratifikirovannoy zhidkosti [Dynamics of turbulent spots and intrusions in stably stratified fluid] // Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz. Atmos. Okeana. — 1978. — Vol. 14, No. 2. — P. 195–205 (in Russian).
- Белоцерковский О. М., Бурнин Е. Е., Гуцин В. А., Коньшин В. Н., Красников Ю. Г., Ураков П. Я.* Течение жидкости через преграду с опрокидыванием фронта волны // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1985. — № 3. — С. 103–106.
Belotserkovskii O. M., Burynin E. E., Gushchin V. A., Kon'shin V. N., Krasnikov Yu. G., Urakov P. Ya. Flow of a fluid across an obstacle with breaking of the wave front // Fluid Dynamics. — 1985. — Vol. 20. — P. 423–426. (Original Russian paper: *Belotserkovskii O. M., Burynin E. E., Gushchin V. A., Kon'shin V. N., Krasnikov Yu. G., Urakov P. Ya.* Tечение zhidkosti cherez pregradu s oprokidyvaniem fronta volny // Izv. AS USSR, Mech. gidkosti i gaza. — 1985. — No. 3. — P. 103–106.)
- Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Коньшин В. Н.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // ЖВМ и МФ. — 1987. — Т. 27, № 4. — С. 594–609.
Belotserkovskii O. M., Gushchin V. A., Kon'shin V. N. The splitting method for investigating flows of a stratified liquid with a free surface // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1987. — Vol. 27, No. 2. — P. 181–191. (Original Russian paper: *Belotserkovskii O. M., Gushchin V. A., Kon'shin V. N.* Metod rashchepleniya dlya issledovaniya techenii stratifikirovannoi zhidkosti so svobodnoi poverhnostyu // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1987. — Vol. 27, No. 4. — P. 594–609.)

- Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Щенников В. В.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1975. — Т. 15, № 1. — С. 197–207.
- Belotserkovskii O. M., Gushchin V. A., Shchennikov V. V.* Use of the splitting method to solve problems of the dynamics of a viscous incompressible fluid // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1975. — Vol. 15, No. 1. — P. 190–200. (Original Russian paper: *Belotserkovskii O. M., Gushchin V. A., Shchennikov V. V.* Metod rashchepleniya v primenenii k resheniyu zadach dinamiki вязкой neszhimaemoi zhidkosti // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1975. — Vol. 15, No. 1. — P. 197–207.)
- Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики. — Матем. сб. — 1959. — Т. 47. — С. 271–306.
- Godunov S. K.* Raznostnyy metod chislennogo rascheta razryvnykh resheniy gidrodinamiki [A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics] // Matem. Sb. — 1959. — Vol. 47, No. 89. — P. 271–306 (in Russian).
- Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н., Шишкова Т. В.* Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1965. — Т. 5, № 5. — С. 938–944.
- Gol'din V. Ya., Kalitkin N. N., Shishova T. V.* Non-linear difference schemes for hyperbolic equations // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1965. — Vol. 5, No. 5. — P. 229–239. (Original Russian paper: *Gol'din V. Ya., Kalitkin N. N., Shishova T. V.* Nelineinye raznostnye shemy dlya giperbolicheskikh uravnenii // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1965. — Vol. 5, No. 5. P. 938–944.)
- Гуцин В. А.* Пространственное обтекание трехмерных тел потоком вязкой жидкости // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1976. — Т. 16, № 2. — С. 529–534.
- Gushchin V. A.* Flow of a viscous fluid past three-dimensional bodies // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 16, No. 2. — P. 251–256. (Original Russian paper: *Gushchin V. A.* Prostranstvennoe obtekanie trehmernykh tel potokom вязкой zhidkosti // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1976. — Vol. 16, No. 2. — P. 529–534.)
- Гуцин В. А.* Метод расщепления для задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. — 1981. — Т. 21, № 4. — С. 1003–1017.
- Gushchin V. A.* The splitting method for problems of the dynamics of an inhomogeneous viscous incompressible fluid // USSR Comput. Math. Math. Phys. — 1981. — Vol. 21, No. 4. — P. 190–204. (Original Russian paper: *Gushchin V. A.* Metod rashchepleniya dlya zadach dinamiki neodnorodnoi вязкой neszhimaemoi zhidkosti // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1981. — Vol. 21, No. 4. — P. 1003–1017.)
