

УДК: 519.6

Исследование влияния миграции на социальную напряженность с использованием модели сплошной социальной стратификации

А. В. Казарников

Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра РАН,
Россия, 362027, РСО-Алания, г. Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22

E-mail: kazarnikov@gmail.com

*Получено 29.11.2021, после доработки — 08.04.2022.
Принято к публикации 21.04.2022.*

Фоновая социальная напряженность общества может быть количественно оценена по различным статистическим индикаторам. Модели, прогнозирующие динамику социальной напряженности, успешно применяются для описания различных социальных процессов. Когда количество рассматриваемых групп общества мало, динамику соответствующих индикаторов можно описать при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При увеличении количества взаимодействующих элементов резко возрастает сложность задач, что существенно затрудняет их аналитическое исследование. Модель сплошной социальной стратификации получается в результате перехода от дискретной цепочки взаимодействующих социальных слоев к их непрерывному распределению на некотором интервале, то есть перехода к модели сплошной среды. В этом случае напряженность распространяется локально, но в действительности элита общества влияет на все слои через средства массовой информации, а также интернет позволяет влиять всем группам на другие. Эти факторы можно учесть через слагаемое модели, описывающее негативное внешнее воздействие. В настоящей работе предложена модель сплошной социальной стратификации, описывающая динамику системы из двух социумов, связанных через процесс миграции населения. Предполагается, что из социального слоя системы-донора с наибольшей напряженностью происходит отток людей, переносящих свою напряженность в систему-акцептор, причем при миграции люди попадают в более бедные слои принимающего общества. Рассматривается случай пространственно однородных коэффициентов, что соответствует частному случаю небольшого социума. При помощи метода конечных объемов построена пространственная дискретизация задачи, корректно отражающая конечную скорость распространения напряженности в обществе. Выполнена проверка выбранной дискретизации путем сравнения численного решения с точными решениями вспомогательного уравнения нелинейной диффузии. Проведено численное исследование системы с миграцией при различных значениях параметров, проанализировано влияние интенсивности миграции на принимающее общество, найдены условия дестабилизации общества-акцептора под влиянием миграции. Полученные в работе результаты могут быть применены при дальнейшем исследовании модели в случае пространственно неоднородных коэффициентов, что соответствует более реалистичной картине общества.

Ключевые слова: социальная напряженность, модель сплошной социальной стратификации, уравнение нелинейной диффузии, метод конечных объемов

Автор выражает благодарность Е. С. Каменецкому, Е. К. Басевой и рецензентам за полезные замечания и стимулирующие предложения.

UDC: 519.6

Analysing the impact of migration on background social strain using a continuous social stratification model

A. V. Kazarnikov

Southern Mathematical Institute – branch of Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
22 Markusa st., Vladikavkaz, 362027, Russia

E-mail: kazarnikov@gmail.com

*Received 29.11.2021, after completion – 08.04.2022.
Accepted for publication 21.04.2022.*

The background social strain of a society can be quantitatively estimated using various statistical indicators. Mathematical models, allowing to forecast the dynamics of social strain, are successful in describing various social processes. If the number of interacting groups is small, the dynamics of the corresponding indicators can be modelled with a system of ordinary differential equations. The increase in the number of interacting components leads to the growth of complexity, which makes the analysis of such models a challenging task. A continuous social stratification model can be considered as a result of the transition from a discrete number of interacting social groups to their continuous distribution in some finite interval. In such a model, social strain naturally spreads locally between neighbouring groups, while in reality, the social elite influences the whole society via news media, and the Internet allows non-local interaction between social groups. These factors, however, can be taken into account to some extent using the term of the model, describing negative external influence on the society. In this paper, we develop a continuous social stratification model, describing the dynamics of two societies connected through migration. We assume that people migrate from the social group of donor society with the highest strain level to poorer social layers of the acceptor society, transferring the social strain at the same time. We assume that all model parameters are constants, which is a realistic assumption for small societies only. By using the finite volume method, we construct the spatial discretization for the problem, capable of reproducing finite propagation speed of social strain. We verify the discretization by comparing the results of numerical simulations with the exact solutions of the auxiliary non-linear diffusion equation. We perform the numerical analysis of the proposed model for different values of model parameters, study the impact of migration intensity on the stability of acceptor society, and find the destabilization conditions. The results, obtained in this work, can be used in further analysis of the model in the more realistic case of inhomogeneous coefficients.

Keywords: background social strain, continuous social stratification model, non-linear diffusion equation, finite volume method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 3, pp. 661–673 (Russian).

The author is thankful to E. S. Kamenetsky, E. K. Basaeva, and anonymous reviewers for stimulating suggestions and valuable comments.

Введение

В настоящее время моделирование общественных процессов является актуальной задачей и активно исследуется в литературе. Например, в работе [Short et al., 2008] успешно применяются методы статистической физики для описания формирования очагов преступной активности. В этой же работе предложена и исследована детерминированная модель, получаемая как непрерывный предел соответствующих стохастических уравнений. Этот подход был далее развит в [Short et al., 2010] для описания пространственной локализации преступных сообществ и исследования эффективности возможных стратегий реагирования властей. Подробный обзор методов статистической физики, используемых для моделирования различных аспектов преступной активности (формирование банд, самоорганизация преступных сообществ и другие), содержится в работе [D'Orsogna, 2015].

Модели и методы машинного обучения успешно применяются для моделирования процессов городского развития. Так, в [Batty, 2005] показано, что процессы урбанизации на внутригородском и региональном масштабах успешно воспроизводятся клеточными автоматами. Работа [Zhang, Zhen, 2006] посвящена прогнозированию состояния городского ландшафта Шанхая при помощи искусственных нейронных сетей, используя для обучения моделей имеющиеся данные геоинформационных систем. В работах [Li, Yeh, 2001] и [Li, Yeh, 2002] искусственные нейронные сети совмещены с моделями клеточных автоматов для имитационного моделирования развития городской инфраструктуры густонаселенных районов Китая. Подробный обзор приложений машинного обучения к моделированию развития городов дан в работе [Wu, Silva, 2010].

