

УДК: 532.54

Развитие берегового откоса в русле трапециевидного канала

Д. И. Потапов^{1,a}, И. И. Потапов^{2,b}

¹Институт горного дела Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Тургенева, д. 51

²Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65

E-mail: ^a shineon91@mail.ru, ^b potapov2i@gmail.com

Получено 12.04.2022, после доработки — 18.05.2022.

Принято к публикации 18.05.2022.

Сформулирована математическая модель эрозии берегового склона песчаного канала, происходящей под действием проходящей паводковой волны. Модель включает в себя уравнение движения квазиустановившегося гидродинамического потока в створе канала. Движение донной и береговой поверхности русла определяется из решения уравнения Экснера, которое замыкается оригинальной аналитической моделью движения влекомых наносов. Модель учитывает транзитные, гравитационные и напорные механизмы движения донного материала и не содержит в себе феноменологических параметров. Движение свободной поверхности гидродинамического потока определяется из решения дифференциальных уравнений баланса. Модель учитывает изменения средней по створу турбулентной вязкости при изменении створа канала.

На основе метода конечных элементов получен дискретный аналог сформулированной задачи и предложен алгоритм ее решения. Особенностью алгоритма является контроль влияния движения свободной поверхности потока и расхода потока на процесс определения турбулентной вязкости потока в процессе эрозии берегового склона. Проведены численные расчеты, демонстрирующие качественное и количественное влияние данных особенностей на процесс определения турбулентной вязкости потока и эрозию берегового склона русла.

Сравнение данных по береговым деформациям, полученных в результате численных расчетов, с известными лотковыми экспериментальными данными показали их согласование.

Ключевые слова: русловой процесс, береговая эрозия, влекомые наносы

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 21-57-53019).

UDC: 532.54

Bank slope evolution in trapezoidal channel riverbed

D. I. Potapov^{1,a}, I. I. Potapov^{2,b}

¹Mining Institute of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences
51 Turgenev st., Khabarovsk, Khabarovsk region, 680000, Russia
²Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences
65 Kim Yu-Jong st., Khabarovsk, Khabarovsk region, 680000, Russia

E-mail: ^a shineon91@mail.ru, ^b potapov2i@gmail.com

Received 12.04.2022, after completion — 18.05.2022.

Accepted for publication 18.05.2022.

A mathematical model is formulated for the coastal slope erosion of sandy channel, which occurs under the action of a passing flood wave. The moving boundaries of the computational domain — the bottom surface and the free surface of the hydrodynamic flow — are determined from the solution of auxiliary differential equations. A change in the hydrodynamic flow section area for a given law of change in the flow rate requires a change in time of the turbulent viscosity averaged over the section. The bottom surface movement is determined from the Exner equation solution together with the equation of the bottom material avalanche movement. The Exner equation is closed by the original analytical model of traction loads movement. The model takes into account transit, gravitational and pressure mechanisms of bottom material movement and does not contain phenomenological parameters.

Based on the finite element method, a discrete analogue of the formulated problem is obtained and an algorithm for its solution is proposed. An algorithm feature is control of the free surface movement influence of the flow and the flow rate on the process of determining the flow turbulent viscosity. Numerical calculations have been carried out, demonstrating qualitative and quantitative influence of these features on the determining process of the flow turbulent viscosity and the channel bank slope erosion.

Data comparison on bank deformations obtained as a result of numerical calculations with known flume experimental data showed their agreement.

Keywords: channel process, coastal erosion, bed load

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 3, pp. 581–592 (Russian).

This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project code 21-57-53019).

1. Введение

Изучение процесса эрозии берегового склона песчаного канала под действием протекающей в канале воды является важной прикладной задачей. Первые попытки построения строгих математических моделей для определения формы поперечного сечения русла восходят к работам [Glover, 1951; Макавеев, 1955; Кондратьев, 1959], в которых были предложены эвристические модели, позволившие получить качественные оценки изучаемого процесса. Дальнейшее развитие теории было связано с большим количеством экспериментальных работ [Ikeda, 1981; Ikeda, 1988; Hirano, 1973; Shoji, 1984; Pitlick, 2013; Metivier, 2016; Gholami, 2016; Parker, 1978]. Были предложены математические модели, учитывающие различные механизмы переноса донного материала, путем влечения по дну, взвешивания частиц донного материала в речном потоке и лавинного движения донных частиц при обрушении берегов [Ikeda, 1988; Hirano, 1973; Ikeda, 1991; Diplas, 1992; Farias, 2000; Петров, 1991].

Однако применение феноменологических формул транспорта донного материала позволило лишь качественно описывать процессы береговой эрозии. В работах [Петров, 2000; Потапов, 2013] были предложены и развиты [Петров, 2019] аналитические формулы транспорта донного материала, не содержащие в себе феноменологических коэффициентов.