- Гуцин В. А.* Применение математического моделирования для проектирования чистых комнат и их элементов // Автоматизация проектирования. — 1998а. — № 1 (7). — С. 10–14.
- Gushchin V. A.* Primenenie matematicheskogo modelirovaniya dlay proektirovaniya chistykh komnat i ih elementov [Application of mathematical modeling for the design of clean rooms and their elements] // Avtomatizatsiya Proektirovaniya. — 1998а. — No. 1 (7). — P. 10–14 (in Russian).
- Гуцин В. А.* Применение математического моделирования для проектирования чистых комнат и их элементов // Автоматизация проектирования. — 1998б. — № 2 (8). — С. 3–8.
- Gushchin V. A.* Primenenie matematicheskogo modelirovaniya dlay proektirovaniya chistykh komnat i ih elementov [Application of mathematical modeling for the design of clean rooms and their elements] // Avtomatizatsiya Proektirovaniya. — 1998б. — No. 2 (8). — P. 3–8 (in Russian).
- Гуцин В. А.* Об одном семействе квазимонотонных разностных схем второго порядка аппроксимации // Мат. моделирование. — 2016. — Т. 28, № 2. — С. 6–18.
- Gushchin V. A.* Family of quasi-monotonic finite-difference schemes of the second-order of approximation // Math. Models Comput. Simul. — 2016. — Vol. 8, No. 5. — P. 487–496. (Original Russian paper: *Gushchin V. A.* Ob odnom semeistve kvazimonotonnykh raznostnykh shem vtorogo poryadka аппроксимации // Mat. Modelirovanie. — 2016. — Vol. 28, No. 2. — P. 6–18.)
- Гуцин В. А., Копысов А. Н.* Динамика сферической зоны смешения в стратифицированной жидкости и ее акустическое излучение // ЖВМ и МФ. — 1991. — Т. 31, № 6. — С. 850–863.
- Gushchin V. A., Kopysov A. N.* Dynamics of the spherical mixture zone in stratified fluid and its acoustic radiation // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1991. — Vol. 31, No. 6. — P. 51–60. (Original Russian paper: *Gushchin V. A., Kopysov A. N.* Dinamika sfericheskoi zony smesheniya v stratifitsirovannoi zhidkosni i ee akuaticheskoe izluchenie // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. — 1991. — Vol. 31, No. 6. — P. 850–863.)
- Гуцин В. А., Матюшин П. В.* Математическое моделирование и визуализация трансформации вихревой структуры течения около сферы при увеличении степени стратификации жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — Т. 51, № 2. — С. 268–281.
- Gushchin V. A., Matyushin P. V.* Numerical simulation and visualization of vortical structure transformation in the flow past a sphere at an increasing degree of stratification // Comput. Math. Math. Phys. — 2011. — Vol. 51, No. 2. — P. 251–263. (Original Russian paper: *Gushchin V. A., Matyushin P. V.* Matematicheskoe modelirovanie

- i vizualizatsiya transformatsii vkhrevoi struktury techeniya okolo sfery pri uvelichenii stepeni stratifikatsii zhidkosti // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 2011. — Vol. 51, No. 2. — P. 268–281.)
- Гущин В. А., Матюшин П. В. Моделирование и исследование течений стратифицированной жидкости около тел конечных размеров // ЖВМ и МФ. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 1049–1063.
Gushchin V. A., Matyushin P. V. Simulation and study of stratified flows around finite bodies // Comput. Math. Math. Phys. — 2016. — Vol. 56, No. 6 — P. 1034–1047. (Original Russian paper: *Gushchin V. A., Matyushin P. V.* Modelirovanie i issledovanie techenii stratifitsirovannoi zhidkosti okolo tel konechnogo razmera // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1049–1063.)
- Гущин В. А., Миткин В. В., Рождественская Т. И., Чашечкин Ю. Д. Численное и экспериментальное исследование тонкой структуры течения стратифицированной жидкости вблизи кругового цилиндра // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 2007. — Т. 48, № 1. — С. 43–54.