Хотя статистические имитационные модели и методы машинного обучения оказываются эффективными для воспроизведения самых различных социальных процессов, они с трудом поддаются аналитическому исследованию. Поэтому для прогнозирования социальных явлений в настоящее время активно используются уравнения в частных производных. В частности, модели реакции–диффузии, изначально предложенные для описания формирования биологических структур, успешно применяются для моделирования общественной самоорганизации. Так, в работах [Schweitzer, Steinbink, 1997; Schweitzer, Steinbink, 2002] модель реакции–диффузии успешно воспроизводит развитие сети городов в довоенной Германии. Роль активатора и ингибитора играют количество свободного пространства и величина спроса на строительство. В работе [Friesen, Tessmann, Pelz, 2019] механизм реакции–диффузии используется для описания формирования богатых и бедных районов внутри городов США. В модели рассматриваются две социальные группы: состоятельные люди (активатор) и малоимущие слои населения (ингибитор), которые мигрируют между городскими районами и взаимодействуют друг с другом через сегрегацию по схожим социальным признакам и джентрификацию бедных районов. В [Pelz, Friesen, Hartig, 2019] предложена модель реакции–диффузии для описания формирования районов трущоб внутри города. В роли активатора и ингибитора также выступают состоятельные и малообеспеченные слои населения, но реакция и диффузия интерпретируются как миграция на дальние расстояния и локальная миграция. Модель демонстрирует формирование структур, размер и форма которых согласуются с имеющимися социологическими данными [Friesen et al., 2018]. Сопоставлению предсказаний модели и эксперимента, а также анализу данных из глобальной карты поселений Global Urban Footprint посвящена работа [Hehn et al., 2020].

Под социальной напряженностью понимается «комплексный системный феномен, который интегрально характеризует социально-политические процессы с социально-психологической стороны, отражающий неудовлетворенность больших масс людей существующей системой социальных, экономических и политических отношений» [Внукова, Челпанова, Пашенко, 2014, с. 33]. Интегральность этой характеристики позволяет оценивать состояние общества, выделяя

из многочисленных процессов, происходящих в обществе, только те, влияние которых хотелось бы исследовать. В работах социологов описаны различные попытки количественной оценки социальной напряженности и ее частного случая межэтнической напряженности [Чернобай, 1992; Мастикова, 2016; Пинкевич, 2015; Баранова, Фролов, 2012].

Математические модели оценки социальной напряженности взаимодействующих социальных групп были предложены в работах [Басаева, Каменецкий, Хосаева, 2015; Басаева, Каменецкий, Хосаева, 2016а; Басаева, Каменецкий, Хосаева, 2017; Цибулин, Хосаева, 2019]. В работе [Басаева, Каменецкий, Хосаева, 2016б] моделировалось влияние внутренней миграции на социальную напряженность в СССР в послевоенные годы.

Если количество взаимодействующих социальных групп мало, то изменение соответствующих показателей социальной напряженности можно описать при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При увеличении количества взаимодействующих групп резко возрастает сложность моделей, что существенно затрудняет их аналитическое исследование. В работе [Kazarnikov, 2021] была рассмотрена модель сплошной социальной стратификации, где вместо дискретной цепочки взаимодействующих социальных групп предполагалось их непрерывное распределение на некотором интервале и получены достаточные условия глобальной ограниченности и коллапса решений модели для случая пространственно однородных коэффициентов. В настоящей работе модель сплошной социальной стратификации используется для описания динамики двух социумов, связанных через миграцию населения.

Математическая модель сплошной социальной стратификации

Рассмотрим два общества, связанных процессом миграции: общество «донор» и общество «акцептор». Считаем, что миграционный поток направлен из общества «донора» в общество «акцептор». Ставится задача исследования влияния миграции на динамику социальной напряженности обоих обществ.

Предположим, что социальные группы рассматриваемых обществ непрерывно распределены на единичном интервале и упорядочены по возрастанию силы влияния. Очевидно, что величина напряженности меняется со временем и, кроме того, не будет одинаковой в разных, с точки зрения социальной стратификации, социальных группах, то есть зависит от двух переменных: времени и переменной, характеризующей место социальной группы в иерархии (переменной стратификации).

Обозначим через $0 \leq P(x, t) < 1$ показатель напряженности социума, где $x \in (0, 1)$ — переменная стратификации, а $t \geq 0$ — безразмерное время. Тогда уравнение модели сплошной социальной стратификации имеет вид

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = U(x, t) - \gamma P(x, t) + \mu(x)P(x, t)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(C(x)k(P(x, t)) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right). \quad (1)$$

Здесь $U(x, t) \geq 0$ — негативное внешнее воздействие. Второе слагаемое $-\gamma P(x, t)$ отвечает за снижение напряженности за счет адаптации, где $\gamma > 0$ — коэффициент успокоения системы. Слагаемое $\mu(x)P(x, t)^2$ характеризует самовозбуждение системы, а $\mu(x) \geq 0$ — коэффициент самовозбуждения. Последнее слагаемое (диффузионный член) описывает перенос напряженности между слоями общества. Причем коэффициент передачи напряженности $C(x)k(P)$ состоит из двух сомножителей, первый из которых — $C(x) \geq 0$ — зависит только от переменной стратификации, а второй — $k(P) = \frac{P}{1-P}$ — только от напряженности P . То есть считаем, что $k(P) \approx P$ при малых значениях напряженности и $k(P) \rightarrow \infty$ при $P \rightarrow 1$. Таким образом, уравнение (1)

имеет смысл только для $0 \leq P(x, t) < 1$. Предполагается, что на границе отрезка $(0, 1)$ заданы однородные краевые условия Неймана:

$$\left(P \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_{x=0,1} = 0. \quad (2)$$

В модели (1) напряженность передается только ближайшим социальным слоям. В действительности верхушка общества влияет на все слои через средства массовой информации, а также в настоящее время интернет позволяет влиять всем группам на другие. В определенной мере локальность распространения напряженности можно устранить, учитывая информационное воздействие (в том числе и со стороны других стран) с помощью слагаемого $U(x, t)$. Кроме того, $U(x, t)$ отражает воздействие изменения экономической ситуации на напряженность социума.