В работах [Бондаренко, 2009; Потапова, 2013] предложены математические модели для изучения процессов береговых деформаций русла при постоянном расходе речного потока.

В данной работе предложена математическая модель задачи о развитии процесса эрозии берегового склона, связанного с прохождением паводковой волны в призматическом и трапециевидном в начальный момент русле канала. Поскольку характерное время установления гидродинамических параметров потока много меньше характерного времени изменения его расхода [Потапов, 2013], гидродинамический поток описывается в рамках квазистационарного приближения. Турбулентная вязкость потока изменяется во времени из-за изменений геометрии расчетной области, уровня свободной поверхности потока и расхода потока. Для описания изменения донных и береговых отметок русла используется аналитическая модель движения наносов, предложенная в работах [Петров, 2000; Потапов, 2013; Петров, 2019].

Для численного решения задачи предложен алгоритм, основанный на методе конечных элементов. Выполнено сравнение результатов расчетов береговых деформаций с известными экспериментальными данными [Métivier, 2016], показавшее их хорошее согласование.

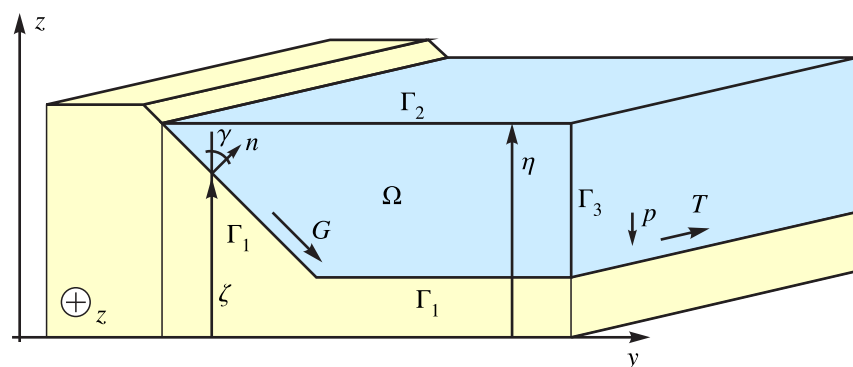


Рис. 1. Геометрия расчетной области Ω и ее границы Γ_k

2. Математическая постановка задачи гидродинамики

Рассмотрим задачу об эрозии берегового склона песчаного канала, трапециевидного в начальный момент времени, геометрия которого схематично представлена на рис. 1. Русло имеет

постоянный малый продольный уклон J в направлении движения гидродинамического потока, движущегося в поле силы тяжести. Ввиду симметрии русла расчет изменения поперечного сечения канала выполнялся только для левой половины сечения. Геометрия расчетной области Ω представлена на рис. 1.

Граница Γ_1 подвижна и представляет собой смоченную береговую и донную поверхности и сухой береговой склон. Γ_2 — свободная поверхность потока, изменяющаяся во времени вследствие изменения геометрии донной поверхности; Γ_3 — граница, совпадающая с центром симметрии канала, изменяющаяся вследствие изменения глубины потока. Определение геометрии подвижных границ Γ_k во времени является целью решения задачи.

Для определения границ Γ_k предложена математическая модель, содержащая в себе

- уравнение движения установившегося гидродинамического потока:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho_w g J; \quad (1)$$

- уравнение движения свободной поверхности потока:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \alpha_\eta \max(H) \frac{Q_{in} - Q}{\max(U)\Omega}, \quad Q = \int_{\Omega} u \, d\Omega; \quad (2)$$

- уравнение для определения турбулентной вязкости при изменении расхода и живого сечения потока:

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \alpha_\mu \max(H) \frac{Q_{in} - Q}{\max(U)\Omega}; \quad (3)$$

- уравнение донных изменений [Glover, 1951]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{s_f} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right) = 0, \quad (4)$$

где

$$D = \frac{4}{5} G_1 T_1 \frac{\sqrt{T} - \sqrt{T_0}}{\cos \gamma}, \quad G_1 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s}{\kappa(1 - \varepsilon) \sqrt{\rho_w} (\rho_s - \rho_w) g (\operatorname{tg} \varphi)^2}, \quad (5)$$

$$T_0 = \frac{8 (\rho_s - \rho_w) g d \operatorname{tg} \varphi}{9 c_x}, \quad \cos \gamma = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{dy} \right)^2} \right)^{-1}; \quad (6)$$

- уравнение для определения придонных сдвиговых напряжений:

$$T = T_{xy} n_y + T_{xz} n_z, \quad T_{xz} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial z}, \quad T_{xy} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (7)$$

Уравнения (1)–(2) замыкаются граничными условиями

$$u = 0, \quad z \in \Gamma_1; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad y, z \in \Gamma_2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad z, y \in \Gamma_3; \quad (8)$$

$$\mu_t = \mu_0, \quad z \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2; \quad \frac{\partial \mu_t}{\partial z} = 0, \quad z, y \in \Gamma_3. \quad (9)$$