Gushchin V. A., Mitkin V. V., Rozhdestvenskaya T. I., Chashechkin Yu. D. Numerical and experimental study of the fine structure of a stratified fluid over a circular cylinder // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — Vol. 48, No. 1. — P. 34–43. (Original Russian paper: *Gushchin V. A., Mitkin V. V., Rozhdestvenskaya T. I., Chashechkin Yu. D.* Chislwnnoe i eksperimentalnoe issledovanie tonkoi struktury techeniya stratifitsirovannoi zhidkosti vblizi krygovogo tzilindra // Zhurn. Prikl. Meh. i Tehn. Fiz. — 2007. — Vol. 48, No. 1. — P. 43–54.)
- Гущин В. А., Смирнова И. А. Математическое моделирование динамики пятен в стратифицированной среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, № 5. — С. 900–916.
Gushchin V. A., Smirnova I. A. Mathematical Modeling of Spot Dynamics in a Stratified Medium // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2020. — Vol. 60, No. 5. — P. 879–894. (Original Russian paper: *Gushchin V. A., Smirnova I. A.* Matematicheskoe modelirovanie dinamiki pyaten v stratifitsirovannoi srede // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 2020. — Vol. 60, No. 5. — P. 900–916.)
- Жмакин А. И., Фурсенко А. А. Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1980. — Т. 20, № 4. — С. 1021–1031.
Zhmakin A. I., Fursenko A. A. On a monotonic shock-capturing difference scheme // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1980. — Vol. 20, No. 4. — P. 218–227. (Original Russian paper: *Zhmakin A. I., Fursenko A. A.* Ob odnoi monotonnoi raznostnoi sheme skvoznogo scheta // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1980. — Vol. 20, No. 4. — P. 1021–1031.)
- Зацепин А. Г., Федоров К. Н., Воропаев С. И., Павлов А. М. Экспериментальное исследование растекания перемешанного пятна в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. — 1978. — Т. 14, № 2. — С. 234–237.
Zatsepin A. G., Fedorov K. N., Voropaev S. I., Pavlov A. M. Eksperimental'noye issledovaniye rastekaniya peremeshannogo pyatna v stratifitsirovannoy zhidkosti [Experimental study of spreading a mixed spot in stratified fluid] // Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz. Atmos. Okeana. — 1978. — Vol. 14, No. 2. — P. 234–237 (in Russian).
- Колган В. М. Применение оператора сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1978. — Т. 18, № 5. — С. 1340–1345.
Kolgan V. P. The use of smoothing operators in difference schemes of a high order of accuracy // USSR Comput. Math. Math. Phys. — 1978. — Vol. 18, No. 5. — P. 267–273. (Original Russian paper: *Kolgan V. P.* Primenenie operatora sglazhivaniya v raznostnyh shemah vysokogo poryadka tochnosti // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1978. — Vol. 18, No. 5. — P. 1340–1345.)
- Копченков В. И., Крайко А. Н. Монотонная разностная схема второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1983. — Т. 23, № 4. — С. 848–859.
Kopchenov V. I., Kraiko A. N. A monotonic second-order difference scheme for hyperbolic systems with two independent variables // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1983. — Vol. 23, No. 4. — P. 50–56. (Original Russian paper: *Kopchenov V. I., Kraiko A. N.* Monotonnaya raznostnaya shema vtorogo poraydka dlay giperbolicheskikh system s dvumya nezavisimymi peremennymi // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1983. — Vol. 23, No. 4. — P. 848–859.)
- Кузнецов Б. Г., Черных Г. Г. Численное исследование поведения однородного «пятна» в идеальной стратифицированной по плотности жидкости // Ж. прикл. механ. и техн. физ. — 1973. — № 3. — С. 120–126.
Kuznetsov B. G., Chernykh G. G. Chislennoye issledovaniye povedeniya odnorodnogo «pyatna» v ideal'noy stratifitsirovannoy po plotnosti zhidkosti [Numerical study of the homogeneous «spot» behavior in perfect density stratified fluid] // Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. — 1973. — No. 3. — P. 120–126 (in Russian).