Пусть $U(x, t) \equiv U_0 \geq 0$, $C(x) \equiv C_0 > 0$, $\mu(x) \equiv \mu_0 \geq 0$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = U_0 - \gamma P + \mu_0 P^2 + C_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(k(P) \frac{\partial P}{\partial x} \right). \quad (3)$$

Пространственно однородные коэффициенты (то есть не зависящие от места социального слоя в структуре общества) характеризуют однородный социум. Хотя данное допущение реалистично только для небольших обществ, аналитическое исследование модели существенно упрощается. К тому же решение задачи для такого случая позволяет оценить возможную дестабилизацию более сложно устроенного общества.

На основе уравнения (3) рассмотрим систему двух уравнений, описывающую динамику двух обществ, связанных процессом миграции населения:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = U_0^1 - \gamma^1 P_1 + \mu_0^1 P_1^2 + C_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(k(P_1) \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) - \delta_0 f(x) P_1(x, t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = U_0^2 - \gamma^2 P_2 + \mu_0^2 P_2^2 + C_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(k(P_2) \frac{\partial P_2}{\partial x} \right) + \delta_0 f(x + \beta_0) P_1(x + \beta_0, t). \quad (5)$$

Предполагается, что активная часть общества-донора (4) мигрирует в общество-акцептор (5), причем мигранты попадают в более бедные слои принимающего общества. Здесь $f(x) \geq 0$ — финитная функция, задающая характер миграции, постоянная $\beta_0 \geq 0$ определяет степень ухудшения положения мигрантов в обществе-акцепторе, параметр $\delta_0 > 0$ регулирует интенсивность миграции.

В работе построена пространственная дискретизация рассматриваемых моделей и проведено численное исследование системы (4)–(5) с целью определения условий дестабилизации общества-акцептора под влиянием миграции.

Замена переменных

Вид нелинейного коэффициента диффузии в уравнении (3) существенно затрудняет процесс построения частных решений, которые необходимы для аналитического исследования модели. Поэтому необходимо аппроксимировать (3) более простым вспомогательным уравнением. Рассмотрим замену переменных, переводящую полуинтервал $[0, 1)$ в полупрямую $[0, +\infty)$. Введем новую неизвестную функцию $T(x, t)$, полагая

$$P(x, t) = \frac{T(x, t)}{1 + T(x, t)}, \quad (6)$$

тогда $T(x, t) \rightarrow +\infty$ при $P(x, t) \rightarrow 1$ и $T(x, t) \rightarrow 0$ при $P(x, t) \rightarrow 0$. Подставляя (6) в (3), получим уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (\mu_0 + U_0 - \gamma)T^2 + (2U_0 - \gamma)T + U_0 + C_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial T}{\partial x} \right) - 2C_0 \frac{T}{1+T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2. \quad (7)$$

Краевые условия Неймана (2) в данном случае принимают вид

$$T \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0,1} = 0.$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение нелинейной теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (\mu_0 + U_0 - \gamma)T^2 + (2U_0 - \gamma)T + U_0 + C_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (8)$$

Данное уравнение называется уравнением пористой среды с квадратичной нелинейностью и подробно исследовано в монографии [Vasquez, 2006]. С другой стороны, всякое решение уравнения (8) является в то же время верхним решением уравнения (7). Это позволяет получать условия глобальной ограниченности решений модели (3), используя точные решения уравнения (8).

Частные решения вспомогательного уравнения

Вспомогательное уравнение (8) при $U_0 = 0$ и $\mu_0 > \gamma$ имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (\mu_0 - \gamma)T^2 - \gamma T + C_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (9)$$

У уравнения (9) существует семейство автомодельных решений, локализованных по пространству (см. [Samarskii, Kurdyumov, Galaktionov, 2011]):

$$T_F(x, t, \phi_0) = \begin{cases} \frac{1}{1 - F e^{\gamma t}} A \cos^2(B(x - \phi_0)), & |B(x - \phi_0)| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & |B(x - \phi_0)| > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (10)$$

где $\alpha = \mu_0 - \gamma > 0$, $A = \frac{4\gamma}{3\alpha}$, $B = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{2C_0}}$, $\phi_0 \in (0, 1)$. Если $F < 0$, то $T_F(x, t, \phi_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. При $F = 0$ получаем, что $T_0(x, t, \phi_0)$ — пространственно неоднородное стационарное решение (9). При $F \in (0, 1)$ $T_F(x, t, \phi_0) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t^*$, то есть $T_F(x, t, \phi_0)$ — режим с обострением.

Точные решения (10) укладываются в единичный интервал, если выполнено условие $C_0 \leq \frac{\alpha}{8\pi^2}$. Также для $\frac{\alpha}{8\pi^2} \leq C_0 < \frac{\alpha}{2\pi^2}$ локализованные решения можно получить, рассматривая (10) для $\phi_0 = 0, 1$. Таким образом, локализация напряженности в модели (3) возможна только в том случае, когда коэффициент передачи напряженности C_0 достаточно мал, что соответствует атомизированному обществу, в котором социальные слои практически не связаны друг с другом.

Пусть $U_0 = 0$ и $\mu_0 = \gamma$. Тогда вспомогательное уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\gamma T + C_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (11)$$

У уравнения (11) существует семейство затухающих решений, локализованных по пространству (см. [Samarskii, Kurdyumov, Galaktionov, 2011]):

$$T_F(x, t, \phi_0) = \frac{1}{6} e^{-\gamma t} g(t)^{-1/3} \left[F^2 - \frac{|x - \phi_0|^2}{g(t)^{2/3}} \right]_+, \quad (12)$$

где $g(t) = 1 + \frac{C_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$ и $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \supp(T_F(x, t, \phi_0)) = F \left(1 + \frac{C_0}{\gamma} \right)^{1/3}$.