Уравнения (1)–(5) замыкаются начальными условиями

$$\zeta(y, 0) = \zeta_0(y), \quad 0 \leq y \leq L, \quad t = 0, \quad \eta(0) = \eta_0, \quad (10)$$

граничными условиями Дирихле на береговом склоне:

$$\zeta(y_0, t) = \zeta_0(y_0), \quad y = y_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11)$$

и граничными условиями Неймана на оси симметрии створа:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad y = y_N, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (12)$$

Здесь $u = u(y, z)$ – осредненная скорость речного потока в области Ω , J – уклон речного русла, μ_t – турбулентная вязкость потока, $H = \eta - \zeta$ – глубина потока, g – ускорение свободного падения, $\zeta = \zeta(y)$, $\eta = \eta(t)$ – отметки свободной поверхности потока и донной поверхности русла, T_{0c} – критическое придонное касательное напряжение на ровном дне, ρ_w, ρ_s – плотность воды и песка соответственно, φ – угол внутреннего трения донных частиц, γ – острый угол между нормалью к поверхности дна ζ и вертикальной линией, c_x – лобовое сопротивление частиц, d – средний диаметр донных частиц, Q_{in} – заданный расход потока, κ – коэффициент Кармана, ζ_0 – отметки дна, η_0, μ_0 – отметка свободной поверхности потока и турбулентная вязкость потока в начальный момент времени соответственно, $s_f = f \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}$, $f \approx 0,1$ – концентрация наносов в активном слое, α_u, α_η – параметры модели, $p = \eta - \zeta$.

3. Метод решения задачи

Рассмотрим слабую вариационную формулировку Галеркина для задачи (1)–(12) с набором пробных функций $\{\psi\} \in H^1(\Omega)$. В задаче необходимо найти неизвестные функции $\{u, T_{xy}, T_{xz}, \zeta\} \in H^1(\Omega)$ такие, что

$$\int_{\Omega} \psi \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \rho_w g J \right] d\Omega = 0, \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} \psi \left[T_{xy} - \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right] d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \psi \left[T_{xz} - \mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right] d\Omega = 0, \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} \psi \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{s} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right) \right] d\Omega = 0. \quad (15)$$

Интегрируя по частям уравнения (13), (15) и учитывая краевые условия (8)–(12), получим

$$\int_{\Omega} \left[\mu_t \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \psi \rho_w g J \right] d\Omega = 0, \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} \psi + D \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{s} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] d\Omega = 0. \quad (17)$$

Используем метод конечных элементов в формулировке Петрова–Галёркина. Разобьем расчетную область Ω на конечные элементы Ω_e , $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$. Введем аппроксимацию функций ζ и p на конечном элементе:

$$u = L_\alpha u_\alpha, \quad \mu_t = L_\alpha \mu_{t\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad (18)$$

$$\zeta = N_\alpha \zeta_\alpha, \quad p = N_\alpha p_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (19)$$

где L_α, N_α — функции формы конечного элемента в области Ω^h и на границе Γ_1 , $u_\alpha, \nu_{t\alpha}$ — значения осредненной скорости и кинематической турбулентной вязкости в узлах конечного элемента, $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha(t)$, p_α — значения отметок дна и придонного напора в узлах конечного элемента. Преобразуем интегральные тождества (14), (16), (17) с учетом интерполяции (18), (19) в дискретные аналоги задачи

$$\int_{\Omega} \left[\mu_t \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \frac{\partial L_\beta}{\partial y} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial z} \frac{\partial L_\beta}{\partial z} \right) u_\beta + L_\alpha g J \right] d\Omega = 0, \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} \left[L_\alpha L_\beta T_{xy\beta} - \mu_t L_\alpha \frac{\partial L_\beta u_\beta}{\partial y} \right] d\Omega = 0, \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} \left[L_\alpha L_\beta T_{xz\beta} - \mu_t L_\alpha \frac{\partial L_\beta u_\beta}{\partial z} \right] d\Omega = 0, \quad (22)$$

$$\int_{\Omega} (1 - \varepsilon) N_\alpha N_\beta \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \left(D \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) \left(\zeta_\beta + \frac{p_\beta}{s} \right) d\Omega = 0. \quad (23)$$

Полагаем, что аппроксимация $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha(t)$ на временных слоях (n) линейна и для нее справедливы соотношения

$$\zeta_\alpha = \theta \zeta_\alpha^{n+1} + (1 - \theta) \zeta_\alpha^n, \quad \frac{d\zeta_\alpha}{dt} \approx \frac{\zeta_\alpha^{n+1} - \zeta_\alpha^n}{\Delta t}, \quad \theta \approx 0,5. \quad (24)$$