- Лобановский Ю. И. О монотонизации конечноразностных решений в методах сквозного счета // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1979. — Т. 19, № 4. — С. 1063–1069.
Lovanovskii Yu. I. On the monotonization of finite-difference solutions for shock-capturing methods // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1979. — Vol. 19, No. 4. — P. 285–291. (Original Russian paper: *Lovanovskii Yu. I.* O monotonizatsii

- konechnoraznostnykh reshenii v metodah skvoznoho scheta // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1979. — Vol. 19, No. 4. — P. 1063–1069.)
- Монин А. С., Озмидов Р. В. Океанская турбулентность. — Л.: Гидрометеиздат, 1981. — 320 с.
Monin A. S., Ozmidov R. V. Okeanskaya turbulentsnost' [Ocean Turbulence]. — Leningrad: Gidrometeoizdat, 1981 (in Russian).
- Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. — М.: Наука, 1968.
Rozhdestvenskii B. L., Yanenko N. N. Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozhenie k gazovoi dinamike [The systems of quasilinear equations and their application to gas dynamics]. — Moscow: Nauka, 1968 (in Russian).
- Федоренко Р. П. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1962. — Т. 2, № 6. — С. 1122–1128.
Fedorenko R. P. The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations // USSR Comput. Math. Math. Phys. — 1963. — Vol. 2, No. 6. — P. 1355–1365. (Original Russian paper: Fedorenko R. P. Primenenie raznostnykh shem vysokoi tochnosti dlya chislennogo resheniya giperbolicheskikh uravnenii // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1962. — Vol. 2, No. 6. — P. 1122–1128.)
- Федоров К. Н. Тонкая термохалинная структура вод океана. — Л.: Гидрометеиздат, 1976. — 184 с.
Fedorov K. N. Tonkaya termokhalinnaya struktura vod okeana [Fine Thermohaline Structure of Ocean Waters]. — Leningrad: Gidrometeoizdat, 1976 (in Russian).
- Холодов А. С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1978. — Т. 18, № 6. — С. 1476–1492.
Kholodov A. S. Construction of difference schemes with positive approximation for hyperbolic equations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1978. — Vol. 18, No. 6. — P. 116–132. (Original Russian paper: Kholodov A. S. O postroenii raznostnykh shem s polozhitelnoi approksimatsiei dlya uravnenii giperbolicheskogo tipa // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1978. — Vol. 18, No. 6. — P. 1476–1492.)
- Шокин Ю. И. Метод дифференциальных приближений. — Новосибирск: Наука, 1979.
Shokin Yu. I. Metod differentsialnykh priblizhenii [Differential approximation method]. — Novosibirsk: Nauka, 1979 (in Russian).
- Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. Об аппроксимационной вязкости разностных схем // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 182, № 2. — С. 280–281.
Yanenko N. N., Shokin Yu. I. Ob aproksimatsionnoi vyazkosti paznostnykh skhem [On the approximation viscosity of difference schemes] // Doklady Akademii nauk SSSR. — 1968. — Vol. 182, No. 2. — P. 280–281 (in Russian).
- Banner M. Z., Phillips O. M. On small-scale breaking waves // J. Fluid. Mech. — 1974. — Vol. 65. — P. 647–654.
- Barkley D., Henderson R. Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder // J. Fluid Mech. — 1996. — Vol. 322. — P. 215–241.
- Boris J. P., Book D. L. Flux-corrected transport. I. Shasta, a fluid transport algorithm that works // J. Comput. Phys. — 1973. — Vol. 11, No. 1. — P. 38–69.
- Chorin A. J. Numerical solutions of Navier–Stokes equations // Math. Comput. — 1968. — Vol. 22. — P. 745–762.
- Fortin M., Peyret R., Temam R. Résolution numériques des equations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible // J. de Mécanique. — 1971. — Vol. 10, No. 3. — P. 357–390.
- Gushchin V. A., Kostomarov A. V., Matyushin P. V. 3D visualization of the separated fluid flows // Journal of Visualization. — 2004. — Vol. 7, No. 2. — P. 143–150.