Дискретизация рассматриваемых уравнений

Важной особенностью параболического уравнения (3) является поверхность вырождения $P = 0$, что делает возможным моделирование конечной скорости распространения напряженности в социуме. Это свойство должно корректно воспроизводиться при численном интегрировании дискретизованной задачи. Поэтому для осуществления пространственной дискретизации уравнения (3) применим метод конечных объемов. Рассмотрим M соприкасающихся ячеек $V_k = [x_k - \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}]$, где $h = \frac{1}{M-1}$, $x_k = \frac{h}{2} + (k-1)h$, тогда $[0, 1] = \bigcup_{k=1}^M V_k$. Проинтегрируем уравнение (3) по ячейке V_k и применим формулу интегрирования по частям к диффузионному слагаемому. Получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} P(x, t) dx = \int_{V_k} U_0 dx - \gamma \int_{V_k} P(x, t) dx + \mu_0 \int_{V_k} P(x, t)^2 dx + C_0 \frac{P(x, t)}{1 - P(x, t)} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_k - \frac{h}{2}}^{x=x_k + \frac{h}{2}}.$$

Через $w \in \mathbb{R}^M$ обозначим сеточное решение $(P_1(t), \dots, P_M(t))$, где $P_k(t) = P(x_k, t)$, $k = 1, \dots, M$. Значения сеточной функции на границах ячеек будем вычислять при помощи линейной интерполяции. Аппроксимируя интегралы по ячейке методом прямоугольников и заменяя пространственные производные конечными разностями, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{P}_1(t) &= U_0 - \gamma P_1(t) + \mu_0 P_1(t)^2 + \frac{C_0}{h} \frac{P_2(t) + P_1(t)}{2 - (P_2(t) + P_1(t))} \frac{P_2(t) - P_1(t)}{h}; \\ \dot{P}_k(t) &= U_0 - \gamma P_k(t) + \mu_0 P_k(t)^2 + \frac{C_0}{h} \left(\frac{P_{k+1}(t) + P_k(t)}{2 - (P_{k+1}(t) + P_k(t))} \frac{P_{k+1}(t) - P_k(t)}{h} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{P_{k-1}(t) + P_k(t)}{2 - (P_{k-1}(t) + P_k(t))} \frac{P_k(t) - P_{k-1}(t)}{h} \right), \quad k = 2, \dots, M-1; \\ \dot{P}_M(t) &= U_0 - \gamma P_M(t) + \mu_0 P_M(t)^2 - \frac{C_0}{h} \frac{P_{M-1}(t) + P_M(t)}{2 - (P_{M-1}(t) + P_M(t))} \frac{P_M(t) - P_{M-1}(t)}{h}, \end{aligned} \quad (13)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Дискретизация вспомогательного уравнения (8) осуществляется полностью аналогичным образом.

Обозначим через $F(w)$ правую часть системы (13). Для численного интегрирования дискретизованной задачи воспользуемся неявным методом TR-BDF2 (second order Trapezoidal Rule — Backward Differentiation Formula), который был изначально предложен в работе [Bank et al., 1985] для эффективного расчета переходных процессов в моделях электрических цепей. Метод допускает адаптивный выбор шага по времени, что позволяет оптимизировать количество вычислений правой части системы (13) и ее матрицы Якоби.

Один шаг метода по времени h_n состоит из двух стадий: $h_{n,1} = \gamma h_n$ и $h_{n,2} = (1 - \gamma)h_n$, где $\gamma \in (0, 1)$. Если обозначить через w_n текущую точку траектории, то две стадии метода можно записать в виде

$$w_{n+\gamma} = w_n + \frac{\gamma h_n}{2} (F(w_n) + F(w_{n+\gamma})), \quad (14)$$

$$\alpha_2 w_{n+1} = \alpha_1 w_{n+\gamma} - \alpha_0 w_n + F(w_{n+1}), \quad (15)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1 - \gamma}{h_n}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\gamma(1 - \gamma)h_n}, \quad \alpha_2 = \frac{2 - \gamma}{(1 - \gamma)h_n}.$$

Равенства (14) и (15) являются нелинейными системами уравнений относительно векторов $w_{n+\gamma}$ и w_{n+1} . Положим $\gamma = 2 - \sqrt{2}$. Тогда матрица Якоби системы (13) имеет одинаковую структуру для систем (14) и (15), что позволяет использовать модифицированный метод Ньютона для одновременного решения обеих задач, тем самым уменьшая количество итераций, необходимое для сходимости метода. Погрешность метода τ оценивается по формуле

$$\tau = \frac{3\gamma^2 - 4\gamma + 2}{6(1 - \gamma)^2} \left[w_{n+1} - \frac{1}{\gamma^2} w_{n+\gamma} + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} w_n + h_n \frac{1 - \gamma}{\gamma} F(w_n) \right],$$

а оптимальный шаг по времени определяется выражением

$$h_{opt} = h_n \sqrt[3]{\frac{\varepsilon_R}{\|\tau_R\|_2}}, \quad \tau_{Ri} = \frac{|\tau_i|}{|(w_{n+1})_i| + \delta}.$$

Все численные эксперименты, проведенные в данной работе, проводились в пакете численных вычислений MATLAB R2021b. Аналитическое выражение для матрицы Якоби системы (13) было получено при помощи библиотеки символьных вычислений MATLAB Symbolic Toolbox.

Численное исследование модели

Воспользуемся точными решениями вспомогательного уравнения (8) для верификации пространственной дискретизации рассматриваемых моделей. Зададим параметры значениями $C_0 = 1e - 5$, $\mu_0 = 0,11$, $\gamma = 0,1$, $U_0 = 0$ и определим начальные данные по формуле (10) при $F = 0$, что соответствует стационарному состоянию. На рис. 1, а показано поведение численного решения модели (3) и вспомогательного уравнения (8). Пространственная дискретизация уравнения (8) сохраняет стационарное решение, в то время как решение уравнения (3) стремится к нулю в соответствии с теорией.

Далее положим: $C_0 = 0,2$, $\mu_0 = 0,1$, $\gamma = 0,1$, $U_0 = 0$. Зададим начальные данные формулой (12) при $F = 0,25$ и $t = 0$. Поведение численного решения уравнений (3) и (8) показано на рис. 1, б. В данном случае напряженность распространяется по нулевому фону с конечной скоростью, что корректно отражается выбранной дискретизацией задачи.