Окончательная форма дискретных аналогов задачи имеет вид

$$K_{\alpha\beta}^U u_\beta = F_\alpha^g, \quad (25)$$

$$M_{\alpha\beta}^T T_{xy\beta} = F_\alpha^y, \quad M_{\alpha\beta}^T T_{xz\beta} = F_\alpha^z, \quad (26)$$

$$\left[\frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} + \theta K_{\alpha\beta} \right]^n \zeta_\alpha^{n+1} = \left[\frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} - (1 - \theta) K_{\alpha\beta} \right]^n \zeta_\alpha^n + \theta F_\alpha^{n+1} + (1 - \theta) F_\alpha^n. \quad (27)$$

Пусть $L_\alpha = \frac{1}{2\Omega_e} (\alpha_\alpha y + b_\alpha z + c_\alpha)$, или

$$L_1 = \frac{1}{2\Omega_e} [(y_2 z_3 - y_3 z_2) + (z_2 - z_3)y + (y_3 - y_2)z], \quad (28a)$$

$$L_2 = \frac{1}{2\Omega_e} [(y_3 z_1 - y_1 z_3) + (z_3 - z_1)y + (y_1 - y_3)z], \quad (28б)$$

$$L_3 = \frac{1}{2\Omega_e} [(y_1 z_2 - y_2 z_1) + (z_1 - z_2)y + (y_2 - y_1)z], \quad (28в)$$

где y_k, z_k — координаты вершин КЭ, Ω_e — площадь КЭ, определяемая по формуле

$$\Omega_e = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} K_{\alpha\beta}^U = \int_{\Omega_e} \left[\mu_t \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \frac{\partial L_\beta}{\partial y} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial z} \frac{\partial L_\beta}{\partial z} \right) \right] d\Omega = \frac{\mu_t}{4\Omega_e} (a_\alpha a_\beta + b_\alpha b_\beta), \quad (29)$$

$$F_\alpha^g = \int_{\Omega_e} L_\alpha \rho_w g J d\Omega = \frac{1}{3} \rho_w g J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$M_{\alpha\beta}^T = \int_{\Omega_e} L_\alpha L_\beta d\Omega = \frac{\Omega_e}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega = \frac{1}{6L} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$K_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \left(D \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{y_i}^{y_{i+1}} D \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} dy = \frac{D}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$F_{\alpha} = \frac{1}{s} K_{\alpha\beta} p_{\beta} = \frac{D}{sL} \begin{pmatrix} p_0 - p_1 \\ p_1 - p_0 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Здесь для радиус-вектора \bar{r} к контуру дна на конечном элементе справедливы следующие соотношения:

$$\bar{r} = y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3, \quad y = N_{\alpha}(s)y_{\alpha}, \quad z = N_{\alpha}(s)z_{\alpha}, \quad (35)$$

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dy}{ds}\bar{e}_2 + \frac{dz}{ds}\bar{e}_3, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dN_{\alpha}}{ds}y_{\alpha}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{dN_{\alpha}}{ds}z_{\alpha}. \quad (36)$$

Внешняя нормаль к контуру дна имеет вид

$$\bar{n} = \frac{1}{\det J} \left(\frac{dz}{ds}\bar{e}_2 - \frac{dy}{ds}\bar{e}_3 \right), \quad \det J = \sqrt{\left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2}. \quad (37)$$

Для линейных функций формы $N_{\alpha} = (1 - s, s)$ получим

$$\bar{n} = (n_y\bar{e}_2 + n_z\bar{e}_3) = \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{L}\bar{e}_2 - \frac{y_{i+1} - y_i}{L}\bar{e}_3 \right). \quad (38)$$

Придонное касательное напряжение T_1 выразим через придонные компоненты тензора напряжений T_{xy} и T_{xz} :

$$T_1 = T_{xy}n_y + T_{xz}n_z. \quad (39)$$

Учет лавинного движения наносов на береговом склоне производился по алгоритму, предложенному в работе [Кондратьев, 1959]. На каждом временном слое после вычисления значений ζ_i выполнялась лавинная коррекция, при которой для каждого i -го узла контрольно-объемной сетки проводились следующие парные вычисления:

$$\zeta_i = \zeta_i - \alpha_L \Delta_L, \quad \zeta_{i-1} = \zeta_{i-1} + \alpha_L \Delta_L, \quad (40)$$

где значения корректора Δ_L для левого берегового склона вычисляются как

$$\Delta_L = \begin{cases} r + \Delta\zeta_i, & r < -\Delta\zeta_i, \\ 0, & r \geq -\Delta\zeta_i, \end{cases} \quad r = (x_i - x_{i-1}) \operatorname{tg} \varphi, \quad \Delta\zeta_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}. \quad (41)$$

Для предотвращения образования нефизичных осцилляций в основании берегового склона был применен метод нижней релаксации лавинной коррекции с параметром релаксации $\alpha_L = 0,25$.