- Gushchin V. A., Narayanan P. S., Chafle G. Parallel computing of industrial aerodynamics problems: clean rooms // Schiano P., Ecer A., Periaux J., Satofuka N. (eds.) Parallel Computational Fluid Dynamics 1996. — North-Holland, 1997. — P. 305–311.
- Gushchin V. A., Smirnova I. A. The Splitting scheme for mathematical modeling of the mixed region dynamics in a stratified fluid // Jain L. C. et al. (eds.) Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics. SIS&T, 2019. — Singapore: Springer Nature, 2020. — Vol. 173. — P. 11–21.

- Gushchin V. A., Smirnova I. A.* On a vortex couple dynamics in fluid // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2302. — P. 120006. — <https://doi.org/10.1063/5.0034904>
- Harlow F. H., Welch J. E.* Numerical calculation of time — dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids. — 1965. — Vol. 8, No. 12. — P. 2182–2189.
- Hirt C. W.* Heuristic stability theory of finite difference equations // J. Comput. Phys. — 1968. — Vol. 2, No. 4. — P. 339–355.
- Joung J. A., Hirt C. W.* Numerical calculation of internal wave motions // J. Fluid Mech. — 1972. — Vol. 56, No. 2. — P. 265–276.
- Kao T. W.* Principal stage of wake collapse in a stratified fluid. Two-dimensional theory // Phys. Fluids. — 1976. — Vol. 19, No. 8. — P. 1071–1074.
- König M., Eckelmann H.* On the transition of the cylinder wake // J. Phys. Fluids. — 1995. — Vol. 7, No. 4. — P. 779–794.
- Lin Q., Lindberg W. R., Boyer D. L., Fernando H. J. S.* Stratified flow past a sphere // J. Fluid Mech. — 1992. — Vol. 240. — P. 315–354.
- Matyushin P. V., Gushchin V. A.* Parallel computing of 3D separated stratified fluid flows around a sphere // Tuncer I. H., Gülcat Ü., Emerson D. R., Matsuno K. (eds.) Parallel computational fluid dynamics 2007. Lecture notes in computational science and engineering. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. — Vol 67. — P. 321–328.
- Persillon H., Braza M.* Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier–Stokes simulation // J. Fluid Mech. — 1998. — Vol. 365. — P. 23–88.
- Phillips O. M.* The Dynamics of the Upper Ocean. — 2nd ed. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.
- Schooley A. H., Stewart R. W.* Experiments with a self-propelled body submerged in a fluid with a vertical density gradient // J. Fluid Mech. — 1963. — Vol. 15. — P. 83.
- Scorer R. S.* Environmental aerodynamics. — New York, 1978.
Скорер Р. Аэрогидродинамика окружающей среды. — М.: Мир, 1980. — 551 с. (Russ. ed.: *Scorer R.* Aerogidrodinamika okruzhayushchey sredy. — Moscow: Mir, 1980. — 551 p.)
- Stoker J. J.* Water waves. — New York: Interscience, 1957.
- Taneda S.* Visual observations of the flow past a sphere at Reynolds numbers between 10^4 and 10^6 // J. Fluid Mech. — 1978. — Vol. 85. — P. 187–192.
- Turner J. S.* Buoyancy effects in fluids. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.
Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. — М.: Мир, 1977. — 432 с. (Russ. ed.: *Turner J.* Effekty plavuchesti v zhidkostyakh. — Moscow: Mir, 1977. — 432 p.)
- Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. III Upstream-centered finite-difference scheme for ideal compressible flow // Comput. Phys. — 1977. — Vol. 23, No. 3. — P. 263–275.
- Wessel W. R.* Numerical study of the collapse of a perturbation in an infinite density stratified fluid // Phys. Fluids. — 1969. — Vol. 12, No. 12. — P. 170–176.
- Williamson C. H. K.* Three-dimensional wake transition // J. Fluid Mech. — 1996. — Vol. 328. — P. 345–407.
- Wu J.* Mixed region collapse with internal wave generation in a density-stratified medium // J. Fluid Mech. — 1969. — Vol. 35, No. 3. — P. 531–544.