Теперь рассмотрим модель (4)–(5) и исследуем влияние миграции на дестабилизацию системы-акцептора. Будем предполагать, что система-донор находится в неблагоприятных условиях, ведущих к дестабилизации общества (если отсутствует отток активной части населения). Положим $U_0^1 = 0,01$, $\mu_0^1 = 0,3$, $\gamma^1 = 0,1$. Тогда всякое решение уравнения (4) при $\delta = 0$ уходит на бесконечность за конечное время (см. [Kazarnikov, 2021]). Для системы-акцептора положим $U_0^2 = 0,01$, $\mu_0^2 = 0,1$, $\gamma_2 = 0,3$. Тогда при отсутствии притока мигрантов (что соответствует $\delta = 0$) уравнение (5) имеет два пространственно однородных решения $0 < P_0^2 \leq P_0^1 \approx 0,8873$ и всякое решение уравнения (5) с начальными данными, лежащими ниже P_0^1 , является глобально ограниченным по времени (см. [Kazarnikov, 2021]). Таким образом, система-акцептор находится в благоприятных условиях и обладает существенным запасом устойчивости. Будем также предполагать, что в обеих системах напряженность распространяется по слоям с одинаковой скоростью, полагая $C_0^1 = C_0^2 = 0,01$. Отметим, что значения констант выбирались примерно равными тем, которые использовались при анализе динамики напряженности двух взаимодействующих социальных групп [Басаева, Каменецкий, Хосаева, 2015; Басаева, Каменецкий, Хосаева, 2016а].

Для качественной оценки влияния миграции на изменение социальной напряженности общества «донора» и общества «акцептора» определим начальную напряженность системы-донора

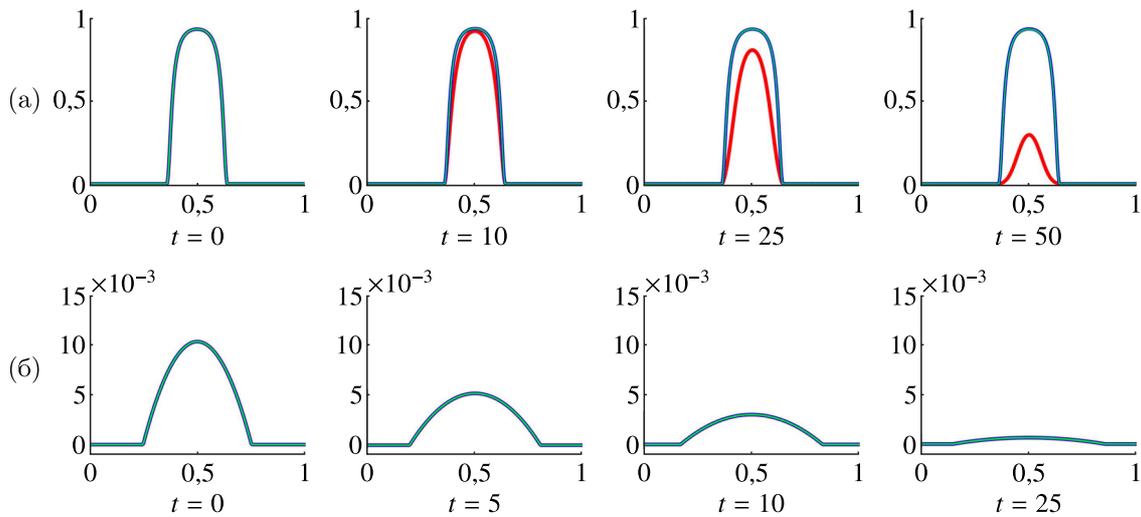


Рис. 1. Сравнение численных решений уравнений (3) и (8) с точными решениями уравнения (8). Красным цветом обозначено численное решение уравнения сплошной социальной стратификации (3), синим — вспомогательного уравнения (8), зеленым — точное решение вспомогательного уравнения (8). Начальные данные задаются в следующем виде: формула (10) при $F = 0$ (а), формула (12) при $F = 0,25$ и $t = 0$ (б). На оси абсцисс откладывается стратификационная переменная x , на оси ординат — нормированный показатель социальной напряженности. Решение вспомогательного уравнения (8) проецируется на единичный интервал по формуле (6)

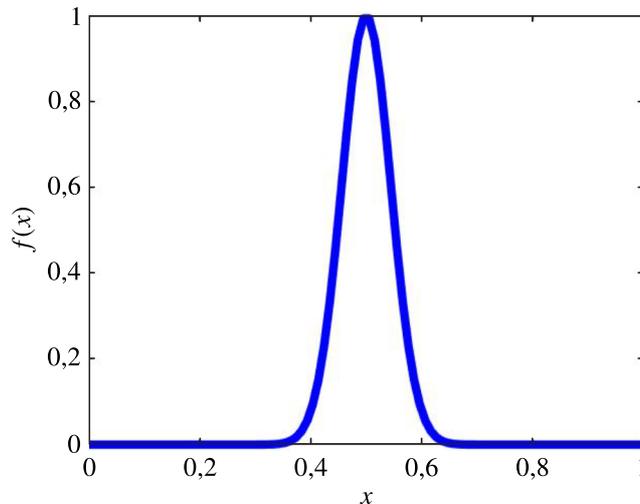


Рис. 2. Функция $f(x)$, задающая характер миграции населения из общества-донора в общество-акцептор

по формуле $P_1(x, 0) = [0,35(1 - \cos(2\pi x))]_+$. Тогда наибольшую напряженность имеет слой с индексом $x = \frac{1}{2}$. Начальную напряженность общества-акцептора положим равной нулю. Функцию миграции $f(x)$ зададим в виде

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\sigma(x-\frac{1}{2})^2}, & x \in [0,3, 0,7]; \\ 0, & x \notin [0,3, 0,7], \end{cases}$$

где $\sigma = 256$ (см. рис. 2), и дополнительно положим $\beta_0 = 0,2$. Таким образом, при моделировании процесса миграции предполагается, что из социального слоя системы-донора с наибольшей напряженностью происходит отток людей, переносящих свою напряженность в систему-акцептор.