4. Алгоритм решения задачи

Для решения задачи (1)–(12) решались системы алгебраических уравнений, формируемых на основе дискретных конечно-элементных аналогов (25)–(27). Поскольку использовался стандартный процесс построения систем алгебраических уравнений, характерный для метода конечных элементов, он не рассматривается в данной работе. Ниже приводится краткий алгоритм решения всей задачи.

1. Построение сеточной области Ω^h для заданной начальной геометрии русла и определение отметок свободной поверхности по алгоритмам [Потапов, 2013].
2. Вычисление поля скорости в Ω^h по формулам (25).
3. Коррекция вязкости по уравнению (2).
4. Вычисление полей напряжений T_{xy}, T_{xz} в Ω^h по формулам (26).
5. Вычисление поля напряжений T на Γ_k по формуле (7).
6. Вычисление поля новых отметок дна ζ^{n+1} по формуле (27).
7. Коррекция уровня свободной поверхности и (или) расчет турбулентной вязкости по формулам (2)–(3).
8. Если расчетное время меньше требуемого, то переходим на шаг 1.

5. Результаты расчетов

Для верификации предложенной математической модели (1)–(12) был выполнен ряд расчетов, связанных с решением задачи о размыве берегового склона трапециевидного в начальный момент времени русла, геометрия которого схематично представлена на рис. 1. Решение задачи выполнялось при параметрах, приведенных в работе [Métivier, 2016]:

$$\rho_w = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_s = 2650 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \kappa = 0,25, \quad d = 0,8 \text{ мм}, \quad \varepsilon = 0,375,$$

$$c_x = 0,4, \quad f = 0,1, \quad T_0 = (\rho_s - \rho_w)gd\theta_0, \quad \theta_0 = 0,047, \quad \varphi = 28.$$

Начальная геометрия трапециевидного канала для первой и второй группы расчетов приведена в таблице 1.

Таблица 1. Начальная геометрия канала

y [м]	0	0,4	1,138	1,265	1,5
z [м]	0,3	0,212	0,212	0,14	0,14

В работе [Потапов, 2013] предложена математическая модель и разработаны алгоритмы расчета береговых деформаций, в которых не учитывались изменения турбулентной вязкости в процессе изменения геометрии донной поверхности в створе реки.

На рис. 2 кривыми 1–3 показаны изменения отметок донной и свободной поверхностей во времени. Данные зависимости получены при постоянной турбулентной вязкости, определенной для канала в начальный момент времени.

На рис. 3 кривыми 1–3 показаны изменения отметок донной поверхности во времени, полученные при постоянном уровне свободной поверхности потока и изменяющейся во времени турбулентной вязкости.

Изменения отметок донной поверхности во времени для двух рассмотренных примеров имеют количественные и качественные отличия при одинаковом гидродинамическом расходе. Так, в случае фиксированной турбулентной вязкости требование на сохранение постоянства расхода приводит к увеличению площади живого сечения потока и падению его средней скорости. В случае постоянства уровня свободной поверхности потока требование на сохранение постоянства расхода при обмелении русла возможно только при уменьшении турбулентной вязкости и, соответственно, увеличении средней скорости потока. Полученный результат указывает

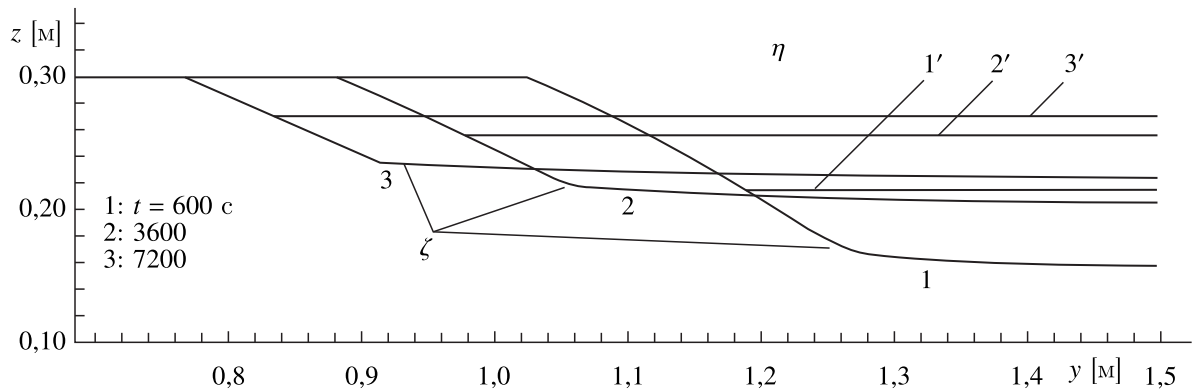


Рис. 2. Изменение геометрии канала ζ во времени (кривые 1, 2, 3) с изменяемой свободной поверхностью потока η (кривые 1', 2', 3')