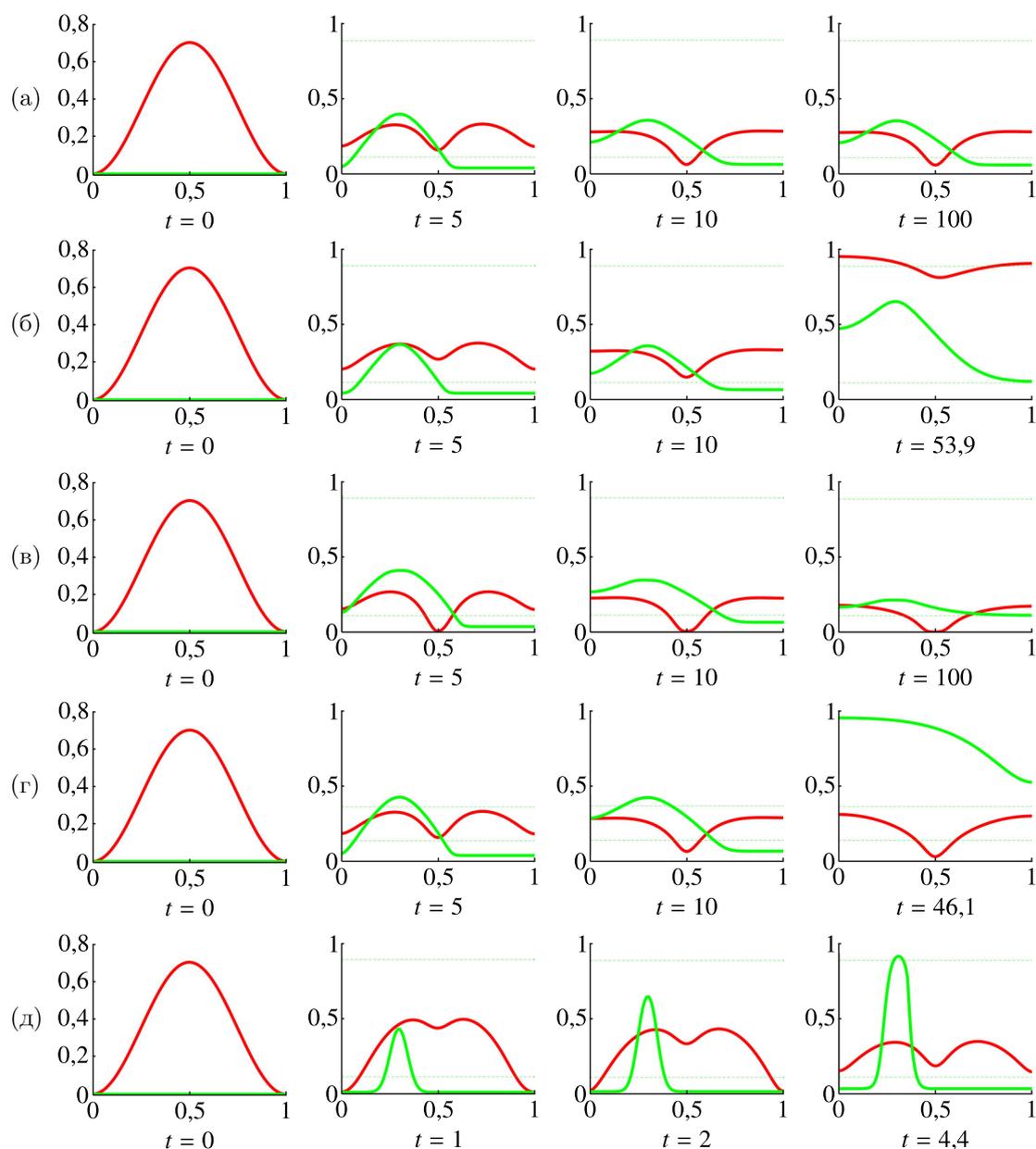


Рис. 3. Численное решение системы с миграцией (4)–(5) для фиксированных начальных данных и различных значений параметров. Красным цветом обозначена напряженность общества-донора $P_1(x, t)$, зеленым — напряженность общества-акцептора $P_2(x, t)$. На оси абсцисс откладывается стратификационная переменная x , на оси ординат — нормированный показатель социальной напряженности

Результаты численного исследования системы (4)–(5) показаны на рис. 3. Зафиксируем начальные данные и построим численное решение системы для различных значений параметров. Сначала исследуем динамику модели для различных значений интенсивности миграции δ_0 . Положим $\delta = 0,75$ (рис. 3, а). Тогда система-донор стабилизируется, причем в рамках сделанных предположений напряженность слоя, из которого происходит отток людей, становится даже ниже, чем в других слоях. В системе-акцепторе наблюдается локальный рост напряженности в том слое, куда попадают мигранты. Затем эта локальная напряженность спадает. Далее положим $\delta = 0,5$ и повторим эксперимент. Тогда миграция не останавливает дестабилизацию обще-

ства-донора, что в свою очередь дестабилизирует и общество-акцептор, так как туда прибывают люди со все возрастающей напряженностью, с чем принимающий социум не может справиться (рис. 3, б). Теперь положим $\delta = 2$. В этом случае более сильный отток напряженности приводит к полному успокоению соответствующего слоя в обществе-доноре, что положительно сказывается на состоянии обоих обществ (рис. 3, в). Таким образом, небольшая миграция не предотвращает дестабилизацию общества-донора и заметно дестабилизирует общество-акцептор, а с ростом миграционного потока происходит стабилизация ситуации в обществе-доноре при незначительном росте напряженности в обществе-акцепторе.

Далее снова положим $\delta = 0,75$ и будем последовательно менять по одному из параметров модели общества-акцептора (5), чтобы найти условия, при которых система дестабилизируется. Появление большого количества мигрантов в обществе-акцепторе приведет к росту в этом обществе коэффициента самовозбуждения μ_0^2 . Положим $\mu_0^2 = 0,2$. Тогда $P_0^1 \approx 0,3618$ и запас устойчивости социума существенно снижается. В результате миграции напряженность в соответствующем слое общества-акцептора становится больше, чем P_0^1 , что приводит к дальнейшему распространению высокого уровня напряженности на соседние слои и последующей дестабилизации общества (рис. 3, г). Полученные результаты позволяют предположить, что существует оптимальное количество мигрантов, при котором общество донор стабилизируется, а рост напряженности в обществе акцепторе невелик.

Далее рассмотрим также случай, когда мигранты оказываются в значительной мере изолированы от населения общества-акцептора, полагая $C_0^2 = 1e - 5$ (рис. 3, д). Тогда локализация мигрантов в определенном социальном слое общества-акцептора и их пространственная локализация (появление гетто) приводят к значительному локальному росту напряженности. Такие процессы наблюдались во Франции в 80-е годы и явились одной из основных причин беспорядков в 90-е и начале 2000-х [De Wenden, 2006; Laurence, 2005; Куропятник, 2005].

Заключение

В работе рассмотрена модель сплошной социальной стратификации в случае пространственно однородных коэффициентов, что соответствует случаю небольших социумов, а также предложена модель, описывающая процесс миграции населения из одного общества в другое. При помощи метода конечных объемов построена пространственная дискретизация для рассматриваемых задач, корректно отражающая конечную скорость распространения напряженности в социуме. Проведена валидация пространственной дискретизации при помощи сравнения численного решения с точными решениями вспомогательного уравнения пористой среды. Проведен численный анализ системы с миграцией, проанализированы факторы влияния миграции в системе «донор–акцептор» на дестабилизацию социума-акцептора. Полученные в работе результаты могут быть использованы при дальнейшем аналитическом исследовании модели в случае пространственно неоднородных коэффициентов, что соответствует более реалистичной картине общества.

Список литературы (References)

- Баранова Г. В., Фролов В. А. Методология и методика измерения социальной напряженности // Социологические исследования. — 2012. — № 3. — С. 50–65.
Baranova G. V., Frolov V. A. Metodologija i metodika izmerenija social'noj naprjazhjonnosti [Methodology and a technique for measuring social strain] // Sociological studies. — 2012. — No. 3. — P. 50–65 (in Russian).
- Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х. О влиянии нелинейных эффектов на стабильность общества // Математические заметки СВФУ. — 2015. — Т. 22, № 3. — С. 78–83.
Basaeva E. K., Kamenetsky E. S., Khosayeva Z. K. O vliyanii nelineinykh effektov na stabil'nost' obshchestva [About the influence of nonlinear effects on the social stability] // Mathematical notes of NEFU. — 2015. — Vol. 22, No. 3. — P. 78–83 (in Russian).

- Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.* Математическое моделирование социальной напряженности взаимодействующих социальных групп // Анализ и моделирование мировой и страновой динамики: экономические и политические процессы / отв. ред. С. Ю. Малков, Л. В. Гринин. — М.: Моск. ред. изд-ва «Учитель», 2016а. — С. 130–145. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29413146>
- Basaeva E. K., Kamenetsky E. S., Hosaeva Z. Kh.* Matematicheskoe modelirovanie sotsial'noi napryazhennosti vzaimodeistvuyushchikh sotsial'nykh grupp [Mathematical modeling of social tension of interacting social groups] // Analysis and modeling of global and country-specific dynamics: economic and political processes / executive ed. S. Yu. Malkov, L. E. Grinin. — Moscow: Publishing house «Uchitel», 2016a. — P. 130–144 (in Russian).
- Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.* Математическое моделирование изменения социальной напряженности в СССР в послевоенные годы // Историческая информатика. — 2016б. — № 1. — С. 12–19.
- Basaeva E. K., Kamenetsky E. S., Khosayeva Z. K.* Matematicheskoe modelirovanie izmeneniya sotsial'noi napryazhennosti v SSSR v poslevoennye gody [Mathematical modelling of the social stress dynamics in post-war USSR] // Historical informatics. — 2016b. — No. 1. — P. 12–19 (in Russian).
- Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.* Математическая модель стачечного движения в России в конце XIX – начале XX века // Историческая информатика. — 2017. — № 1. — DOI: 10.7256/2306-0891.2017.1.22929
- Basaeva E. K., Kamenetsky E. S., Khosayeva Z. K.* Matematicheskaya model' stachechnogo dvizheniya v Rossii v kontse XIX – nachale XX veka [Mathematical model of strike movement in Russia at the end of the XIX century and at the beginning of the XX century] // Historical informatics. — 2017. — No. 1 (in Russian).
- Внукова Л. Б., Челпанова Д. Д., Пащенко И. В.* Социально-политическая напряженность в полиэтничном регионе. — Ростов н/Д: Изд-во ЮНЦ РАН, 2014. — 192 с.
- Vnikova L. B., Chelpanova D. D., Pashhenko I. V.* Social'no-politicheskaja napryazhennost' v polijetnichnom regione [Socio-political strain in a multi-ethnic region]. — Rostov-on-Don: SSC RAS Publishing, 2014. — 192 p. (in Russian).
- Куропятник А. И.* Иммиграция и национальное общество: Франция // Журнал социологии и социальной антропологии. — 2005. — Т. 8, № 4. — С. 137–165.
- Kuropyatnik A. I.* Immigracija i nacional'noe obshhestvo: Francija [Immigration and national society: France] // Journal of sociology and social anthropology. — 2005. — Vol. 8, No. 4. — P. 137–165 (in Russian).
- Мастикова Н. С.* Методика измерения и результаты анализа межэтнической напряженности в российском обществе // Информационно-аналитические бюллетени. — 2016. — № 2. — С. 7–16.
- Mastikova N. S.* Metodika izmerenija i rezul'taty analiza mezhetniceskoj napryazhennosti v rossijskom obshhestve [A measuring technique and the results of the analysis of interethnic strain in Russian society] // Information and analytical bulletins. — 2016. — No. 2. — P. 7–16 (in Russian).
- Пинкевич А. Г.* Возможности изучения социальной напряженности в России на основе данных Европейского социального исследования // Мир России. — 2015. — № 1. — С. 150–168.
- Pinkevich A. G.* Vozmozhnosti izuchenija social'noj napryazhennosti v Rossii na osnove dannyh Evropejskogo social'nogo issledovanija [Possibilities for studying social strain in Russia using the data obtained by European social studies] // Russian World. — 2015. — No. 1. — P. 150–168 (in Russian).
- Цибулин В. Г., Хосаева З. Х.* Математическая модель дифференциации общества с социальной напряженностью // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 5. — С. 999–1012. — DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-5-999-1012
- Tsybulin V. G., Khosayeva Z. K.* Matematicheskaja model' differenciacii obshhestva s social'noj napryazhennost'ju [Mathematical model of political differentiation under social tension] // Computer research and modelling. — 2019. — Vol. 11, No. 5. — P. 999–1012 (in Russian).
- Чорнобай П. Д.* Социальная напряженность: опыт измерения // Социологические исследования. — 1992. — № 7. — С. 94–98.
- Chornobaj P. D.* Social'naja napryazhennost': opyt izmerenija [Social strain: an experiment to measure] // Sociological studies. — 1992. — No. 7. — P. 94–98 (in Russian).
- Bank R., Coughran W., Fichtner W., Grosse E., Rose D., Smith R.* Transient simulation of silicon devices and circuits // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. — 1985. — Vol. 4, No. 4. — P. 436–451. — DOI: 10.1109/TCAD.1985.1270142
- Batty M.* Agents, cells, and cities: new representational models for simulating multiscale urban dynamics // Environment and Planning A. — 2005. — Vol. 37, No. 1. — P. 1373–1394. — DOI: 10.1068/a3784
- D'Orsogna M. R., Perc M.* Statistical physics of crime: A review // Physics of Life Reviews. — 2015. — Vol. 12, No. 1. — P. 1–21. — DOI: 10.1016/j.plev.2014.11.001