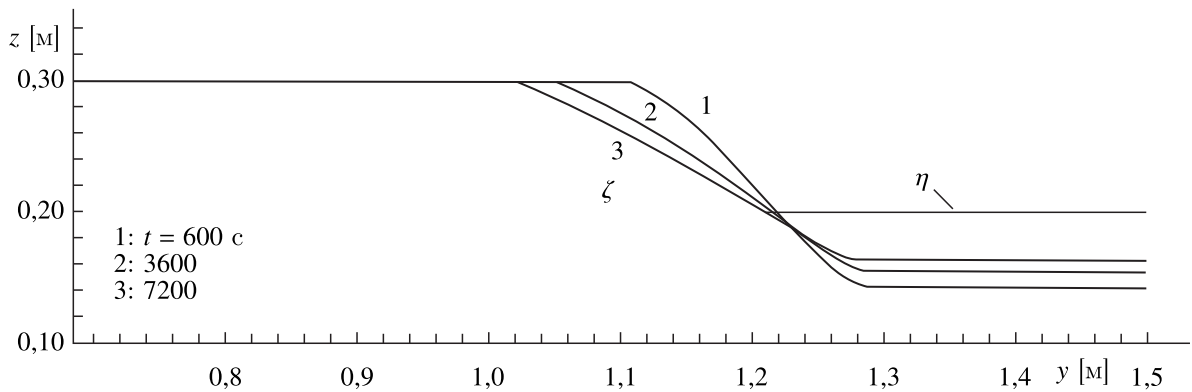


Рис. 3. Изменение геометрии канала ζ во времени (кривые 1, 2, 3) с фиксированной свободной поверхностью потока η

на важность определения условий, которые будут контролировать процессы изменения отметок свободной поверхности гидродинамического потока при исследовании береговых размывов.

В приведенных примерах для удобства демонстрации влияния параметров $\mu(t)$, $\eta(t)$ на процесс развития береговых деформаций высота бровки берегового откоса взята на 8,8 см выше, чем использовалась в работе [Pitlick, 2013].

Кривой 1 на рис. 4 показана начальная геометрия трапецевидного канала. Неразмываемая стенка трапецевидного канала находится справа $y = 1,5$ м. Кривой 2 показана форма донной поверхности [Pitlick, 2013] на момент времени $t = 225$ минут, развившаяся из начальной геометрии дна (кривая 1). Развитие донной поверхности происходило под воздействием установившегося гидродинамического потока с расходом 11,9 л/с. Горизонтальной пунктирной линией на рис. 4 обозначена свободная поверхность потока в момент времени $t = 225$ мин.

Кривой 3 показана форма донной поверхности [Pitlick, 2013] на момент времени $t = 650$ минут, развившаяся из геометрии дна, полученной в момент времени $t = 225$ минут (кривая 2). Развитие донной поверхности происходило под воздействием установившегося гидродинамического потока с расходом 16,3 л/с. Горизонтальной штрихпунктирной линией на рис. 4 обозначена свободная поверхность потока в момент времени $t = 650$ мин.

Анализ кривых 1–3 показывает, что, несмотря на попытку экспериментаторов в работе [Pitlick, 2013] получить установившийся процесс береговых деформаций, баланс материала, сползающего с берегового откоса в основное русло канала, не соблюдается. Отношение объема