- De Wenden C.W.* Urban Riots in France // *The SAIS Review of International Affairs*. — 2006. — Vol. 26, No. 2. — P. 47–53.
- Friesen J., Taubenböck H., Wurm M., Pelz P.F.* The similar size of slums // *Habitat International*. — 2018. — Vol. 73, No. 1. — P. 79–88. — DOI: 10.1016/j.habitatint.2018.02.002
- Friesen J., Tessmann R., Pelz P.F.* Reaction-diffusion Model Describing the Morphogenesis of Urban Systems in the US // *Proceedings of the 5th International Conference on Geographical Information Systems Theory, Applications and Management (Heraklion, Greece, May 3–5 2019)*. — SCITEPRESS, 2019. — P. 88–96. — DOI: 10.5220/0007711300880096
- Hehn K., Friesen J., Hartig J., Pelz P.F.* Spatial Analysis of Settlement Structures to Identify Pattern Formation Mechanisms in Inter-Urban Systems // *International Journal of Geo-Information*. — 2020. — Vol. 9, No. 9. — P. 541. — DOI: 10.26083/tuprints-00019244
- Kazarnikov A.V.* Global Boundedness of Solutions of Continuous Social Stratification Model // *Operator Theory and Differential Equations* / ed. by A.G. Kusraev, Z.D. Totieva. — Springer International Publishing, 2021. — P. 49–59. — DOI: 10.1007/978-3-030-49763-7_5
- Laurence J., Vaisse J.* Understanding Urban Riots in France. — Brookings, 2005.
- Li X., Yeh A.G.* Calibration of cellular automata by using neural networks for the simulation of complex urban systems // *Environment and Planning A*. — 2001. — Vol. 33, No. 1. — P. 1445–1462. — DOI: 10.1068/a33210
- Li X., Yeh A.G.* Neural-network-based cellular automata for simulating multiple land use changes using GIS // *International Journal of Geographical Information Science*. — 2002. — Vol. 16, No. 4. — P. 323–343. — DOI: 10.1080/13658810210137004
- Pelz P.F., Friesen J., Hartig J.* Similar size of slums caused by a Turing instability of migration behavior // *Phys. Rev. E*. — 2019. — Vol. 107, No. 2. — P. 023202. — DOI: 10.1103/PhysRevE.99.022302
- Samarskii A.A., Kurdyumov S.P., Galaktionov V.A.* Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations. — Berlin: De Gruyter, 2011. — 560 p. — DOI: 10.1515/9783110889864
- Schweitzer F., Steinbink J.* Urban Cluster Growth: Analysis and Computer Simulation of Urban Aggregations // *Self-Organization of Complex Structures: From Individual to Collective Dynamics* / ed. by F. Schweitzer. — London: Gordon and Breach, 1997. — P. 501–518.
- Schweitzer F., Steinbink J.* Analysis and Computer Simulation of Urban Cluster Distributions // *Fundamental Principles of Urban Growth* / eds. by K. Humpert, K. Brenner, S. Becker, R. Broekman. — Wuppertal: Muller and Busmann, 2002. — P. 240–271.
- Short M.B., D’Orsogna M.R., Pasour V.B., Tita G.E., Brantingham P.J., Bertozzi A.L., Chayes L.B.* A statistical model of criminal behavior // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. — 2008. — Vol. 18, No. 1. — P. 1249–1267. — DOI: 10.1142/S0218202508003029
- Short M.B., Brantingham P.J., Bertozzi A.L., Tita G.E.* Dissipation and displacement of hotspots in reaction-diffusion models of crime // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2010. — Vol. 107, No. 9. — P. 3961–3965. — DOI: 10.1073/pnas.0910921107
- Vasquez J.L.* The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. — Oxford: Oxford University Press, 2006. — 624 p. — DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198569039.001.0001
- Wu N., Silva E.A.* Artificial Intelligence Solutions for Urban Land Dynamics: A Review // *Journal of Planning Literature*. — 2010. — Vol. 24, No. 3. — P. 246–265. — DOI: 10.1177/0885412210361571
- Zhang L., Zhen Y.* An artificial neural network model of the landscape pattern in Shanghai metropolitan region, China // *Front. Biol. China*. — 2006. — Vol. 4, No. 1. — P. 463–469. — DOI: 10.1007/s11515-006-0063-2