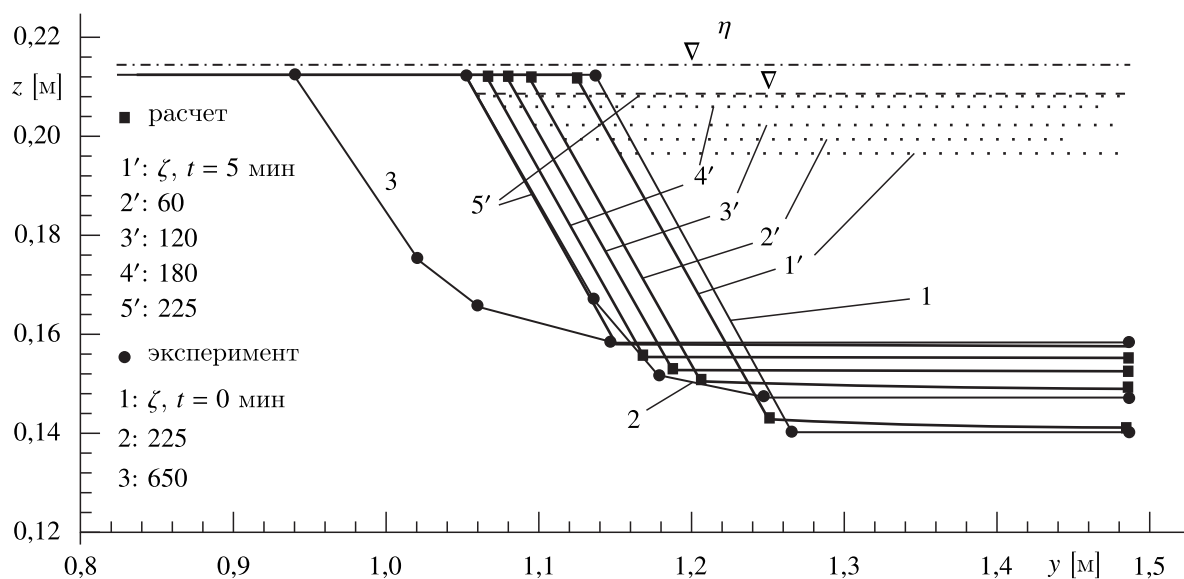


Рис. 4. Изменение геометрии канала ζ во времени, эксперимент (кривые 1, 2, 3), расчет (кривые 1', 2', 3'). Штрих-пунктиром обозначена свободная поверхность потока, полученная в расчетах

песка, смытого с берегового откоса (кривая 2) при размыве канала, более чем в три раза превышает объем песка, перешедшего в ложе канала. Такой дисбаланс возможен только в случае протекания существенно не установившегося руслового процесса. На втором этапе (кривая 3) отношение смытого объема наносов к объему донных отложений приблизительно равно 1,5.

В работе [Pitlick, 2013] указывается, что глубина потока в начальный момент времени составляет 0,06 м; из рис. 4 следует, что в момент времени $t = 225$ минут глубина потока у стенки составляет $\sim 0,066$ м. В численных расчетах для описания изменений η во времени использовался линейный интеграл уравнения (2):

$$\eta = \eta_0 + (\eta_1 - \eta_0) \frac{t}{t_1},$$

где $\eta_0 = 0,196$ м, $\eta_1 = 0,208$ м, $t_1 = 13\,500$ с взяты из работы [Pitlick, 2013]. На каждом шаге интегрирования выполнялся контроль определения турбулентной вязкости μ_t из условия (2). Результаты моделирования приведены на рис. 4 кривыми 1'–5', черными квадратными маркерами показаны вычисленные отметки донной поверхности. Отметим, что сравнение полученных расчетных отметок дна (кривые 1'–5') с экспериментальными отметками дна (кривые 1, 2) по фронту берегового склона показывает их хорошее согласование, однако уровень средней отметки дна в расчетах существенно выше уровня полученных в экспериментах. Что объясняется отсутствием уноса массы неустановившимся потоком. При этом по характеру получаемого донного профиля видно, что на береговом откосе доминирующим механизмом переноса донного материала при размыве берега является лавинный механизм движения наносов.

6. Заключение

Предложена математическая модель задачи о развитии эрозии берегового склона песчаного канала, связанной с прохождением паводковой волны в призматическом и трапециевидном в начальный момент времени русле канала. Модель учитывает влияние изменений расхода потока в канале и его свободной поверхности на процесс эрозии берегового склона. На основе

метода конечных элементов в формулировке Петрова–Галёркина получен дискретный аналог задачи и предложен алгоритм ее решения.

В процессе численных исследований получены следующие результаты.

1. Ограничения, накладываемые на изменение турбулентной вязкости и свободной поверхности потока, приводят к количественному и качественному изменению береговых процессов при одинаковом гидродинамическом расходе. Так, фиксация турбулентной вязкости приводит к увеличению площади живого сечения потока и падению его средней скорости. Фиксация уровня свободной поверхности потока приводит к уменьшению турбулентной вязкости, обмелению русла и увеличению средней скорости потока. Полученный результат указывает на важность определения условий, которые будут контролировать процессы изменения отметок свободной поверхности гидродинамического потока при исследовании береговых деформаций.
2. Выполненное сравнение береговых деформаций с известными экспериментальными данными показало их хорошее согласование по фронтальному изменению берегового откоса канала. Однако выполнить полную верификацию полученного решения не удалось в связи с тем, что баланс донного материала в створе канала не соблюдается из-за его вымывания из основного русла канала не установившимся потоком.

Список литературы (References)

- Бондаренко Б. В., Потанов И. И.* Моделирование эволюции поперечного сечения песчаного канала // Вычислительные технологии. — 2009. — Т. 14, № 5. — С. 1–14.
Bondarenko B. V., Potapov I. I. Modelirovanie evolutsiyi poperechnogo sechenia peschanogo kanala [Modeling of a sand channel cross section evolution] // Computing technologies. — 2009. — Vol. 14, No. 5. — P. 1–14 (in Russian).
- Кондратьев Н. Е., Ляпин А. Н., Попов И. В., Пиньковский С. И., Федоров Н. Н., Якунин И. И.* Руслевой процесс. — Л.: Гидрометеиздат, 1959. — 372 с.
Kondratiev N. E., Lyapin A. N., Popov I. V., Pin'kovsky S. I., Fedorov N. N., Yakunin I. I. Ruslovoi protsess [Channel process]. — Leningrad: Gidrometeoizdat, 1959. — 372 p. (in Russian).
- Макавеев Н. И.* Русло реки и эрозия в ее бассейне. — М.: Издательство АН СССР, 1955. — 348 с.
Makaveev N. I. Ruslo reki i erozia v ee basseine [River bed and erosion in its basin]. — Moscow: Publishing of AS USSR, 1955. — 348 p. (in Russian).
- Петров П. Г.* Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. — 1991. — № 5. — С. 72–75.
Petrov P. G. Dvijenie sipuchej sredi v pridonnom sloe jidkosti [The movement of a granular medium in the bottom liquid layer] // PMTP. — 1991. — P. 72–75 (in Russian).
- Петров А. Г., Петров П. Г.* Вектор расхода наносов в турбулентном потоке над размываемым дном // ПМТФ. — 2000. — Т. 41. — С. 102–112.
Petrov A. G., Petrov P. G. Vektor rashoda nanosov v turbulentnom potoke nad razmivaemim dnom [Selected Sections of Channel Dynamics] // PMTP. — 2000. — Vol. 41. — 244 p. (in Russian).
- Петров А. Г., Потанов И. И.* Избранные разделы русловой динамики. — М.: Ленанд, 2019. — 244 с.
Petrov A. G., Potapov I. I. Izbrannye razdely ruslovoi dinamiki [Selected Sections of Channel Dynamics]. — Moscow: Lenand, 2019. — 244 p. (in Russian).
- Потанов И. И., Бондаренко Б. В.* Математическое моделирование эволюции берегового склона в каналах с песчаным руслом // Вычислительные технологии. — 2013. — Т. 18, № 4. — С. 25–36.
Potapov I. I., Bondarenko B. V. Matematicheskoe modelirovanie evolutsiyi beregovogo sklona v kanalah s peschanim ruslom [Mathematical modeling of central slope evolution in channels with a sandy bed] // Computing technologies. — 2013. — Vol. 18, No. 4. — P. 1023–1031 (in Russian).
- Dapporto S., Rinaldi M., Casagli N., Vannocci P.* Mechanisms of riverbank failure along the Arno river, central Italy // Earth Surf. Process. — Landforms 28, 2003. — P. 1303–1323.

- Diplas P., Vigilar G.* Hydraulic geometry of threshold channels // *J. Hydr. Eng., ASCE.* — 1992. — Vol. 118. — P. 597–614.
- Farias H. D.* Physical and Mathematical Modelling of Alluvial Channels in Regime. — Hydra, 2000.
- Gholami A., Bonakdari H., Zeynoddin M., Ebtehaj I., Gharabaghi B., Khodashenas S. R.* Reliable method of determining stable threshold channel shape using experimental and gene expression programming techniques. — Springer, Neural Computing and Applications, 2018. — P. 1–19.
- Glover R. E., Florey Q. L.* Stable channel profiles. — Washington: U. S. Bureau of Reclamation, 1951.
- Hirano M.* River-bed variation with bank erosion // *J. of Hydraulic, Coastal and Environmental Engineering.* — 1973. — No. 210. — P. 13–20 (in Japanese).
- Ikeda S.* Stable channel cross-sections of straight sand rivers // *J. Water Resources Res.* — 1991. — Vol. 27, No. 9. — P. 2429–2438.
- Ikeda S., Parker G., Kimura Y.* Stable width and depth of straight gravel rivers with heterogeneous bed materials // *J. water resource research.* — 1988. — Vol. 24, No. 5. — P. 713–722.
- Ikeda S., Parker G., Saway K.* Bend theory of river meanders. Part 1. Linear development // *J. Fluid Mech.* — 1981. — No. 112. — P. 363–377.
- Métivier F., Lajeunesse E., Devauchelle O.* Laboratory rivers: Lacey’s law, threshold theory and channel stability // *Earth Surf. Dynam. Discuss.* — 2016. — P. 1–16.
- Parker G.* Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 1. The sand-silt river // *J. Fluid Mech.* — 1978. — Part 1, Vol. 89. — P. 109–126.
- Pitlick J., Marr J., Pizzuto J.* Width adjustment in experimental gravel-bed channels in response to overbank flows // *Journal of geophysical research: Earth surface.* — 2013. — Vol. 118. — P. 553–570.
- Shoji F., Masashige Y.* Shear stress distribution on a continuous boundary and widening process of a straight alluvial channel // *J. of Hydraulic, Coastal and Environmental Engineering.* — 1984. — No. 351. — P. 87–96 (in Japanese).